

ISSN 0201-758X

ISSN 0320-6572

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

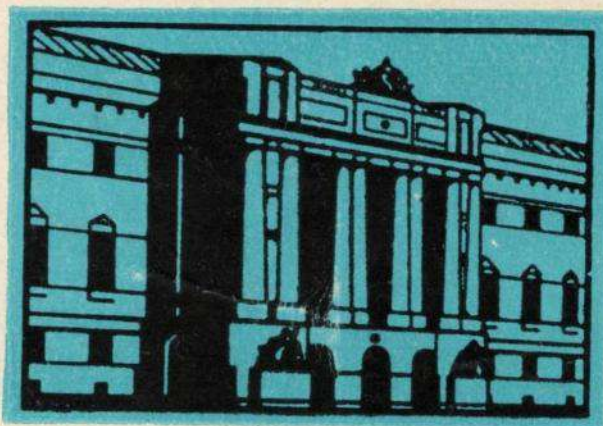
ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК

18

1981



МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК 18

ПИТАННЯ
МАТЕМАТИЧНОГО
АНАЛІЗУ
ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Виходить з 1966 р.

ЛЬВІВ
ВИДАВНИЦТВО ПРИ ЛЬВІВСЬКОМУ УНІВЕРСИТЕТІ
ВИДАВНИЧОГО ОБ'ЄДНАННЯ «ВИЩА ШКОЛА»
1981

ББК -22.16

517.2

Л 89

УДК 513

Вестн. Львов. ун-та, вып. 18. Вопросы математического анализа и его приложения. Львов: Вища школа, 1981, /на укр. яз./.

В Вестнике помещены статьи по теории функций, функционального анализа, алгебры, теории вероятностей, дифференциальных и интегральных уравнений.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

Редакційна колегія: проф., докт. фіз.-мат. наук В.Е.Лянце /відп. ред./, доц., канд. фіз.-мат. наук Є.М.Парасюк /відп. секр./, доц., канд. фіз.-мат. наук А.А.Кондратюк, доц., канд. фіз.-мат. наук В.Г.Костенко, доц., канд. фіз.-мат. наук Л.М.Лісевич, доц., канд. фіз.-мат. наук О.Л.Горбачук, доц., канд. фіз.-мат. наук А.І.Пилипюнич.

Відповідальний за випуск доц. Є.М.П а р а с ю к .

Адрес редакційної колегії: 290000, м.Львів, вул. Університетська, 1, кафедра диференціальних рівнянь.

Редакція науково-технічної та природничої літератури

В20204-008
М225/04/-81

1702050000

Замовне

© Львівський державний
університет, 1981

С.П.Лавренюк

СТІЙКІСТЬ ЗА ЛЯПУНОВИМ НУЛЬОВОГО РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ
КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНКИ

Розглянемо рівняння коливання пластинки

$$u_{xxxx} + \beta u_{xx} + u_{tt} + \alpha u_t = -f(u), \quad /1/$$

шарнірно опертої на краях

$$u(t, 0) = u(t, 1) = u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, 1) = 0,$$

в області

$$\Omega = \{(t, x) : 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1\}. \quad /2/$$

У праці [1] наведено умови існування єдиного класичного розв'язку рівняння /1/, який задовольняє умови /2/ і початкові умови

$$u|_{t=0} = \alpha(x), u_t|_{t=0} = \beta(x) \quad \text{як при фіксованому } T, \text{ так і}$$

при будь-якому $t > 0$.

Нехай $f(0) = 0$, тобто рівняння /1/ має тривіальний розв'язок $u = 0$. Мета нашої роботи - встановлення одного критерію асимптотичної стійкості в цілому нульового розв'язку задачі /1/.

/ 2 / відносно міри

$$\rho(t) = \left(\int_0^1 (u_{xx}^2 + u_x^2 - u_t^2 + u^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

О з н а ч е н н я 1. Нульовий розв'язок задачі /1/, /2/ називається стійким відносно міри $\rho(t)$, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що $\rho(t) \leq \varepsilon, t \in [0, T]$ як тільки $\rho(0) \leq \delta$.

О з н а ч е н н я 2. Нульовий розв'язок задачі /1/, /2/ асимптотично стійкий в цілому відносно міри $\rho(t)$ якщо:

1/ він стійкий для $T = \infty$;2/ всі розв'язки задачі /1/, /2/, для яких $\rho(0)$ обмежене, за-

лимаються обмеженими в міру ρ для всіх $t \geq 0 / \rho(t)$ обмежені / і прянуть до нуля при $t \rightarrow \infty$ ($\rho(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$).

Позначимо через $U(t, x)$ вектор-функцію

$$U(t, x) = (U(t, x), U_t(t, x), U_x(t, x), U_{xx}(t, x)),$$

де $U(t, x)$ - розв'язок задачі /1/, /2/.

Теорема стійкості [3] Нехай існує функціонал $W[U(t, x)] = V(t)$, диференційований по t здовж кожного розв'язку $U(t, x)$ задачі /1/, /2/, такий, що $W(0) = 0$:

а/ $W[U]$ додатно визначений, тобто існує неперервна неспадна функція ω_1 , коли $\omega_1(0) = 0$ для всіх $t \geq 0$ і $U \neq 0$.

$$0 < \omega_1(\rho(t)) \leq V(t), \quad \omega_1(\rho) \rightarrow \infty \text{ при } \rho \rightarrow \infty;$$

б/ існує неперервна функція ω_2 така, що $\omega_2(0) = 0$ і похідна $\dot{V}(t)$ здовж $U(t, x)$ задовольняє для всіх $t \geq 0$ і $U \neq 0$ нерівність

$$\dot{V}(t) \leq -\omega_2(\rho(t)) < 0;$$

в/ існує неперервна неспадна функція ω_3 така, що $\omega_3(0) = 0$ і для всіх $t \geq 0$,

$$V(t) \leq \omega_3(\rho(t)).$$

Тоді нульовий розв'язок задачі /1/, /2/ асимптотично стійкий в цілому.

