Необхідність очевидна. Доведемо достатність. Якщо позначити $\lambda_1(e^x) = y(x)$, то легко зауважити, що рівність $\mathcal{X} = \rho$ перепишеться у вигляді

$$y'' - [\rho^2 + o(1)]y = 0, \qquad (x \to +\infty).$$

Оскільки $y(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, то враховуючи відомі результати [I, 4, 7], одержуємо $y(x) = ay_1(x) + by_2(x)$,

$$a \neq 0, \quad y_1'/y_1 \to \rho, \quad y_2'/y_2 \to -\rho \quad \text{при } x \to +\infty .$$

Звідси легко випливає /6/.

Ми вдячні А.А.Гольдбергу та О.Е.Єременку, які допомогли спростити початкове доведення леми 2.

Список літератури: I. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. - М.: ИЛ, 1954. 2. Кондратюк А.А. Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста. - Математический сборник, 1978, I06, № 3. 3. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. - М.: Гостехиздат, 1956. 4. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1954, Т.2. 5. Karamata J. Sur un mode de croissance régulière des fonctions.— Mathematica (Cluj), 1930, 4. 6. Lévy P. L'espace de répartitions linéaires.- Bull. des Sciences Math., 1938, 62. 7. Perron O. Ueber lineare Differentialgleichungen bei denen die unabhängige Variable reelle ist.- Journ. für die reine und ang. Math., 1913, 142. 8. Rubel L.A., Taylor B.A. A Fourier series method for meromorphic and entire functions.- Bull. Soc. Math. France, 1968, 96.

Стаття надійшла в редколегію 13.03.1979 р.

УДК 517.574

А.А.Кондратюк

ПРО УЗАГАЛЬНЕННЯ КЛАСІВ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ЦІЛКОМ РЕГУЛЯРНОГО РОСТУ

Нехай $\lambda(r)$ - додатна, неспадна, неперервна на $]0,\infty[$ функція, $\lambda(r) \to \infty$ при $r \to \infty$, яка називається функцією росту.

Через L позначимо клас субгармонічних в C функцій u, кожна з яких гармонічна в деякому околі нуля і для кожної з яких існує стала A така, що для всіх $r>0$ виконується $T(r,u) \le \le A\lambda(r)$, де $T(r,u)$ – неванліннівська характеристика функції u [5]. Через L^0 позначимо підклас класу L функцій u, для яких існує границя

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\lambda(r)} \int_{\eta}^{\varphi} u(re^{i\theta})\,d\theta$$

при довільних η, φ з R.

А.А.Гольдберг показав [I], що підклас $\Lambda^0_\varepsilon \subset L^0$ функцій $u = \ln|f|$, де f – ціла, при $\lambda(r) = r^{\rho(r)}$, $\rho(r)$ – уточнений порядок [4], суміщається з класом цілих функцій цілком регулярного росту в сенсі Левіна-Пфлюгера [3, 4].

Нехай

$$C_k(r) = C_k(r,u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} u(re^{i\theta})\,d\theta, \quad k \in Z.$$

Формули, що виражають коефіцієнти Фур'є $C_k(r,u)$ через розподіл мас μ, асоційованих за Ріссом з функцією u, встановлені П.Новеразом [6].

<u>Теорема I.</u> Якщо $u \in L^0$, тоді для кожного $k \in Z$ існує скінченна границя

$$\lim_{r\to\infty} c_k(r,u)/\lambda(r) = c_k[u] = c_k. \qquad /I/$$

Д о в е д е н н я цілком аналогічне доведенню необхідності в теоремі I праці [3].

Позначимо далі, вважаючи $\frac{1}{\infty} = 0$, $\infty^2 = \infty$,

$$\lambda_1(r) = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_0^t \frac{\lambda(\tau)}{\tau}\,d\tau,$$

$$\varliminf_{r\to\infty} \lambda(r)/\lambda_1(r) = \varkappa^2 \le \rho^2 = \varlimsup_{r\to\infty} \lambda(r)/\lambda_1(r),$$

$$s(r,\varphi) - s(r,\eta) = 2\pi\mu(\{z: |z| \le r, \eta < \arg z \le \varphi\}),$$

$$S(r,\varphi) - S(r,\eta) = \int_0^r \frac{s(t,\varphi)-s(t,\eta)}{t}\,dt,$$

$$N_k(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\,dS(r,\theta), \quad N_0(r) = N(r).$$

Обернені формули для коефіцієнтів Фур"є $C_k(r)$ одержуємо так само, як і для мероморфних функцій [3]. Вони мають вигляд

$$N_k(r) = C_k(r) - k^2\int_0^r \frac{dt}{t}\int_0^t \frac{C_k(\tau)}{\tau}\,d\tau. \qquad /2/$$

Означення I. Дійсна 2π - періодична функція $h(\theta)$ називається $[\varkappa,\rho]$ - тригонометрично опуклою, $0 \le \varkappa \le \rho \le +\infty$, якщо вона ω - тригонометрично опукла [3] при кожному ω, $\varkappa \le \omega \le \rho$. Під 0 - тригонометрично опуклими функціями розуміємо невід"ємні сталі, а під ∞ - тригонометрично опуклими 2π - періодичні невід"ємні неперервні функції.

Приклад. 2π - періодичне продовження функції

$$h(\theta) = (-1)^{[\varkappa]}\cos\varkappa\theta + 1, \quad \varkappa \ge 0$$

з $[-\pi,\pi]$ на R - $[\varkappa,\infty]$ - тригонометрично опукла функція, що неважко перевірити, використовуючи означення I та критерій ω - тригонометричної опуклості (див. [4], с. 79).

