УДК 517.917

Л.М.Лісевич

ДЕЯКІ ДОСТАТНІ УМОВИ ІСНУВАННЯ ОБМЕЖЕНОГО І МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОГО РОЗВ"ЯЗКУ ОДНОГО ЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Існування обмеженого і майже періодичного розв"язку рівняння

$$y'' = \varphi(x)y + \psi(x)$$

досліджено [2] при умові, коли $\varphi(X)$ – майже періодична /м.п./ функція Бора, причому така, що $0<\alpha^2<\varphi(x)<\beta^2$, а $\psi(X)$ – м.п. функція Степанова / S^p – м.п./, неозначений інтеграл якої обмежений.

Ми узагальнюємо цей результат на випадок рівняння

$$y'' = \varphi(x)y + \psi(x)y' + \omega(x). \qquad /1/$$

Теорема 1. Нехай:

1/ $\varphi(x)$ і $\psi(X)$ – неперервні на всій дійсній осі функції, причому

$$0<\alpha^2<\varphi(x)<\beta^2, \qquad /2/$$

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} |\psi(x)| < \frac{\beta^2-\alpha^2}{|\beta|}, \qquad /3/$$

$$\beta^2 < 2\alpha^2; \qquad /4/$$

2/ $\omega(X)$ – сумовна разом із своїм p -м степенем / $p\geq 1$ / функція в кожному скінченному інтервалі, неозначений інтеграл якої

$$\Omega(x) = \int_0^x \omega(t)\,dt \qquad /5/$$

обмежений.

Тоді існує розв"язок $y(X)$ рівняння /1/, для якого

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} |y(x)| \leq \frac{2|\beta| \sup_x |\Omega(x)|}{2\alpha^2-\beta^2}, \qquad /6/$$

Д о в е д е н н я . Розглянемо рівняння

$$y'' - \beta^2 y = \mu \left[f(x) y + \psi(x) y' \right] + \omega(x), \qquad /7/$$

яке при $\mu = 1$ і $f(x) = \varphi(x) - \beta^2$ переходить у рівняння /I/. Шукатимемо розв"язок рівняння /7/ у вигляді

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n y_n(x). \qquad /8/$$

Вважаючи, що ряд /8/ можна двічі почленно диференціювати, з /8/ і /7/ отримуємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \left(y_n'' - \beta^2 y_n \right) = \mu \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \left[f(x) y_n + \psi(x) y_n' \right] + \omega(x).$$

Прирівнявши тепер вирази при однакових степенях μ, одержимо нескінченну систему

$$y_0'' - \beta^2 y_0 = \omega(x), \qquad /9/$$

$$y_n'' - \beta^2 y_n = f(x) y_{n-1} + \psi(x) y_{n-1}', \qquad /9_n/$$

$(n = 1, 2, 3, \dots)$.

Не порушуючи загальності, вважатимемо, що $\beta > 0$. Тоді, як відомо, частинний розв"язок рівняння /9/ записуємо

$$y_0(x) = -\frac{1}{2\beta} \left[e^{\beta x} \int_x^{+\infty} e^{-\beta t} \omega(t) dt + e^{-\beta x} \int_{-\infty}^{x} e^{\beta t} \omega(t) dt \right].$$

Застосувавши другу теорему про середнє значення і використавши умови теореми, легко отримати

$$| y_0(x) | \leq \frac{2 \sup_x | \Omega(x) |}{\beta}, \quad (-\infty < x < +\infty). \qquad /10/$$

Аналогічно маємо

$$| y_0'(x) | \leq 2 \sup_x | \Omega(x) |. \qquad /11/$$

Частинний розв"язок рівняння $/9_n/$ записуємо

$$y_1(x) = -\frac{1}{2\beta} \left\{ e^{\beta x} \int_x^{+\infty} e^{-\beta t} \left[f(t) y_0(t) + \psi(t) y_0'(t) \right] dt + \right.$$

$$+e^{-\beta x}\int_{-\infty}^{x} e^{\beta t}[f(t)y_0(t)+\psi(t)y_0'(t)]dt. \qquad /12/$$

Оскільки

$$|f(x)| = |\varphi(x)-\beta^2| < \beta^2-\alpha^2 = \gamma, \qquad /13/$$

то на основі /3/, /10/ і /11/ одержуємо

$$|y_1(x)| \leq \frac{2\sup_x|\Omega(x)|}{\beta}\left(\frac{2\gamma}{\beta^2}\right). \qquad /14/$$

Враховуючи тепер оцінки /3/, /10/, /11/, із /12/ дістаємо оцінку

$$|y_1'(x)| \leq 2\sup_x|\Omega(x)|\left(\frac{2\gamma}{\beta^2}\right). \qquad /15/$$

Запишемо тепер частинний розв"язок рівняння /9_2/

$$y_2(x) = -\frac{1}{2\beta}\left\{e^{\beta x}\int_x^{+\infty} e^{-\beta t}[f(t)y_1(t)+\psi(t)y_1'(t)]dt + \right.$$

$$\left. + e^{-\beta x}\int_{-\infty}^{x} e^{\beta t}[f(t)y_1(t)+\psi(t)y_1'(t)]dt. \right. \qquad /16/$$