Розглянемо функціонал

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 [u_{xx}^2 - \beta u_x^2 + (u_t + \alpha u)^2 + \alpha^2 u^2 + 2 \int_0^1 f(\xi) d\xi] dx.$$

Здовж розв'язків задачі /1/, /2/

$$\dot{V}(t) = -\alpha \int_0^1 [u_{xx}^2 + \beta u_x^2 + u_t^2 + u f(u)] dx.$$

Теорема. Якщо $f(0) = 0$; $zf(z) > 0$; $z \neq 0$; $\beta < \pi^2$
і $\alpha > 0$, то нульовий розв'язок задачі /1/, /2/ асимптотично
стійкий в цілому.

Доведення. Покажемо, що побудований функціонал /3/
задовольняє всі умови теореми стійкості. Перш за все

$$V(t) \geq \frac{1}{2} \int_0^1 [u_{xx}^2 - \beta u_x^2 + (u + \alpha u)^2 + \alpha^2 u^2] dx \geq \\ \geq \frac{1}{2} \int_0^1 [u_{xx}^2 - \beta u_x^2 + \frac{u^2}{2}] dx.$$

Далі, використовуючи нерівності [2]

$$\int_0^1 u_{xx}^2 dx \geq \pi^2 \int_0^1 u_x^2 dx, \quad \int_0^1 u_x^2 dx \geq \pi^2 \int_0^1 u^2 dx,$$

оправдані для розв'язків задачі /1/, - /2/, легко показати, що
при

$$\beta < \pi^2, \quad V(t) \geq K_1 \rho^2(t).$$

Аналогічно можна довести, що $\dot{V}(t) \leq -\alpha K_2 \rho^2(t)$.

Позначимо через $h(|u|)$ функцію

$$h(|u|) = \max \left\{ \int_0^1 f(\xi) d\xi, \int_0^1 \tilde{f}(\xi) d\xi \right\}.$$

Очевидно, $h(0) = 0$. Тоді $V(t) \leq K_3 \rho^2(t) + h(|u|)$.

Але для розв'язків задачі /1/, /2/ справедливі нерівності

$$|u(t, x)| \leq \int_0^1 |u_x(t, x)| dx \leq \left(\int_0^1 u_x^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \rho(t).$$

Отже

$$V(t) \leq K_3 \rho^2(t) + h(\rho) = \omega_3(\rho(t)).$$

Таким чином, всі умови теореми стійкості виконуються, що і
потрібно було довести.

Список літератури: 1. Л а в р е н к о С.П. Існування і єдиність розв'язку нелінійного рівняння коливання пластинки. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1980, вип. 16. 2. М о в ч а н А.А. О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем. - Прикладная математика и механика, 1959, т.23, вып. 3. 3. *Caughy J.K., Ellison J. Existence, Uniqueness and Stability of, Solutions of a Class of Nonlinear Partial Differential, Equations.-J. of Math. Anal. and Applic, 1975, v51.*

Стаття надійшла в редакцію 109.1978 р.

УДК 517.946

С.П.Лавренко

ІСНУВАННЯ І ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНКИ

Розглянемо рівняння коливання пластинки

$$\mathcal{L}u = u_{xxxx} + \beta u_{xx} + u_{tt} + 2\alpha u_t = f(t, x, u, u_x, u_t, u_{xx}), \quad /1/$$

шарнірно опертої на краях

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = u_{xx}|_{x=0} = u_{xx}|_{x=1} = 0, \quad /2/$$

при початкових умовах

$$u|_{t=0} = a(x), \quad u_t|_{t=0} = b(x) \quad /3/$$

в безрозмірних координатах в області

$$\Omega = \{(t, x): 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1\}.$$

Припустимо, що сталі α і β задовольняють умови $\alpha > 0$, $\beta < \pi^2$. Мета нашої роботи - дослідження умов існування і єдиності класичного розв'язку задачі /1/ - /3/ як при скінченному t , так і при довільних T .

Введемо клас функцій

$$B_0 = \{u(t, x) : u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt}, u_{xxx}, u_{txx}, u_{ttx}, u_{txxx}, u_{xxxx}, u_{xxxxx} \in C(\Omega)\}.$$

Через B позначимо поповнення простору B_0 по нормі

$$\begin{aligned} \|u\| = & |u|_m + |u_x|_m + |u_t|_m + |u_{xx}|_m + |u_{xt}|_m + |u_{tt}|_m + \\ & + |u_{xxx}|_m + |u_{txx}|_m + |u_{txxx}|_m + |u_{xttt}|_m + \\ & + |u_{txxx}|_m + |u_{xxxxx}|_m, \end{aligned}$$

де

$$|g(t, x)|_m = \max_{\Omega} |g(t, x)|; |g(t, x)|_L = \max_{Lm[t, \tau]} \left(\int_0^1 g^2(t, x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Введемо також норму u , яка залежить від t , за формулою

$$\begin{aligned} \|u\|_1 = & |u|_{m_1} + |u_x|_{m_1} + |u_t|_{m_1} + |u_{xx}|_{m_1} + |u_{xt}|_{m_1} + \\ & + |u_{tt}|_{m_1} + |u_{xxx}|_{m_1} + |u_{txx}|_{m_1} + |u_{txxx}|_{m_1} + |u_{xttt}|_{m_1} + \\ & + |u_{txxx}|_{m_1} + |u_{xxxxx}|_{m_1}, \end{aligned}$$

