УДК 519.21

І.Д.Квіт, В.М.Косарчин

# РІВНІСТЬ ПАРСЕВАЛЯ ДЛЯ ВІДБИТТЯ

Нехай додатна випадкова змінна $\xi$ з функцією розподілу $\mathcal{F}(t)$ має відбиття

$$\varphi(z)=\int_0^\infty t^{z-1}\,d\mathcal{F}(t),\quad 1-\alpha<\operatorname{Re}z<1+\beta,\ (\alpha>0,\ \beta>0), \qquad /1/$$

а незалежна від $\xi$ додатна випадкова змінна $\eta$ з функцією розподілу $G(t)$ -

$$\psi(z)=\int_0^\infty t^{z-1}\,dG(t),\quad 1-A<\operatorname{Re}z<1+B,\ (A>0,\ B>0). \qquad /2/$$

Тоді випадкова змінна $\zeta=\xi\eta$ має функцію розподілу

$$H(t)=\int_0^\infty G\left(\frac{t}{x}\right)d\mathcal{F}(x)=\int_0^\infty \mathcal{F}\left(\frac{t}{y}\right)dG(y),\quad t>0, \qquad /3/$$

і відбиття

$$\omega(z)=\varphi(z)\psi(z),\quad 1-\min(\alpha,A)<\operatorname{Re}z<1+\min(\beta,B), \qquad /4/$$

причому виконується рівність

$$\int_0^\infty G\left(\frac{t}{x}\right)d\mathcal{F}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{(t+0)^{1-z}}{1-z}\,\varphi(z)\psi(z)\,dz, \qquad /5/$$

$$\max[0,1-\min(\alpha,A)]<c<1.$$

Справді, з означення функції розподілу за допомогою формули повної ймовірності дістаємо вираз /3/

$$\mathcal{P}\{\xi\eta\le t\}=\sum_x \mathcal{P}\left\{\eta\le\frac{t}{\xi}\,\Big|\,\xi=x\right\}\mathcal{P}\{\xi=x\}=\int_0^\infty G\left(\frac{t}{x}\right)d\mathcal{F}(x),\ t>0.$$

За означенням відбиття маємо

$$\omega(z)=\int_0^\infty t^{z-1}\,d_t\int_0^\infty G\left(\frac{t}{x}\right)d\mathcal{F}(x)=\int_0^\infty x^{z-1}\left\{\int_0^\infty\left(\frac{t}{x}\right)^{z-1}d_t\,G\left(\frac{t}{x}\right)\right\}d\mathcal{F}(x)=\varphi(z)\psi(z)$$

у перетині смуг /1/ і /2/. Це доводить рівність /4/. При доведенні рівності /5/ використовуємо зворотну формулу (порівн. [1]).

$$G(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{(t+0)^{1-z}}{1-z}\,\psi(z)\,dz,\quad \max(0,1-A)<c<1. \qquad /6/$$

Отже, в силуі /4/, при $\max[a_1-\min(\alpha,A)]<c<1$ виходить, що

$$\int_0^\infty G\left(\frac{t}{x}\right)d\mathcal{F}(x)=\int_0^\infty\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\left(\frac{t}{x}+0\right)^{1-z}}{1-z}\,\psi(z)\,dz\,d\mathcal{F}(x)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left\{\int_0^\infty x^{z-1}\,d\mathcal{F}(x)\right\}\frac{(t+0)^{1-z}}{1-z}\,\psi(z)\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{(t+0)^{1-z}}{1-z}\,\varphi(z)\psi(z)\,dz.$$