Теорема 2. Якщо $u \in L^0$ і $\varkappa < +\infty$, то функція

$$h(\theta,u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\theta}$$

$[\varkappa,\rho]$ - тригонометрично опукла і для кожної послідовності (r_j) такої, що

$$\lim_{r_j\to\infty} \lambda(r_j)/\lambda_1(r_j) = \omega^2, \quad \varkappa \le \omega \le \rho, \quad \omega \ne 0,$$

виконується

$$\lim_{r_j\to\infty} \frac{S(r_j,\varphi)-S(r_j,\eta)}{\lambda(r_j)} = \frac{h'(\varphi,u)-h'(\eta,u)}{\omega^2} + \int_\eta^\varphi h(\theta,u)\,d\theta \qquad /3/$$

для всіх η, φ з R, в яких існує h'.

Доведення використовує обернені формули /2/ і аналогічне доведенню теореми 8 з праці [3]. При $\omega = +\infty$ ліва сторона рівності /3/ невід"ємна, тому з невід"ємності її правої сторони для всіх η і φ з R випливає $h(\theta) \geq 0$, тобто ∞ – тригонометрична опуклість.

Теорема 3. Якщо $u \in L^{0}$ і $\varkappa = \rho = +\infty$, то для всіх η, φ з $[0, 2\pi]$ за винятком, можливо, не більш як зліченної множини справедливо

$$\lim_{r \to \infty} \frac{S(r,\varphi) - S(r,\eta)}{\lambda(r)} = \sum_{k \neq 0} \frac{c_k}{k} (e^{ik\varphi} - e^{ik\eta}), \qquad /4/$$

а також

$$\lim_{r \to \infty} \frac{S(r,2\pi) - S(r,0)}{\lambda(r)} = c_0 . \qquad /5/$$

Доведення. З /I/ та /2/ для $k \in Z$ одержуємо

$$N_k(r) = c_k \lambda(r) + o(\lambda(r)), \quad (r \to \infty) \qquad /6/$$

за теоремою Каратеодорі-Леві /див. [2], с.227-229, а також лему I з праці [3]/ існує неспадна функція $S(\varphi)$ на $[0, 2\pi]$, для якої

$$\lim_{r \to \infty} \frac{S(r,\varphi) - S(r,\eta)}{\lambda(r)} = S(\varphi) - S(\eta)$$

у всіх точках неперервності функції S і, крім того,

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} \, dS(\theta). \qquad /7/$$

Звідси одержуємо /4/ і /5/.

Означення 2. Клас L^{0} називається тривіальним, якщо для кожної функції $u \in L^{0}$ і всіх $k \in Z$ виконується $c_k[u] = 0$, і нетривіальним – в протилежному випадку.

Означення 3. Функції росту $\lambda(r)$ та $\bar{\lambda}(r)$ називаються еквівалентними, коли $\lambda(r)/\bar{\lambda}(r) \to 1$ при $r \to \infty$.

Теорема 4. Для того щоб клас L^{0} був нетривіальним, необхідно і досить, щоб функція росту $\lambda(r)$ була еквівалентною деякій опуклій відносно $\ln r$ функції росту $\bar{\lambda}(r)$.

Д о в е д е н н я . Необхідність доведемо від супротивного, припускаючи, що $\lambda(r)$ не еквівалентна жодній опуклій відносно $\ln r$ функції $\tilde{\lambda}(r)$. Тоді $C_0=0$, бо функція $N(r)$ опукла відносно $\ln r$. Якщо $\varkappa=+\infty$, то з /7/ одержуємо $|C_k| \leq C_0$. Таким чином, $C_k=0$ для всіх $k\in Z$ та $u\in L^0$, що суперечить нетривіальності класу L^0.

Якщо ж $\varkappa<+\infty$, то при $\varkappa=0$ з /2/ і співвідношення $|N_k(r)|\leq N(r)=O(\lambda(r))$ при $r\to\infty$ одержимо $C_k=0$, $k\in Z$, а при $\varkappa>0$ виконується $\varkappa\neq\rho$, бо функція $\lambda_1(r)$ – опукла відносно $\ln r$. Із зображення для індикатора [3] при деякому нецілому ω, $\varkappa\leq\omega\leq\rho$ дістаємо $C_k=0$, $k\in Z$, $u\in L^0$, що знову ж суперечить нетривіальності класу L^0.

Щоб довести достатність, вважаємо, не зменшуючи загальності, що $\lambda(r)$ – двічі неперервно диференційована і опукла відносно $\ln r$. Позначимо $u_0(z)=(\lambda|z|-\lambda(1))^+$. Функція u_0 – субгармонічна в C, і, очевидно, $u_0\in L^0$. Крім того, $c_0[u]=1$, що й завершує доведення.

Список літератури: 1. А з а р и н В.С. О регулярности роста коэффициентов Фурье логарифма модуля целой функции. – Теория функций, функциональный анализ и их приложение, 1977, вып. 27. 2. З и г м у н д А. Тригонометрические ряды. – М.: Мир, 1965, т.1. 3. К о н д р а т ю к А.А. Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста. – Математический сборник, 1976, 106 /148/, № 3 /7/. 4. Л е в и н Б.Я. Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. 5. Hayman W.K., Kennedy P.B. Subharmonic functions. – Academic Press, 1976, v.1. 6. Noverraz P. Fonctions plurisousharmoniques et analytiques dans les espaces topologiques complexes. – Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 1969, 19.

Стаття надійшла в редколегію 13.03.1979 р.