де

$$|g(t, x)|_{m_1} = \max_{0 \leq x \leq 1} |g(t, x)|; |g(t, x)|_L = \left(\int_0^1 g^2(t, x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Розглянемо тепер рівняння

$$\mathcal{L}u = F(t, x) \quad /4/$$

при умовах /2/, /3/. Позначимо через $\omega^2 = \min \left\{ 1, 1 - \frac{\beta}{\pi^2} \right\}$

і припустимо для спрощення викладу, що $\alpha < \pi^2 \omega$. Тоді розв'язок задачі /4/ - /3/ можна зобразити у вигляді

$$\begin{aligned} u(t, x) = & \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha t} a_n \cos \delta_n + \varphi_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{b_n + \alpha a_n}{\delta_n} \sin \delta_n t \varphi_n(x) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(t)}{\delta_n} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} F_n(\tau) \sin \delta_n(t-\tau) d\tau, \end{aligned} \quad /5/$$

$$\text{де } \varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x; \delta_n^2 = n^2 \pi^2 (n^2 \pi^2 - \beta) - \alpha^2;$$

$$a_n = \int_0^1 a(x) \varphi_n(x) dx, b_n = \int_0^1 b(x) \varphi_n(x) dx, F_n(t) = \int_0^1 F(t, x) \varphi_n(x) dx.$$

Введемо простір функцій

$$M = \{u(t, x): u \in B, u(t, 0) = u(t, 1) = u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, 1) = 0, \\ u(0, x) = a(x), u_t(0, x) = b(x)\}.$$

Запишемо лему, доведення якої можна легко одержати, виходячи з формули /5/.

Л е м а . Рівняння /4/ має розв'язок $u(t, x) \in M$, зображений формулою /5/, причому існують такі додатні сталі K_1, K_2 , які залежать від α і β , що

$$\|u\| \leq K_1 e^{-\alpha t} (|a_{xxxxxx}|_L + |b_{xxx}|_L + |F_x(0, x)|_L) + \\ + K_2 \left[\left(\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau \int_0^1 F_{xxx}^2(\tau, x) dx \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\ \left. + \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau \int_0^1 F_{tx}^2(\tau, x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \right], \quad /6/$$

$$\|u\| \leq K_1 (|a_{xxxxxx}|_L + |b_{xxx}|_L + |F_x(0, x)|_L) + \\ + K_2 \left[\left(\int_0^T d\tau \int_0^1 F_{xxx}^2(\tau, x) dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^T d\tau \int_0^1 F_{tx}^2(\tau, x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \right], \quad /7/$$

коли виконуються умови:

- 1/ $F_{xx}(t, x), F_t(t, x)$ - абсолютно неперервні по x при всіх $t \in [0, T]$; $F(t, x)$ - абсолютно неперервна по t майже при всіх $x \in [0, 1]$; $\int_0^T \int_0^1 F_{xxx}^2(t, x) dt dx, \int_0^T \int_0^1 F_{tx}^2(t, x) dt dx$;
- 2/ існують

$$3/ \quad F(t, 0) = F(t, 1) = F_{xx}(t, 0) = F_{xx}(t, 1) = 0;$$

$$4/ \quad \text{існують } \int_0^1 |a_{xxxxx}|^2 dx, \int_0^1 |b_{xxx}|^2 dx;$$

$$5/ \quad a(0) = a(1) = 0; \quad a_{xx}(0) = a_{xx}(1) = 0;$$

$$a_{xxxx}(0) = a_{xxxx}(1) = 0; \quad b(0) = b(1) = 0; \quad b_{xx}(0) = b_{xx}(1) = 0.$$

Розглянемо множину

$$M_1(h) = \{u: u \in M, \|u\| \leq h\}.$$

Вважаємо, що функція $f(t, x, u, u_x, u_t, u_{xx})$ задовольняє умову A_1 , якщо:

$$a/ \quad \text{функція } F(t, x) = f(t, x, u(t, x), u_x(t, x), u_t(t, x), u_{xx}(t, x))$$

задовольняє умову I' леми для кожної $u \in M_1$;

$$б/ \quad |F_{xxx}|_{L_m}, |F_{tx}|_{L_m} \leq \frac{1}{2} L_1 h \quad \text{для кожної } u \in M_1;$$

$$в/ \quad |F_{1,xxx} - F_{2,xxx}|_{L_m}, |F_{1,tx} - F_{2,tx}|_{L_m} \leq \frac{1}{2} L_2(h) \|u_1 - u_2\|.$$

для всіх $u_1, u_2 \in M_1$.

де

$$F_i(t, x) = f(t, x, u_i(t, x), u_{i,x}(t, x), u_{i,t}(t, x), u_{i,xx}(t, x)), \quad i=1,2.$$

З а у в а ж е н н я І. Відомо⁸, що для кожної $u(t, x) \in B$, $u_{xxxx}(t, x)$, $u_{txx}(t, x)$, $u_{xtt}(t, x)$ абсолютно неперервні по x при всіх $t \in [0, T]$. Отже, умови а/, б/, в/ можуть бути виконані.

⁸ Caughey J.K., Ellison J. Existence Uniqueness and Stability of Solutions of a Class of Nonlinear Partial Differential Equations - J. of Math. Anal. and applic, 1975, v51.

