УДК 517.512.2

Б.В.Ковальчук, З.Д.Фаріон

ПРО ЗБІЖНІСТЬ РЯДІВ ФУР"Є ДЕЯКИХ КЛАСІВ S^p - МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ МАТРИЦЬ

Нехай $F(x)=[f_{jk}(x)](-\infty<x<\infty)\in S^p$ - майже періодична матриця, показники Фур"є якої мають єдину граничну точку на нескінченності. Ряд Фур"є такої матриці можна записати у вигляді

$$F(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n e^{i\lambda_n x}, \qquad /1/$$

де $\{\lambda_n\}$ - спектр матриці $F(x)$, а $A_n=M\{F(x)\cdot e^{-i\lambda_n x}\}$ - її матричні коефіцієнти Фур"є /4/.

S^p - майже періодичні матричні многочлени

$$S_\lambda(x)=\sum_{|\lambda_n|\leq\lambda}A_n e^{i\lambda_n x} \qquad /2/$$

називатимемо частинними сумами порядку λ ряду Фур"є /1/.

Е.А.Бредихіна [1, 2] знайшла умови збіжності рядів Фур"є майже періодичних функцій Степанова в точці неперервності і в точці Лебега при відповідних властивостях розрідженості показників Фур"є заданого класу функцій.

Ми вивчаємо аналогічні питання для класу S - майже періодичних матриць (якщо $p=1$, то замість S^1 пишемо S). При цьому, для доведення збіжності рядів Фур"є S - майже періодичних матриць опираємося на результати, одержані у працях [1, 2].

1. Умови збіжності рядів Фур"є S - майже періодичних матриць в точці неперервності. Позначимо через $\mathcal{L}(F)$ послідовність $\{\lambda_n\}$ $(n=0,1,2,\dots)$ додатних показників Фур"є матриці $F(x)$, а через Σ - клас всіх лакунарних послідовностей $\mathcal{L}(F)$. Причому, $\mathcal{L}(F)\in\Sigma$ тоді і тільки тоді, коли

$$\lambda_{n+1}/\lambda_n\geq\theta>1 \quad (n=1,2,\dots).$$

Послідовність $\mathcal{L}(F)$ відносимо до класу $\overline{\Sigma}$, якщо із послідовності пар точок $\{\lambda_n,\lambda_{n+1}\}(n=1,2\dots)$ можна виділити нескінченну підпослідовність $\{\mu_m,\mu_m'\}(m=1,2,\dots)$ таку, що $\mu_m'/\mu_m\geq\theta>1\,(m=1,2,\dots)$

Теорема I. За умови $\mathcal{I}(F)\in\overline{\overline{\Sigma}}$ і x_0 точка неперервності S-майже періодичної матриці $F(x)$ має місце рівність

$$\lim_{m\to\infty} \| S_{\lambda_m}(x_0)-F(x_0)\|_S = 0 . \qquad /3/$$

Віднесемо тепер послідовність $\mathcal{I}(F)$ до класу $\overline{\overline{\overline{\Sigma}}}$, якщо із послідовності пар точок $\{\lambda_n, \lambda_{n+1}\}$ $(n=1,2,\dots)$ можна виділити нескінченну підпослідовність $\{\varkappa_m, \varkappa_m'\}$ $(m=1,2,\dots)$, для якої $\varkappa_m'-\varkappa_m\to\infty$ і $\varkappa_m'/\varkappa_m\to 1$ $(m\to\infty)$. Введемо величину $\omega(x,\delta)=\sup_{|t|\le\delta}\|F(x+t)-F(x)\|_S$.

Теорема 2. Якщо $\mathcal{I}(F)\in\overline{\overline{\overline{\Sigma}}}$, то в точці x_0 неперервності $F(x)$ рівність /3/ виконується за умови

$$\omega\left(x_0, \frac{1}{\varkappa_m'-\varkappa_m}\right)\ln\left(1-\frac{\varkappa_m}{\varkappa_m'}\right)\to 0 \quad (m\to\infty).$$

2. Умови збіжності рядів Фур'є S - майже періодичних матриць у точці Лебега. Нехай $F(x)=[f_{jk}(x)]$ обмежена матриця і $|F(x)|=$ $=[|f_{jk}(x)|]$. Називатимемо x точкою Лебега матриці $F(x)$, якщо

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|F(t)-F(x)|\,dt=0.$$

Позначимо через B_σ сукупність обмежених матриць $\mathcal{Y}(x)=$ $=[g_{jk}(x)]$, для яких $g_{jk}(x)$ є цілі функції степеня $\le\sigma$.