Беручи до уваги /3/, /13/, /14/, /15/, із /16/ отримуємо

$$|y_2(x)| \leq \frac{2\sup_x|\Omega(x)|}{\beta}\left(\frac{2\gamma}{\beta^2}\right)^2, \qquad /17/$$

$$|y_2'(x)| \leq 2\sup_x|\Omega(x)|\left(\frac{2\gamma}{\beta^2}\right)^2, \quad (-\infty < x < +\infty). \qquad /18/$$

Оцінюючи аналогічно розв"язок $y_k(x)$ рівняння /9_k/, маємо оцінку

$$|y_k(x)| \leq \frac{2\sup_x|\Omega(x)|}{\beta}\left(\frac{2\gamma}{\beta^2}\right)^k, \quad (k=1,2,3,\dots). \qquad /19/$$

Таким чином, ряд /8/ мажорується збіжним рядом

$$\frac{2\sup_x|\Omega(x)|}{\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2\gamma}{\beta^2}\right)^n,$$

сума якого дорівнює

$$\frac{2\beta\sup_x|\Omega(x)|}{2\alpha^2-\beta^2},$$

причому ряд /8/ рівномірно збіжний при $\mu = 1$. Отже, при $\mu = 1$

ряд /8/ є розв"язком $y(x)$ рівняння /I/ такий, що

$$\sup_x |y(x)| \le \frac{2\beta \sup_x |\Omega(x)|}{2\alpha^2-\beta^2}, \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Теорема доведена.

Теорема 2. Нехай у рівнянні /I/:

I/ $\varphi(x)$ – м.п. функція Бора, яка задовольняє умову /2/;

2/ $\psi(x)$ – м.п. функція Бора, яка задовольняє умову /3/;

3/ $\omega(x)$ – м.п. функція Степанова з обмеженим неозначеним інтегралом /5/.

Тоді існує обмежений розв"язок рівняння /I/, який є майже періодичною функцією Бора.

Д о в е д е н н я . Існування обмеженого розв"язку рівняння /I/ випливає з теореми I і цей розв"язок визначається рівномірно збіжним на всій дійсній осі рядом /8/, коли $\mu = 1$.

Щоб довести майже періодичність за Бором цього розв"язку, досить довести, що кожний член ряду /8/ є м.п. функцією Бора. Адже, як відомо, сума ряду /8/ у цьому випадку також м..п. функція Бора. За теоремою про неозначений інтеграл від S^p – м.п. функції [I] стверджуємо, що $\Omega(x)$ є м.п. функцією Бора.

Нехай $\tau = \tau(\beta\,\varepsilon)$ – майже період функції $\Omega(x)$. Тоді, скориставшись другою теоремою про середнє значення, маємо

$$|y_0(x+\tau) - y_0(x)| = \frac{1}{2\beta}\Big| e^{\beta x}\int_{-\infty}^{x} e^{-\beta t}[\omega(t+\tau)-\omega(t)]dt +$$

$$+ e^{-\beta x}\int_{-\infty}^{x} e^{\beta t}[\omega(t+\tau)-\omega(t)]dt\Big| =$$

$$= \frac{1}{2\beta}\Big|\int_{x}^{\theta_1}[\omega(t+\tau)-\omega(t)]dt + \int_{\theta_2}^{x}[\omega(t+\tau)-\omega(t)]dt\Big| = \qquad /20/$$

$$= \frac{1}{2\beta}\Big|\Big\{\int_{0}^{\theta_1+\tau} - \int_{0}^{\theta_1} + \int_{\theta_2+\tau}^{0} - \int_{\theta_2}^{0}\Big\}\omega(t)dt\Big| \le$$

$$\leq \frac{1}{2\beta}\left\{\left|\Omega(\theta_1+\tau)-\Omega(\theta_1)\right|+\left|\Omega(\theta_2+\tau)-\Omega(\theta_2)\right|\right\}<\varepsilon,$$

тобто $y_0(x)$ – м.п. функція Бора.

Аналогічно можна показати, що

$$|y_0'(x+\tau)-y_0'(x)|<\beta\varepsilon, \qquad /21/$$

тобто $y_0'(x)$ також м.п. функція Бора.

Нехай $\tau=\tau(\beta\varepsilon)$ – спільний майже період м.п. функцій Бора $\varphi(x)$ і $\psi(x)$. Тоді, прийнявши $\sup\limits_x|\Omega(x)|=A$, $(-\infty<x<+\infty)$ і враховуючи /3/, /10/, /11/, /13/, /20/, /21/, отримуємо

$$|y_1(x+\tau)-y_1(x)|\leq 2\left(\frac{A}{\beta^2}+2A+\frac{2(\beta^2-\alpha^2)}{\beta}\right)\varepsilon.$$

Отже, $y_1(x)$ – м.п. функція Бора. Зовсім аналогічно показуємо, що $y_k(x)$, $(k=2,3,\dots)$ – м.п. функція Бора.

Таким чином, ряд /8/ при $\mu=1$, як рівномірно збіжний ряд, дає майже періодичний за Бором розв"язок рівняння /1/. Теорема доведена.

Список літератури: 1. Кованько А.С., Лисевич Л.Н. О некоторых свойствах интеграла и производной от S^p – п.п. функции. Вопросы математической физики и теории функций. – Київ: Наукова думка, 1964. 2. Лісевич Л.М., Костюк Я.П. Про майже періодичність розв"язків деяких звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з S^p – майже періодичною правою частиною. – ДАН УРСР, серія А, 1971, № 1.

Стаття надійшла в редколегію 28.03.1979 р.