Теорема 1. Нехай η довільне число, $0 < \eta < 1$, а f, a, b задовольняють умови:

а/ функція f задовольняє умову $A1$;

$$\text{б/ } F(t, 0) = F(t, 1) = F_{xx}(t, 0) = F_{xx}(t, 1) = 0;$$

$$\text{в/ } K_1(|a_{xxxxx}|_L + |b_{xxx}|_L + |F_x(a, x)|_L) \leq K_3;$$

$$\text{г/ } a(0) = a(1) = 0; a_{xx}(0) = a_{xx}(1) = 0, a_{xxxx}(0) = a_{xxxx}(1) = 0;$$

$$b(0) = b(1) = 0; b_{xx}(0) = b_{xx}(1) = 0.$$

Тоді:

$$\text{І/ якщо } K_3 \leq \eta h, \sqrt{T} < \min \left\{ \frac{h(1-\eta)}{K_2 L_1}, \frac{1}{K_2 L_2} \right\}, \text{ то}$$

існує єдиний класичний розв'язок задачі /1/ - /3/ для всіх $t \in [0, T]$;

2/ коли $K_3 + \frac{K_2 L_1}{\alpha} \leq h, \frac{K_2 L_2}{\alpha} < 1$, то існує єдиний класичний розв'язок задачі /1/ - /3/ в M_1 при довільному $T > 0$.

Для доведення цієї теореми введемо оператор A , який діє в просторі M_1 за формулою, що дається правою частиною /5/. При умовах теореми цей оператор переводить простір M_1 в себе і є стискувачем, з чого і випливає твердження теореми.

Розглянемо тепер клас функцій

$$M_2(h, \alpha) = \{u: u \in M, \|u\|_1 \leq h e^{-\frac{\alpha}{2}t}\}.$$

У цитованій уже нами праці - показано, що M_2 - повний простір.

Функція $f(t, x, u, u_x, u_t, u_{xx})$ задовольняє умову $A2$, якщо:

$$\text{а/ функція } F(t, x) = f(t, x, u(t, x), u_x(t, x), u_t(t, x), u_{xx}(t, x))$$

задовольняє умову І/ леми для кожної $u \in M_2$;

$$\text{б/ } |F_{xxx}|_L, |F_{tx}|_L \leq \frac{1}{2} L_3 \|u\|_1^{1+\varepsilon}, \quad \forall u \in M_2;$$

$$\text{в/ } |F_{1,xxx} - F_{2,xxx}|_L, |F_{1,tx} - F_{2,tx}|_L \leq \frac{1}{2} L_4 \|u_1 - u_2\|_1, \\ \forall u_1, u_2 \in M_2.$$

Теорема 2. Нехай η довільне число, $0 < \eta < 1$, і $\varepsilon, \alpha, \beta$ задовольняють умову $A2$ та умови 2/, - 4/ теореми 1.

Якщо

$$K_3 \leq \eta h, \max \left\{ \eta + \frac{K_2 L_3 h^\varepsilon}{\varepsilon}, \frac{K_2 L_4}{\alpha} \right\} < 1,$$

то існує єдиний класичний розв'язок задачі /1/ - /3/ в M_2 при довільному $T > 0$.

З а у в а ж е н н я 2. Умова $A2$ означає, що $u \equiv 0$ є розв'язком рівняння /1/, а судова M_2 дає змогу отверджувати асимптотичну стійкість нульового розв'язку задачі /1/ - /3/.

Стаття надійшла в редакцію 1.09.1978 р.

УДК 517.946

В.М.Цимбал

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Розглянемо задачу в області $\bar{V}_T = \{-\infty < x < \infty, 0 \leq t \leq T\}$.

$$\varepsilon^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \varepsilon \left(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + d(x, t) u = f(x, t), \quad /1/$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad /2/$$

де $\varepsilon > 0$ - малий параметр; $n > 2$ - натуральне число. Випадок $n = 2$ розглянуто у праці [4].

Методом М.Й.Вішика - Л.А.Люстерніка [1] побудуємо асимптотичний до деякого порядку N розклад розв'язку задачі /1/, /2/.

Припустимо, що виконуються наступні умови:

$$1/ \quad a(x, t) \geq \theta > 0, \quad c(x, t) \geq \theta > 0, \quad d(x, t) \geq \theta > 0, \quad |b(x, t)| < c(x, t) a_0 / t$$

в $\bar{V}_T$;

$$2/ f(x,t), d(x,t) \in C^{k_0}(\bar{V}_T), a(x,t), b(x,t) \in C^{N+1}(\bar{V}_T), \\ c^2(x,t) \in C^{\max(2, N+1)}(\bar{V}_T), \varphi(x), \psi(x) \in C^{N+1}(Q')$$

похідні, які існують, обмежені в $\bar{V}_T$ і Q' .

Особливістю цієї задачі є наявність двох прилежових шарів в околі $t=0$. Аналогічна ситуація вперше проаналізована у праці [2] для менш загального рівняння, крім того там же [2] розглянута змішана задача.

Розклад розв'язку задачі /1/, /2/ шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \bar{u}_i(x,t) + \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \Pi_i(x,\tau) + \varepsilon^{n-2} \sum_{i=0}^N \varepsilon^i Q_i(x,\eta) + R_N(x,t,\varepsilon), /3/$$

де $\tau = t/\varepsilon$, $\eta = t/\varepsilon^{n-1}$ - регуляризуючі перетворення, функції $\bar{u}_i(x,t)$, $\Pi_i(x,\tau)$, $Q_i(x,\eta)$ визначаються далі; $R_N(x,t,\varepsilon)$ - залишковий член.

