вартості
$$\int_0^\infty G\left(\frac{t}{x}\right)d\mathcal{F}(x)=\int_1^t\left(1-\frac{x}{t}\right)\frac{\ln x}{x^2}dx=1-\frac{\ln^2 t+2\ln t+2}{2t},\ t\geq 1,$$
а правий при $0<c<1$ дорівнює
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{(t+0)^{1-z}}{1-z}\psi(z)\psi(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{(t+0)^{1-z}dz}{(1-z)(2-z)^3}=$$
$$=-\sum_{1,2}\operatorname{res}\frac{t^{1-z}}{(z-1)(z-2)^3}=-\lim_{z\to 1}\frac{t^{1-z}}{(z-2)^3}-\lim_{z\to 2}\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\frac{t^{1-z}}{z-1}=$$
$$=1-\frac{\ln^2 t+2\ln t+2}{2t},\quad t\geq 1.$$
Аналогічно перевіряємо рівність /9/.

Повторно застосовуючи рівність /5/ у випадку трьох і більше незалежних додатних випадкових змінних, що мають відбиття, можемо записати відповідні рівності Парсеваля.

Список літератури: 1. К в і т І.Д. Зворотна формула для відбиття. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1978, вип. 13.
2. Т и т ч м а р ш Е. Теория функций. - М.; Л.: Гостехиздат, 1951.

Стаття надійшла в редколегію 26.02.1979 р.

УДК 512.553

О.Л.Горбачук, О.В.Крочак

КРУЧЕННЯ НАД ДУО-КІЛЬЦЯМИ

Опишемо кручення над дуо-кільцями. Введемо поняття півтривіального кручення й опишемо кільця, над якими всі кручення півтривіальні. Дамо необхідну і достатню умови розщеплюваності всіх кручень над дуо-кільцем.

Припустимо, що всі модулі ліві та унітарні. Через R^m позначаємо категорію лівих модулів над кільцем R, а через τ кручення в категорії R^m. Всі означення та факти, пов"язані з крученням, можна знайти у праці [3]. Там також показано, що між крученнями в категорії R - модулів і радикальними фільтрами кільця R існує взаємоднозначна відповідність. Нагадаємо, що кручення τ називається розщеплюваним, якщо для довільного модуля A підмодуль $\tau(A)$ виділяється прямим доданком. У праці [I] показано, що при накладанні кілець /гомоморфізмі на/ радикальний фільтр переходить на радикальний фільтр.

Нехай $\varphi : R_1 \to R_2$ – накладання кілець у категорії R_1 – модулів задано кручення τ. Через $\varphi(\tau)$ позначаємо кручення, яке відповідає образу радикального фільтра кручення τ при накладанні φ. Відомо [I], що з розщеплюваності кручення τ випливає розщеплюваність кручення $\varphi(\tau)$. Нехай R прямий добуток кілець R_i. Через φ_i позначаємо природне накладання R на R_i. Якщо в категорії R^m задано кручення τ, то кручення $\tau_i = \varphi_i(\tau)$ називаємо i -проекціями кручення τ. Кручення τ вважаємо тривіальним крученням, коли $\tau(A) = A$ для всіх A або $\tau(A) = 0$ для всіх модулів A. Якщо в категорії R^m задано кручення τ, то це кручення називаємо прямою сумою кручень τ_i тоді, коли

$$R = R_1 \oplus \dots \oplus R_n,$$

$$\tau_i = \varphi_i(\tau) \quad , \text{де} \quad \varphi_i : R \to R_i .$$

Кручення τ вважаємо півтривіальним, якщо воно є прямою сумою скінченного числа тривіальних кручень.

Кільце R називаємо нерозкладним, якщо воно не розкладається в пряму суму своїх власних двосторонніх ідеалів.

Дуо-кільце – це кільце, всі ліві ідеали якого двосторонні. Нагадаємо, що кільце R досконале зліва, якщо його радикал Джекобсона $J(R)$ – Т-нільпотентний зліва і фактор-кільце $R/J(R)$ півпросте.

<u>Теорема I.</u> У категорії R – модулів всі кручення півтривіальні тоді і тільки тоді, коли кільце R є скінченною сумою матричних кілець над локальними та досконалими кільцями.

Д о в е д е н н я . Достатність. Нехай кільце R є скінченною прямою сумою матричних кілець $R = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n$, де B_i – кільце матриць порядку n_i над локальним і досконалим кільцем. Тоді $\tau = \sum_{i=1}^{n} \oplus \tau_i$, де $\tau_i = \varphi_i(\tau)$. Для доведення півтривіальності кручення τ покажемо, що кручення τ_i тривіальні. Оскільки τ_i – кручення у категорії лівих модулів над кільцем матриць з елементами з локального і досконалого кільця, то всі кручення τ_i тривіальні згідно з теоремою праці [4]. Таким чином, кручення τ півтривіальні.

Необхідність. Розкладемо кільце R у пряму суму нерозкладних кілець. Зауважимо, що в кільці R не може бути нескінченної прямої суми. Справді, якщо $R = \sum_{i=0}^{\infty} \oplus R_i$, то існує нескінченна строго спадна система ідеалів $\{B_k\}$, породжених центральними ідемпотентами. Неважко перевірити, що вони задовольняють умову леми Маранди / [3], припущення 06 /. Таким чином, якщо побудувати фільтр $\mathcal{E}$ лівих ідеалів $\{B_k\}$, то цей фільтр за лемою Маранди радикальний. Розглянемо кручення τ, яке відповідає радикальному фільтру $\mathcal{E}$. Кручення τ не буде півтривіальним, що суперечить умові теореми. Отже, кільце розкладається в пряму суму скінченного числа нерозкладних кілець $R = \sum_{i=1}^{n} \oplus R_i$, де R_i – нерозкладні.

