УДК 517.948

М.Й.Михалюк, Є.М.Парасюк

ПРО ТЕОРЕМУ ІСНУВАННЯ РОЗВ"ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ДЛЯ ЗМІННОЇ ГУСТИНИ

Як відомо, обернена задача логарифмічного потенціалу полягає в тому, щоб відшукати плоску одноэв"язну область $\mathcal{D}$, при заповненні якої речовиною з густиною $\mu(x,y)$ індукується заданий зовнішній потенціал $V_e(x,y)$.

Припустимо, що

$$V_e(x,y,\lambda) = a_0 \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + V(x,y,\lambda), \qquad /1/$$

де a_0, λ – дійсні числа, причому $a_0 > 0$; $V(x,y,\lambda)$ – задовольняє умови:

а/ неперервна по всіх аргументах x, y, λ при $x^2+y^2>0$ і $\lambda > 0$;

б/ гармонійна відносно змінних x, y при $x^2+y^2>0$ і зникає у нескінченно віддаленій точці.

Введемо допоміжну функцію $z(t)$, яка відображає конформно круг $|t|<1$ комплексної площини t на шукану область $\mathcal{D}$ площини $z = x+iy$, що містить початок координат, причому $z(0)=0$, $z'(0)>0$. Функцію $z(t)$ називаємо розв"язком оберненої задачі для зовнішнього потенціалу $V_e(x,y,\lambda)$ і густини $\mu(x,y)$.

Нехай $t = e^{i\varphi}$, $z(t) = x(\varphi)+iy(\varphi)$, $0 \le \varphi < 2\pi$.
Тоді згідно з лемами 1,2 праці [2] функція $x(\varphi) = \operatorname{Re} z(e^{i\varphi})$ дає стаціонарне значення інтегралу

$$J_0(z(e^{i\varphi}),\lambda) = \int_0^{2\pi}\{V_e(x,y,\lambda) - V_i(x,y;\mathcal{D})\}\,dy + 2\pi V_i(0,0;\mathcal{D}), \qquad /2/$$

тобто задовольняє нелінійне інтегральне рівняння

$$P(\lambda,x) = V_{ex}(x(\varphi), S(x)(\varphi), \lambda) - V_{ix}(x(\varphi), S(x)(\varphi); \mathcal{D}) - S[V_{ey} - V_{iy}](\varphi) = 0, \qquad /3/$$

де

$$V_i(x,y;D)=\iint_D \mu(\xi,\eta)\ln\frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}\,d\xi\,d\eta -$$

відповідний внутрішній логарифмічний потенціал;

$$S[V_{ey}-V_{iy}](\varphi)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[V_{ey}(x(s),S(x)(s),\lambda)-V_{iy}(x(s),y(s);D)]\times$$
$$\times\, ctg\,\frac{s-\varphi}{2}\,ds.$$

Нелінійне рівняння /3/ розглядаємо у просторі Y дійсних 2π – періодичних функцій $x=x(\varphi)$, які задовольняють умову Гельдера разом зі своїми першими похідними. Норму в цьому просторі задаємо формулою

$$\|x\|=\max_{0\le\varphi<2\pi}|x(\varphi)|+\max_{0\le\varphi<2\pi}|x'(\varphi)|+\sup_{0\le\varphi_1,\varphi_2<2\pi}\frac{|x'(\varphi_1)-x'(\varphi_2)|}{|\varphi_1-\varphi_2|^{\alpha}}, \qquad /4/$$

де α – стала Гельдера, $0<\alpha<1$. Через X позначимо піввісь $\lambda>0$.

Надалі вважаємо, що густина $\mu(x,y)$ додатна і задовольняє умову Гельдера у деякій однозв"язній області T, що містить зіркову область D_0, $(\bar{D}_0\subset T)$, яка є розв"язком оберненої задачі при $\lambda=\lambda_0$ $(\lambda_0>0)$ і таку, що відповідна їй функція $z=z_0(t)$, $z_0(0)=0$, $z_0'(0)>0$ задовольняє умову

$$Re\left\{\frac{t z_0'(t)}{z_0(t)}\right\}\ge\gamma_0>0 \text{ при } |t|\le 1 \qquad /5/$$

і є розв"язком /3/, тобто

$$P(\lambda_0,x_0)=0,\quad x_0(\varphi)=Re\,z_0(e^{i\varphi}).$$

Покажемо, спираючись на теорему про неявну функцію [1], що рівняння /3/ має розв"язок при λ достатньо близьких до λ_0 у класі зіркових областей.

Нехай

$$z_h(t)=z_0(t)e^{W(t)},\quad W(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(\varphi)\frac{e^{i\varphi}+t}{e^{i\varphi}-t}\,d\varphi, \qquad /6/$$

де $h\in Y$ і має достатньо малу норму.