Лівий бік рівності /5/ представляє функцію розподілу добутку $\xi\eta$ у термінах функцій розподілу множників, правий – у термінах відбитть множників. Рівність /5/ є узагальненням відомої в теорії функцій рівності Парсеваля (порівн. [2]) на випадок існування відповідності між функціями розподілу та відбиттями додатної випадкової змінної. Відзначимо, що коли додатні випадкові змінні $\xi$ та $\eta$ мають густини $p(t)=\mathcal{F}'(t)$ і $q(t)=G'(t)$, то густину добутку $\xi\eta$ записуємо виразом

$$h(t)=\int_0^\infty q\left(\frac{t}{x}\right)p(x)\frac{dx}{x}=\int_0^\infty p\left(\frac{t}{y}\right)q(y)\frac{dy}{y},\quad t>0, \qquad /7/$$

зворотна формула набуває вигляду

$$q(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}t^{-z}\psi(z)\,dz,\quad \max(a_1-A)<c<1, \qquad /8/$$

а рівність /5/ переходить у

$$\int_0^\infty q\left(\frac{t}{x}\right)p(x)\frac{dx}{x}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}t^{-z}\varphi(z)\psi(z)\,dz,\qquad /9/$$

$$\max[a_1-\min(\alpha,A)]<c<1.$$

Формула /9/ є узагальненням рівності Парсеваля на випадок існування відповідності між густинами та відбиттями додатної випадкової змінної. Рівняння /7/, /8/ та /9/ є похідними відповідно формул /3/, /6/ та /5/.

Для ілюстрації рівності Парсеваля /5/ розглянемо такий приклад. Нехай додатна випадкова змінна $\xi$ має функцію розподілу $\mathcal{F}(t)=1-\frac{1+\ln t}{t}$, $t\geq 1$, а $\eta$ – $G(t)=1-\frac{1}{t}$, $t\geq 1$. Тоді $\xi$ має відбиття $\varphi(z)=\frac{1}{(2-z)^2}$, $\operatorname{Re} z<2$, а $\eta$ – $\psi(z)=\frac{1}{2-z}$, $\operatorname{Re} z<2$. Отже, лівий бік рівності /5/ набуває вартості

$$\int_0^\infty G\left(\frac{t}{x}\right) d\mathcal{F}(x) = \int_1^t \left(1-\frac{x}{t}\right)\frac{\ln x}{x^2}\,dx = 1 - \frac{\ln^2 t + 2\ln t + 2}{2t},\ t \geq 1,$$

а правий при $0 < c < 1$ дорівнює

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{(t+0)^{1-z}}{1-z}\varphi(z)\psi(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{(t+0)^{1-z}\,dz}{(1-z)(2-z)^3} =$$

$$= -\sum_{1,2} \operatorname{res} \frac{t^{1-z}}{(z-1)(z-2)^3} = -\lim_{z\to 1}\frac{t^{1-z}}{(z-2)^3} - \lim_{z\to 2}\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\frac{t^{1-z}}{z-1} =$$

$$= 1 - \frac{\ln^2 t + 2\ln t + 2}{2t}, \quad t \geq 1.$$

Аналогічно перевіряємо рівність /9/.

Повторно застосовуючи рівність /5/ у випадку трьох і більше незалежних додатних випадкових змінних, що мають відбиття, можемо записати відповідні рівності Парсеваля.


Список літератури: 1. Квіт І.Д. Зворотна формула для відбиття. – Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1978, вип. 13.
2. Титчмарш Е. Теория функций. – М.; Л.: Гостехиздат, 1951.



Стаття надійшла в редколегію 26.02.1979 р.



УДК 512.553



О.Л.Горбачук, О.В.Крочак


## КРУЧЕННЯ НАД ДУО-КІЛЬЦЯМИ

Опишемо кручення над дуо-кільцями. Введемо поняття півтривіального кручення й опишемо кільця, над якими всі кручення півтривіальні. Дамо необхідну і достатню умови розщеплюваності всіх кручень над дуо-кільцем.

Припустимо, що всі модулі ліві та унітарні. Через $R^m$ позначаємо категорію лівих модулів над кільцем $R$, а через $Z$ кручення в категорії $R^m$. Всі означення та факти, пов"язані з крученням, можна знайти у праці [3]. Там також показано, що між крученнями в категорії $R$ – модулів і радикальними фільтрами