теоремою розглядувані кручення у категорії R_i - модулів тривіальні. Тоді кручення над дуо-досконалим кільцем півтривіальні, а за теоремою 2 кручення розщеплюються.

Н а с л і д о к . Наступні умови для дуо-кільця R еквівалентні:

1. Всі кручення у категорії лівих R - модулів розщеплюються.
2. Всі кручення в категорії лівих R - модулів півтривіальні.
3. Кільце R досконале.

Список літератури: 1. Г о р б а ч у к Е.Л. Радикалы в модулях над разными кольцами. - Математические исследования, 1972, т.7, № 1. 2. Г о р б а ч у к Е.Л. Коммутативные кольца, над которыми все кручения расщепляемы. - Математические исследования, 1972, т.7, № 3. 3. М и ш и н а А.П., С к о р н я к о в Л.А. Абелевы группы и модули. - М.: Наука, 1969. 4. Dlab V. On a class of perfect rings. - Can. J. Math., 1970, 22, N4.

Стаття надійшла в редколегію 25.12.1979 р.

УДК 512.553

О.Л.Горбачук, Р.Б.Попович

ПРО РОЗЩЕПЛЮВАНІСТЬ J - РАДИКАЛІВ

Досліджуємо питання про розщеплюваність J - квазірадикалів та J - радикалів. Припускаємо, що кожне кільце, яке розглядаємо, асоціативне кільце з одиницею, а кожен модуль - правий та унітарний. Категорію правих модулів над кільцем позначаємо $Mod-R$. Всі означення та факти, зв"язані з радикалами, можна знайти у працях [4, 6].

Нехай J - правий ідеал кільця R . Тоді J - квазірадикалом називаємо правило t_J , яке кожному модулю $M \in Mod-R$ приводить у відповідність його підмодуль $t_J(M) = MJ$. Зауважимо, що t_J збігається з $t_{\mathcal{J}}$, де $\mathcal{J} = RJ$. Справді, $t_J(M) = MJ = MRJ = t_{\mathcal{J}}(M)$.

Очевидно, що t_J задовольняє умови:

1. Для будь-якого R - гомоморфізму модулів $\varphi: M \to N$ $\varphi(t_J(M)) \subseteq t_J(N)$.
2. $t_J(M/t_J(M)) = 0$.
3. $t_J(t_J(M)) = t_J(M)$ виконується не завжди, що підтверджує приклад R - модуля R.

<u>Теорема I.</u> Над кільцем R J - квазірадикал розщеплюється тоді і тільки тоді, коли $R = RJ \oplus S$ / пряма модульна сума/.

Д о в е д е н н я . Якщо J - квазірадикал розщеплюється, то, очевидно, що $R = RJ \oplus S$ /пряма модульна сума/. Навпаки, нехай $R = RJ \oplus S$. Оскільки $S \cdot (RJ) \subseteq S \cap RJ = 0$, то $SJ = S(RJ) = 0$. Виходячи з цього, легко переконатися, що сума $M = MJ + MS$ є прямою. Теорема доведена.

Н а с л і д о к I. Над кільцем R всі J - квазірадикали розщеплюються тоді і тільки тоді, коли кожен двосторонній ідеал кільця R виділяється прямим модульним доданком.

Н а с л і д о к 2. Нехай R - комутативне кільце. Тоді над R всі J - квазірадикали розщеплюються тоді і тільки тоді, коли R - класично напівпросте.

П р и к л а д . Над кільцем $\mathbb{Z}$ цілих чисел, тобто в випадку абелевих груп, всі нетривіальні J -квазірадикали не розщеплюються.

У праці [2] кожному правому ідеалу J кільця R зіставлено радикал, який називається J -радикалом. Нагадаємо, що його радикальним класом є клас $T_J = \{M \mid M \in Mod\text{-}R,\ MJ = M\}$. Кожний J - радикал можна задати двостороннім ідеалом $\mathcal{J} = RJ$, тобто $T_J = T_{RJ}$. Справді, якщо $MJ = M$, де $M \in Mod\text{-}R$, то $M\mathcal{J} = MRJ = MJ = M$.