Доведемо, що кільця R_i – матричні кільця над локальними і є досконалими кільцями. Для цього достатньо довести, що всі кручення τ_i в категорії R_i^m тривіальні [4]. Розглянемо деяке фіксоване кручення τ_{i_0}. Кручення τ будуємо так, щоб $\pi_{i_0}(\tau) = \tau_{i_0}$, де π_{i_0} – проекція. Оскільки кільце R_{i_0} нерозкладне, то τ_{i_0} теж не розкладається в пряму суму, а раз так, то τ_{i_0} – тривіальне кручення.

Теорема 2. Над дуо-кільцями всі кручення розщеплюються тоді і тільки тоді, коли вони півтривіальні.

Д о в е д е н н я . Достатність. Якщо кручення півтривіальні, то очевидно, що вони розщеплюються.

Необхідність. Нехай над дуо-кільцем всі кручення розщеплюються. Тоді, згідно з лемою 3 праці [3] кільце є прямою сумою скінченного числа нерозкладних кілець, всі кручення над якими розщеплюються. Розглянемо деяке з цих розщеплюваних кручень τ_{i_0}. Покажемо, що це кручення тривіальне. Оскільки, для дуо-кільця виконуються умови теореми I праці [2], то за цією теоремою ядро кручення $K_{\tau_{i_0}} \in \mathcal{E}$ і $R_{i_0} = \tau_{i_0}(R_{i_0}) + K_{\tau_{i_0}}$. Тому що кільце R_{i_0} нерозкладне, то або $\tau_{i_0}(R_{i_0}) = 0$, або $K_{\tau_{i_0}} = 0$. Якщо $K_{\tau_{i_0}} = 0$, то $R_{i_0} = \tau_{i_0}(R_{i_0})$. Але за припущенням теореми це неможливо. Отже, $\tau_{i_0}(R_{i_0}) = 0$. Тоді згідно з лемою 2 праці [2], умови якої наявні і для дуо-кільця, випливає, що τ_{i_0} тривіальне кручення. Таким чином, кручення τ, побудоване так, щоб $\tau_{i_0} = \pi_{i_0}(\tau)$ /π_{i_0} - проекція/ буде півтривіальним.

Теорема 3. Над дуо-кільцями всі кручення розщеплюються тоді і тільки тоді, коли це кільце досконале.

Д о в е д е н н я . Нехай над дуо-кільцем всі кручення розщеплюються, тоді за теоремою 2 вони півтривіальні. Оскільки у категорії R - модулів всі кручення півтривіальні, то дуо-кільце R є скінченною сумою матричних кілець над дуо-локальними і досконалими кільцями /теорема I/. Але дуо-кільце не розкладається в пряму суму матричних кілець. Отже, дуо-кільце розкладається в скінченну пряму суму дуо-локальних і досконалих кілець. Неважко перевірити, що дуо-кільце досконале тоді і тільки тоді, коли воно є скінченною прямою сумою дуо-локальних і досконалих кілець. Таким чином, дуо-кільце - досконале. З іншого боку, якщо дуо-кільце - досконале, тоді воно є скінченною прямою сумою дуо-локальних і досконалих кілець Розглянемо дуо-локальне і досконале кільце R_i і покажемо, що всі кручення у категорії R_i - модулів тривіальні. Властивості /в/ і /с/ теореми 2 праці [2] існують і для дуо-кілець. За цією теоремою розглядувані кручення у категорії R_i - модулів тривіальні. Тоді кручення над дуо-досконалим кільцем півтривіальні, а за теоремою 2 кручення розщеплюються.

Н а с л і д о к . Наступні умови для дуо-кільця R еквівалентні:

I. Всі кручення у категорії лівих R - модулів розщеплюються.

2. Всі кручення в категорії лівих R - модулів півтривіальні.

3. Кільце R досконале.

Список літератури: I. Г о р б а ч у к Е.Л. Радикалы в модулях над разными кольцами. - Математические исследования, I972, т.7, № I. 2. Г о р б а ч у к Е.Л. Коммутативные кольца, над которыми все кручения расщепляемы. - Математические исследования, I972, т.7, № 3. 3. М и ш и н а А.П., С к о р н я к о в Л.А. Абелевы группы и модули. - М.: Наука, I969. 4. Dlab V. On a class of perfect rings.- Can. J. Math., 1970, 22, N4.

Стаття надійшла в редколегію 25.I2.I979 р.

УДК 5I2.553

О.Л.Горбачук, Р.Б.Попович

ПРО РОЗЩЕПЛЮВАНІСТЬ J - РАДИКАЛІВ

Досліджуємо питання про розщеплюваність J - квазірадикалів та J - радикалів. Припускаємо, що кожне кільце, яке розглядаємо, асоціативне кільце з одиницею, а кожен модуль - правий та унітарний. Категорію правих модулів над кільцем позначаємо $Mod-R$. Всі означення та факти, зв"язані з радикалами, можна знайти у працях [4, 6].

Нехай J - правий ідеал кільця R . Тоді J - квазірадикалом називаємо правило t_J , яке кожному модулю $M \in Mod-R$ приводить у відповідність його підмодуль $t_J(M) = MJ$. Зауважимо, що t_J збігається з $t_{\mathcal{J}}$, де $\mathcal{J} = RJ$. Справді, $t_{\mathcal{J}}(M) = MJ = MRJ = t_J(M)$.