Регулярна частина асимптотики $\bar{u}(x,t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \bar{u}_i(x,t)$ визначається за допомогою рівнянь

$$\bar{u}_0(x,t) = \frac{f(x,t)}{d(x,t)}, \quad \bar{u}_i(x,t) = -\frac{1}{d(x,t)} \left[(a(x,t) \frac{\partial \bar{u}_{i-1}}{\partial t} + b(x,t) \frac{\partial \bar{u}_{i-1}}{\partial x}) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_{i-1}}{\partial t^2} - c^2(x,t) \frac{\partial^2 \bar{u}_{i-1}}{\partial x^2} \right) \right] \quad (i=1, \dots, N).$$

Тут і надалі для скорочення запису вважаємо, що функції з від'ємним індексом тотожно дорівнюють нулеві. Функції $\bar{u}_i(x,t)$ ($i=0, \dots, N$) визначаються рекурентно з /4/, в загальні кажучи, не задовольняють жодну з умов /2/.

$$\text{Якщо } \Pi(x,\tau,\varepsilon) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \Pi_i(x,\tau) \quad \text{і} \quad Q(x,\eta,\varepsilon) = \varepsilon^{n-2} \sum_{i=0}^N \varepsilon^i Q_i(x,\eta)$$

повинні сумісно з $\bar{u}(x,t,\varepsilon)$ задовольняти умови /2/.

Задачі для знаходження $\Pi_i(x,\tau)$ і $Q_i(x,\eta)$ визначаються згідно з стандартною процедурою [1].

$\Pi_i(x,\tau)$ і $i=0, \dots, N$ визначаються як розв'язки за-

$$\text{дачі} \quad a(x,0) \frac{\partial \Pi_i}{\partial \tau} + d(x,0) \Pi_i = \pi_i(x,\tau).$$

/5/

$$P_0(x, 0) = \psi(x) - \bar{U}_0(x, 0), P_i(x, 0) = -\bar{U}_i(x, 0) - Q_{i-n+2}(x, 0) \quad (i=1, \dots, N)$$

де $P_i(x, \tau)$ легко виписати в явному вигляді. Вони залежать від $P_j(x, \tau) \quad (j < i)$ та їхніх похідних, $P_0(x, \tau) \equiv 0$.

$Q_i(x, \eta) \quad (i=0, \dots, N)$ визначаються як розв'язки задач

$$\frac{\partial^2 Q_i}{\partial \eta^2} + a(x, 0) \frac{\partial Q_i}{\partial \eta} = \xi_i(x, \eta),$$

$$\frac{\partial Q_0(x, 0)}{\partial \eta} = -\frac{\partial P_0(x, 0)}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial Q_i(x, 0)}{\partial \eta} = -\frac{\partial P_i(x, 0)}{\partial \tau} - \frac{\partial \bar{U}_0(x, 0)}{\partial t} + \psi(x),$$

$$\frac{\partial Q_i(x, 0)}{\partial \eta} = -\frac{\partial P_i(x, 0)}{\partial \tau} - \frac{\partial \bar{U}_{i-1}(x, 0)}{\partial t} \quad (i=2, \dots, N), \quad Q_i(x, \eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0, \quad 16/$$

де $\xi_i(x, \eta)$ легко виписати в явному вигляді. Вони залежать від

$Q_j(x, \eta) \quad (j < i)$ та їхніх похідних, $\xi_0(x, \eta) \equiv 0$.

Отже, $P_i(x, \tau)$ і $Q_i(x, \eta)$ визначаються як розв'язки певних задач для звичайних диференціальних рівнянь /X/ відіграє роль параметра/. Добре видно, що після того, як знайдені всі

$\bar{U}_i(x, t) \quad i=0, \dots, N$ /з /4/. $P_i(x, \tau), Q_i(x, \eta)$

/i=0, ..., N/ дістаємо рекурентно з /5/, /6./ у порядку

$P_0(x, \tau), Q_0(x, \eta), P_1(x, \tau), Q_1(x, \eta)$ і т.д.

Методом математичної індукції доведено, що $P_i(x, \tau), Q_i(x, \eta)$ /i=0, ..., N/ - суть функції типу примежового шару [2].

Для залишкового члена $R_N(x, t, \varepsilon)$ методом інтегралів енергії [1] доведено, що в кожному характеристичному трикутнику K_T з $\bar{V}_T$ наявна оцінка

$$\|R_N(x, t, \varepsilon)\|_{L_2(K_T)} = O(\varepsilon^{N+1/2}), \quad 17/$$

що і доводить асимптотичну коректність розкладу /3/.

Результат оформлюємо у вигляді теореми.

Теорема. Нехай виконуються умови 1/, 2/, тоді розв'язок задачі 1/, 2/ допускає асимптотичне зображення 3/, де $\bar{u}_\varepsilon(x, t)$ визначається з 4/, функції прилежового шару $P_\varepsilon(x, \tau)$, $Q_\varepsilon(x, \eta)$ є розв'язками відповідно задач 5/ і 6/, а для залишкового члена $R_\varepsilon(x, t, \varepsilon)$ в $\bar{V}_T$ існує 7/.

Список літератури: 1. Б у т у з о в В.Ф. Угловой погранслои в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений. - Успехи математических наук, 1977, № 3. 2. В а ш и к М.И., Л ю б е т с к и й Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. - Успехи математических наук, 1957, № 5. 3. К у р а н т Р. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, 1964. 4. Ц и м б а л В.М. Задача Коши для гиперболического уравнения с малым параметром. - У к н.: Питання якісної теорії диференціальних рівнянь та їх застосування. Київ, 1978.

Стаття надійшла в редакцію 29.01.1979 р.

УДК 517.946

В.М.Цимбал

АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРОМ

Нехай Ω_0 - однозв'язна обмежена область $R^n (n \geq 2)$ з границею $\partial\Omega_0$ /припущення про гладкість наведемо далі/. У циліндрі $D_T: \{\Omega_0 \times [0, T]\}$ розглянемо змішану задачу для гіперболічного рівняння другого порядку з малим параметром $\varepsilon > 0$:

$$L_\varepsilon u = \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n \delta_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \delta(x,t)u = f(x,t) \quad x=(x_1, \dots, x_n), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u(x, t)|_\Gamma = 0 \quad \Gamma: \{\partial\Omega_0 \times [0, T]\}. \quad (2)$$

Методом М.Й.Вінника-Л.А.Лустерніка [1] побудуємо асимптотичний до деякого порядку $N > 0$ розклад розв'язку задачі /1/, /2/.