Легко показати, що для всіх $h \in \mathcal{Y}$ з достатньо малою нормою, функції /6/ здійснюють однолисте відображення одиничного круга $|t|<1$ на зіркові області площини $z = x+iy$.

Враховуючи аналітичність функції $V_e(x,y,\lambda)$ по x, y при $0<x^2+y^2<\infty$, неважко переконатися, що

$$R(\lambda,h) \equiv P(\lambda, x_h(\varphi)) = V_{ex}(x_h(\varphi), S(x_h)(\varphi),\lambda) - \\ - V_{ix}(x_h(\varphi), S(x_h)(\varphi);D) - S[V_{ey}-V_{iy}](\varphi) \qquad /7/$$

є неперервним, тобто неперервнодиференційованим оператором у розумінні Фреше по h в околі точки $(\lambda_0, 0) \in X \times \mathcal{Y}$, причому $R(\lambda,h) \in \mathcal{Y}$ і $R(\lambda_0, 0)=0$.

Похідна Фреше цього оператора має вигляд

$$R'_h(\lambda,h,\ell) \equiv A(\ell)(\varphi) = \frac{d}{d\varepsilon} R(\lambda,h_\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} =$$
$$= \left\{V_{exx}(x_h(\varphi), S(x_h)(\varphi);\lambda) - V_{ixx}(x_h(\varphi), S(x_h)(\varphi);D)\right\} Re[z'_h \cdot \Phi] +$$
$$+ \left\{V_{exy}(x_h(\varphi), S(x_h)(\varphi),\lambda) - V_{ixy}(x_h(\varphi), S(x_h)(\varphi);D)\right\} Jm[z'_h \cdot \Phi] - \qquad /8/$$
$$- S\left\{[V_{eyx}-V_{iyx}]\, Re[z_h \cdot \Phi] + [V_{eyy}-V_{iyy}]\, Jm[z_h \cdot \Phi]\right\}(\varphi),$$
$$h_\varepsilon(\varphi) = h(\varphi) + \varepsilon \ell(\varphi), \quad -1 \le \varepsilon \le 1, \quad h, \ell \in \mathcal{Y}_0,$$
$$\Phi(\varphi) = \ell(\varphi) + iS[\ell](\varphi),$$
$$0 \le \varphi < 2\pi.$$

Припустимо тепер, що приріст аргумента функції

$$G(t) = [V_{ezz}(x_0(\varphi), y_0(\varphi), \lambda_0) - V_{izz}(x_0(\varphi), y_0(\varphi); D_0)], \quad t = e^{i\varphi}$$

по межі ∂D_0 області D_0 дорівнює нулю, тобто

$$\frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_{\partial D_0} = 0. \qquad /9/$$

Взявши $h \equiv 0$ і використовуючи методику дослідження крайової задачі Рімана-Гільберта, зв"язаної з оператором /8/([2], лема 3), переконуємося, що оператор /8/ при $h \equiv 0$ має обмежений обернений оператор на Y. Таким чином, наявна така теорема існування. Нехай потенціал /I/ задовольняє умовам а/, б/. Тоді за умови /9/ нелінійне інтегральне рівняння /3/ в достатньо малому околі параметра $\lambda = \lambda_0$ має розв"язок

$$x_h(\varphi,\lambda) = e^{u_0(\varphi)+h(\varphi,\lambda)} \cdot \cos[S[u_0+h](\varphi)+\varphi], \qquad /I0/$$

де $h(\varphi,\lambda) \in Y$. Кожній функції /I0/ за формулою /6/ відповідає розв"язок оберненої задачі логарифмічного потенціалу. Цей розв"язок є зірковою функцією та неперервно залежить від параметра λ.

З теореми про неявну функцію випливає, що при λ достатньо близьких до λ_0 існує єдиний розв"язок.

Список літератури: I. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. - М.: Физматгиз, 1959. 2. Михайлюк М.Й. Про локальну єдність розв"язку оберненої задачі логарифмічного потенціалу для змінної густини. - Математична фізика, 1974, вип. I6.

Стаття надійшла в редколегію 29.08.1980 р.

УДК 5I3

С.В.Дениско

МЕХАНІЗМ ДЛЯ УТВОРЕННЯ ПРЯМОЇ

Зображений на рисунку механізм має таку будову. Повзуни I, 2, 3, 4 переміщаються відповідно вздовж напрямних 5, 6, 7, 8 так, що $\overline{A_1A} = \lambda\bar{e}_1$, $\overline{A_2B} = k_2\lambda\bar{e}_2$, $\overline{A_3D} = k_3\lambda\bar{e}_3$, $\overline{A_4C} = k_4\lambda\bar{e}_4$ і A_1, A_2, A_3, A_4 - зафіксовані точки; k_2, k_3, k_4 - сталі; λ - змінна; $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, $\bar{e}_4$ - орти. Переміщення повзунів I - 4 можна здійснити за допомогою складного