Приймемо

$$E_\sigma(F)=\inf_{\mathcal{Y}(x)\in B_\sigma}\{\|F-\mathcal{Y}\|_S\}.$$

Теорема 3. Якщо x - точка Лебега матриці $F(x)$, то за умови $E_\sigma(F)[N(2\sigma)-N(\sigma)]=O(1)$ $(\sigma\to\infty)$, де $N(\sigma)=\sum_{|\lambda_n|\le\sigma} 1$, справедлива рівність

$$\| S_\sigma(x)-F(x)\|_S = O(1) \quad (\sigma\to\infty). \qquad /4/$$

Опираючись на теорему 3, можна одержати таке твердження.

Теорема 4. Якщо послідовність $\mathcal{I}(F)$ задовольняє умову $N(2\sigma)-N(\sigma)=O(1)$, то майже всюди виконується рівність

$$\lim_{\sigma\to\infty}\| S_\sigma(x)-F(x)\|_S = 0. \qquad /5/$$

3. Умови збіжності лакунарних рядів Фур'є S^2 - майже періодичних матриць. Е.А.Бредихіна [3] узагальнила теорему А.Н.Колмогорова про збіжність лакунарних рядів Фур'є сумовних з квадратом функцій на S^2 - майже періодичні функції за деяких умов, накладених на показники Фур'є. Знайдені умови можна застосувати і для доведення збіжності лакунарних рядів Фур'є S^2 - майже періодичних матриць.

Віднесемо послідовність $\mathcal{I}(F)$ абсолютних величин показників Фур'є матриці $F(x)$ до класу $\sum_{\alpha}$, якщо існує $\alpha > 0$ таке, що

$$\mathcal{N}(\lambda+\alpha) - \mathcal{N}(\lambda) = O(1) \qquad /6/$$

рівномірно відносно λ.

Користуючись методом із праці [3], доводимо справедливість таких тверджень.

Теорема 5. Якщо $\mathcal{I}(F) \in \sum_{\alpha}$ і $\lambda_{n_{\nu+1}} / \lambda_{n_\nu} > \theta > 1$, то майже всюди виконується рівність

$$\lim_{\nu \to \infty} \| S_{\lambda_\nu}(x) - F(x) \|_{S^2} = 0. \qquad /7/$$

Теорема 6. Якщо $\mathcal{I}(F) \in \sum_{\alpha}$ і $\lambda_{n_{\nu+1}} / \lambda_{n_\nu} \geq \theta > 1$, то при умові $\sum_{s=-\infty}^{\infty} \| A_s \|^2 < \infty$ майже всюди виконується рівність

$$\lim_{\nu \to \infty} \| T_{n_\nu}(x) - F(x) \|_{S^2} = 0, \qquad /8/$$

де $T_n(x) = \sum_{s=-n}^{n} A_s e^{i\lambda_s x} \quad (n=1,2,\dots).$

Список літератури: 1. Б р е д и х и н а Е.А. О сходимости рядов Фурье почти-периодических функций Степанова. - Успехи математических наук, XIX, 6/120/, 1964, т.19, № 6/120/. 2. Б р е д и х и н а Е.А. О приближении почти-периодических функций Степанова. - ДАН СССР, 1965, 164, № 2. 3. Б р е д и х и н а Е.А. К теореме А.Н.Колмогорова о лакунарных частных суммах ряда Фурье. - Сибирский математический журнал, 1968, т.9, № 2. 4. Л і с е в и ч Л.М., К о в а л ь ч у к Б.В. Середнє значення і поняття ряду Фур'є для S^p - майже періодичних матриць. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1975, вип. 10.

Стаття надійшла в редколегію 26.03.1979 р.