Припустимо, що виконуться наступні умови:

1/ для будь-якого $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R, (x, t) \in D$, існують

$$V_1 \sum_{i,j=1}^n \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \leq M_1 \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad V_2 \sum_{i,j=1}^n \xi_j^2 \leq \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \leq M_2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2$$

де $V_1, V_2; M_1, M_2$ - додатні постійні;

2/ в D існують неперервні похідні $D_x^m D_t^k b_{ij}, D_x^m D_t^k b_i, D_x^m D_t^k b, D_x^m D_t^k f$ ($m+k \leq 2(N+1) + [\frac{n+1}{2}] + 3$), $D_x^m D_t^k a_{ij}$ ($m+k \leq 2N + [\frac{n+1}{2}] + 3$), де тут і далі $D_x^m D_t^k \alpha \equiv$

$$\equiv \frac{\partial^{m+k} \alpha(x,t)}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n} \partial t^k} \quad (m = \sum_{i=1}^n m_i);$$

3/ границя $\partial \Omega_0$ така, що локально зображається у вигляді $x_i = h(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$, причому існують і неперервні похідні вигляду $D_x^{m+k} f$ ($m+k \leq 2(N+1) + [\frac{n+1}{2}] + 5$) $m \leq 2(N+1)$;

$$4/ D_x^m D_t^k f(x, 0)|_n = 0 \quad (m+k \leq 2(N+1) + [\frac{n+1}{2}] + 3, k \leq N+4 + [\frac{n+1}{2}]).$$

Зауважимо, що, з огляду на припущення 1/, рівняння /1/ - гіперболічне [4], а вироджене рівняння / $\varepsilon = 0$ / - рівномірно параболічне [5].

Розклад шукаємо у вигляді

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \bar{u}_i(x, t) + \varepsilon \sum_{i=0}^N \varepsilon^i v_i(x, \tau) + \varepsilon^{N+1} Z_N(x, \tau, \varepsilon), \quad /3/$$

де $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$ - регуляризаujące перетворення, функції $\bar{u}_i(x, t), v_i(x, \tau)$ визначаємо відповідно з першого та другого ітераційних процесів, описаних нижче; $Z_N(x, \tau, \varepsilon)$ - нев'язка.

У першому ітераційному процесі наближений розв'язок рівняння /1/ шукаємо у вигляді $\bar{u}(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \bar{u}_i(x, t)$. Підставляючи вираз

для $\bar{u}(x, t, \varepsilon)$ в /1/ і зрівнюючи члени з однаковими степенями ε , одержимо наступну систему рівнянь:

$$\frac{\partial \bar{u}_p}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 \bar{u}_p}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial \bar{u}_p}{\partial x_i} + b(x, t) \bar{u}_p = f_p'(x, t) \quad (p=0, \dots, N), \quad 1/4/$$

де $f_0'(x, t) = f(x, t)$, $f_p'(x, t) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 \bar{u}_{p-1}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \bar{u}_{p-1}}{\partial t^2} \quad (p=1, \dots, N)$.

Умови, при яких визначаються функції $\bar{u}_p(x, t)$, сформулюємо трохи далі.

У другому ітераційному процесі наближений розв'язок рівняння /1/ /однорідного/ шукаємо у вигляді $v(x, \tau, \varepsilon) = \varepsilon \sum_{i=0}^N \varepsilon^i v_i(x, \tau)$.

В однорідному рівнянні /1/ проведемо регуляризуюче перетворення $t = \varepsilon \tau$, коефіцієнти $a_{ij}(x, t)$, $b_{ij}(x, t)$, $b_i(x, t)$, $b(x, t)$ необхідно розкласти по степенях $\varepsilon \tau$. Після цього для знаходження $v_i(x, \tau)$ одержимо рівняння, зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε у виразі $L_\varepsilon v = 0$. Тоді

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial \tau^2} + \frac{\partial v_k}{\partial \tau} = \sum_{i,j=1}^n \sum_{\alpha=0}^{k-1} \frac{b_{ij}^{(\alpha)}(x, 0)}{\alpha!} \tau^\alpha \frac{\partial^2 v_{k-1-\alpha}}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0}^{k-1} \frac{b_i^{(\alpha)}(x, 0)}{\alpha!} \tau^\alpha \frac{\partial v_{k-1-\alpha}}{\partial x_i} - \sum_{\alpha=0}^{k-1} \frac{b^{(\alpha)}(x, 0)}{\alpha!} \tau^\alpha v_{k-1-\alpha} + \sum_{i,j=1}^n \sum_{\alpha=0}^{k-2} \frac{a_{ij}^{(\alpha)}(x, 0)}{\alpha!} \tau^\alpha \frac{\partial^2 v_{k-2-\alpha}}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Тут і далі приймаємо $v_i = 0 \quad i < 0$.