Л е м а I. J - квазірадикал збігається з J - радикалом тоді і тільки тоді, коли $J = J^2$

Д о в е д е н н я . Припустимо $J = J^2$. Тоді J – квазірадикал задовольняє умову 3 і є радикалом. Його радикальний клас $T = \{M / M \in Mod\text{-}R, t_J(M) = M\}$ збігається з $\mathcal{T}_J$.

Якщо J – квазірадикал збігається з J -радикалом, то він повинен задовольняти умову 3. Остання характерна для всіх $M \in Mod\text{-}R$, коли $J = J^2$. Лема доведена.

Правий ідеал J кільця R називаємо T – нільпотентним справа, якщо для будь-якої послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ елементів із J існує таке натуральне k, що $a_k a_{k-1} \ldots a_1 = 0$. Кільце R досконале справа, коли його радикал Джекобсона $J(R)$ T - нільпотентний справа, а кільце $R/J(R)$ класично півпросте. Всі означення, зв'язані з досконалим кільцем, можна знайти у праці [6].

<u>Теорема 2.</u> Нехай для кільця R виконуються наступні умови:

1/ R – досконале справа;

2/ для кожного ідемпотента e кільця R ідеал ReR виділяється прямим модульним доданком. Тоді над R всі J – радикали розщеплюються.

Д о в е д е н н я . Візьмемо довільний ідеал $\bar{J}$ кільця $R/J(R)$. Оскільки $R/J(R)$ класично півпросте, що $\bar{J} = f \cdot R/J(R)$, де f – ідемпотент кільця $R/J(R)$. Піднімаючи f до ідемпотента e кільця R, одержуємо $eR \subseteq J \subseteq eR + J(R)$.

Покажемо, що $(eR + L)$ – радикал, де $L \subseteq J(R)$, збігається з eR – радикалом. Нехай $M(eR + L) = M$. Факторизуючи попередню рівність по MeR, маємо $M / MeR\,(eR + L) = M / (MeR \cdot eR + MeRL) = M / MeRL = M / MeR$.

За лемою 1.1 праці [5] рівність $NJ = N$ при T – нільпотентному справа ідеалі J можлива лише за умови $N = 0$. Тому $M / MeR = 0$, $M = MeR$. Отже, J – радикал збігається з eR – радикалом. Тому що eR – ідемпотентний ідеал, то за лемою 1 eR – радикал збігається з eR – квазірадикалом.

За умовою 2/ ідеал ReR виділяється прямим модульним доданком, отже, за теоремою I eR – квазірадикал розщеплюється. Теорема доведена.

Лема 2. Над кільцем $R = R_1 \times \ldots \times R_n$ всі радикали розщеплюються тоді і тільки тоді, коли всі радикали розщеплюються над кожним кільцем R_i, $i = 1, \ldots, n$.

Доведення. Випливає з еквівалентності категорій $Mod\text{-}(R_1 \times \ldots \times R_n)$ і $Mod\text{-}R_1 \times \ldots \times R_n$ [6]. Лема доведена.

Теорема 3. Для комутативного кільця R наступні властивості еквівалентні:

I/ над R всі радикали розщеплюються;

2/ над R всі кручення розщеплюються;

3/ R – досконале кільце.

Доведення. I/ $\Longrightarrow$ 2/ очевидно. Імплікація 2/ $\Longrightarrow$ 3/ випливає з наслідку 2 праці [I] і того, що комутативне досконале кільце розкладається в пряму суму скінченного числа локальних кілець [6]; 3/ $\Longrightarrow$ I/ одержуємо із леми 2 та теореми 7 праці [3]. Теорема доведена.

Список літератури: I. Горбачук Е.Л. Коммутативные кольца, над которыми все кручения расщепляемы. – Математические исследования, I972, т.7, вып. 2. 2. Горбачук О.Л. Про кручення в модулях. – УМЖ, I973, т.25, № 4. 3. Горбачук О.Л., Комарницький М.Я. J – радикали та їх властивості. – УМЖ, I978, т.30, № 2. 4. Мишина А.П., Скорняков Л.А. Абелевы группы и модули. – М.: Наука, I969. 5. Renault G. Sur les anneaux A, tels que tout A-module a gauch non nul contient un sous-modul maximal – C.R. Acad. Sci. Paris, ser. A-B, 1967, 264, N14. 6. Stenström B. Rings and Modules ' Quotients. – Berlin-New-York, Springer, 1975.

Стаття надійшла в редколегію I.09.I978 р.