Очевидно, результати обчислень ітераційних процесів на кожному етапі зв'язані певними умовами. Для виявлення цього зв'язку підставимо суму $\bar{u}(x, t, \varepsilon) + v(x, \tau, \varepsilon)$ в /2/ і, зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε , одержуємо

$$\bar{u}_i(x, 0) = -v_{i-1}(x, 0) \quad (i=0, \dots, N), \quad 1/5/$$

$$\bar{u}_i(x, t) \Big|_{x \in \Gamma} = 0 \quad (i=0, \dots, N), \quad 1/7/$$

$$\frac{\partial v_i(x, 0)}{\partial \tau} = -\frac{\partial \bar{u}_i(x, 0)}{\partial t}, \quad v_i(x, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} 0 \quad (i=0, \dots, N). \quad 1/8/$$

Таким чином, функції $\bar{U}_i(x, t)$ визначаються як розв'язки змішаних задач /4/, /6/, /7/ для параболічного рівняння. $V_i(x, t)$ знаходять як розв'язки задач /5/, /8/ для звичайних диференціальних рівнянь /X - параметр/. Очевидно, якщо вести ітераційні процеси одночасно / $\bar{U}_0, V_0, \bar{U}_1$ і т.д./, то рекурентно дістаємо всі $\bar{U}_i(x, t)$ і $V_i(x, t)$. При цьому, з огляду на умови I/ - 4/, існують і єдині достатньо гладкі розв'язки задач /4/, /6/, /7/ [5]. Оскільки існує тільки один від'ємний корінь характеристичного рівняння $\lambda^2 + \lambda = 0$, і саме стільки умов випадас при переході до виродженої задачі, то виродження - регулярне [1]. Методом математичної індукції легко показати, що всі $V_i(x, t)$ ($i=0, \dots, N$) - функції типу примежового шару.

Нев'язка, або залишковий член $Z_N(x, t, \varepsilon)$, є розв'язком задачі

$$\varepsilon \left(\frac{\partial^2 Z_N}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 Z_N}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \frac{\partial Z_N}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x, t) \frac{\partial Z_N}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n \theta_i(x, t) \frac{\partial Z_N}{\partial x_i} + \theta(x, t) Z_N = F(x, t, \varepsilon), \quad /9/$$

$$Z_N(x, 0, \varepsilon) = v_N(x, 0), \quad \frac{\partial Z_N(x, 0, \varepsilon)}{\partial t} = 0, \quad Z_N|_{x \in \Gamma} = -V_N|_{x \in \Gamma}, \quad /10/$$

де $F(x, t, \varepsilon)$ - відома функція, яку легко записати. Умови I/-4/ гарантують існування класичного розв'язку задачі /9/, /10/ [4]. Методом інтегралів енергії [3] показана обмеженість $Z_N(x, t, \varepsilon)$ в нормі $L_2(\mathcal{D}_T)$. Це доводить асимптотичну коректність розкладу /3/.

Одержаний результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. При виконанні умов I/-4/ розв'язок задачі /1/, /2/ допускає асимптотичний розклад /3/, де $\bar{U}_i(x, t)$ визначаються з першого ітераційного процесу як розв'язки задач /4/, /6/, /7/.

функції прямокутного трикутника $U_i(x, t)$ - розв'язки задач /5/, /8/, залишковий член $Z_n(x, t, \varepsilon)$, обмежений у метриці $L_2(D_+)$.

З а у в а ж е н н я . Змішану задачу для дуже малого частинного випадку рівняння /1/ при $n=1$ розглянуто у праці [2].

Список літератури: 1. В и ш и к М.И., Л в о т е р и к Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. - Успехи математических наук, 1957, № 5. 2. Э й б о в Р.А. Асимптотика решения смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка с малым параметром, вырождающегося в уравнение параболического типа. - Уч. зап. Азерб. ун-та, сер. физ.-мат. наук, 1976, № 1. 3. К у р а н т Р. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, 1964. 4. Л а д н е н - с к а я О.А. - Смешанная задача для гиперболического уравнения. - М.: Физматгиз, 1953. 5. Ф р и д м а н А. Уравнения с частными производными параболического типа. - М.: Мир, 1968.

Стаття надійшла в редакцію 29.01.1979 р.

УДК 517.913

Ю.В.Херновий, В.Г.Костенко

ПРО АСИМПТОТИЧНУ ПОВЕДІНКУ РОЗВ'ЯЗКІВ
ЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ
П'ЯТОГО ПОРЯДКУ

Розглянемо задачу Коші для рівняння

$$y^{(v)} + p_1(x)y''' + (p_2(x) + r(x))y'' + p_3(x)y' + p_4(x)y = 0$$

у вигляді

$$y^{(v)} + A(x)y''' + B(x)y'' + C(x)y' + D(x)y = (A(x) - p_1(x))y''' +$$

$$+ (\frac{3}{2}A'(x) - r(x))y'' + (C(x) - p_3(x))y' + (D(x) - p_4(x))y, \quad |1|$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad y''(x_0) = y''_0, \quad y'''(x_0) = y'''_0, \quad y^{(v)}(x_0) = y^{(v)}_0, \quad |2|$$

де

$$A(x) = \tilde{q}^2(x) (\mu - 10\tilde{q}''(x)\tilde{q}(x) + 5\tilde{q}'^2(x)); \quad B(x) = \lambda\tilde{q}^3(x) + \frac{3}{2}A'(x);$$

$$C(x) = (\nu - 3\lambda\tilde{q}'(x))\tilde{q}^4(x) + 0,9A''(x) + (0,4A(x))^2; \quad /3/$$

$$D(x) = (\alpha - 2\nu\tilde{q}'(x) + 4\lambda\tilde{q}'^2(x) - 2\lambda\tilde{q}''(x)\tilde{q}(x))\tilde{q}^5(x) + 0,2A'''(x) + 0,16A'(x)A(x);$$

$\tilde{q}(x)$ - довільна неперервно диференційована функція до п'ятого порядку; $\mu, \lambda, \nu, \alpha$ - довільні сталі; $P_2(x) = \lambda\tilde{q}^3(x) \neq 0$.

Задача /1/, /2/ за допомогою праці [1] зведена до еквівалентного інтегрального рівняння Вольтерра, в результаті дослідження якого доведено таку теорему.

Теорема. Нехай функція $P_4(x)$ неперервна, $P_3(x), \Gamma(x), P_1(x)$ і $P_2(x) = \lambda\tilde{q}^3(x) \neq 0$ неперервно диференційовані відповідно один, два, три і п'ять разів на інтервалі $X_0 \leq x < \infty$. Крім того, $A(x), B(x), C(x), D(x)$ задовольняють умови /3/, $\alpha^2 + \lambda^2\nu - \mu\lambda\alpha = 0$, $\alpha - \frac{\alpha}{\lambda} = \alpha^2 > 0$, $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ - корені рівняння $\delta^3 + (\mu + \alpha^2)\delta - \lambda = 0$, причому $\delta_2\delta_3 - \frac{1}{4}\delta_1^2 = -\tilde{a}^2 < 0$. Тоді за умов

$$\tilde{q}(x) > 0, \quad \tilde{a} > 0, \quad \delta_1 > 0, \quad a > \frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x, x_0) = \infty, \quad \int_{x_0}^{\infty} b(t) dt < \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} P_i(x)\tilde{q}^2(x) = 0, \quad (i = 2, 5),$$

або

$$\tilde{q}(x) < 0, \quad \tilde{a} > 0, \quad a > \delta_1 > 0, \quad \frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a} > 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x, x_0) = -\infty, \quad \int_{x_0}^{\infty} b(t) dt < \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} P_i(x)\tilde{q}^2(x) = 0, \quad (i = 1, 3, 4, 5),$$

де

$$b(x) = 5|\tilde{q}(x)| \max[|P_1(x)|, \dots, |P_5(x)|];$$

$$P_i(x) = -P\{(6\tilde{q}''\tilde{q} + 2\tilde{q}'''\tilde{q}^2 + 2\alpha\tilde{q}'^2 + 5\alpha\tilde{q}''\tilde{q} + 3\alpha\tilde{q}' + \alpha^3)A_1 + \\ + \tilde{q}(2\tilde{q}'^2 + 2\tilde{q}''\tilde{q} + 3\alpha\tilde{q}' + \alpha^2)A_2 + \tilde{q}^2(2\tilde{q}' + \alpha)A_3 + \tilde{q}^3A_4\}W^{-1};$$

$$\mathcal{P}_2(x) = -Q \left\{ (6\ddot{q}\dot{q}^2 + 2\ddot{q}^2\dot{q}^2 - 2a\dot{q}^2 - 5a\ddot{q}\dot{q} + 3a^2\dot{q} - a^3) A_1 + \right. \\ \left. + \dot{q} (2\dot{q}^2 + 2\ddot{q}\dot{q} - 3a\dot{q} + a^2) A_2 + \dot{q}^2 (2\dot{q} - a) A_3 + \dot{q}^3 A_4 \right\} W^{-1};$$

$$\mathcal{P}_3(x) = -R \left\{ [6\ddot{q}\dot{q}^2 + 2\ddot{q}^2\dot{q}^2 + (\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})(2\dot{q}^2 + 5\ddot{q}\dot{q} + 3(\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})\dot{q} + (\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})^2)] A_1 + \right. \\ \left. + \dot{q} [2\dot{q}^2 + 2\ddot{q}\dot{q} + 3(\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})\dot{q} + (\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})^2] A_2 + \dot{q}^2 (2\dot{q} + \frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a}) A_3 + \dot{q}^3 A_4 \right\} W^{-1};$$

$$\mathcal{P}_4(x) = -S \left\{ [6\ddot{q}\dot{q}^2 + 2\ddot{q}^2\dot{q}^2 + (\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})(2\dot{q}^2 + 5\ddot{q}\dot{q} + 3(\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})\dot{q} + (\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})^2)] A_1 + \right. \\ \left. + \dot{q} [2\dot{q}^2 + 2\ddot{q}\dot{q} + 3(\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})\dot{q} + (\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})^2] A_2 + \dot{q}^2 (2\dot{q} + \frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a}) A_3 + \dot{q}^3 A_4 \right\} W^{-1};$$

$$\mathcal{P}_5(x) = -T \left\{ [6\ddot{q}\dot{q}^2 + 2\ddot{q}^2\dot{q}^2 - 2\delta_1\dot{q}^2 - 5\delta_1\ddot{q}\dot{q} + 3\delta_1^2\dot{q} - \delta_1^3] A_1 + \right. \\ \left. + \dot{q} (2\dot{q}^2 + 2\ddot{q}\dot{q} - 3\delta_1\dot{q} + \delta_1^2) A_2 + \dot{q}^2 (2\dot{q} - \delta_1) A_3 + \dot{q}^3 A_4 \right\} W^{-1};$$

$$A_1 = A(x) - \rho_1(x); \quad A_2 = \frac{3}{2} A'(x) - 3\rho_1'(x) + r(x); \quad A_3 = C(x) + 2r'(x) - \\ - \rho_1(x) - 3\rho_1''(x); \quad A_4 = C'(x) + r''(x) + \rho_1(x) - D(x) - \frac{1}{2} A''(x) - \rho_1'(x) - \rho_1'''(x);$$

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & -a & \frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a} & \frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a} & -\delta_1 \\ a^2 & a^2 & (\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})^2 & (\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})^2 & \delta_1^2 \\ a^3 & -a^3 & (\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})^3 & (\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})^3 & -\delta_1^3 \\ a^4 & a^4 & (\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})^4 & (\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})^4 & \delta_1^4 \end{vmatrix}$$

$$P = -2\tilde{a}(a - \delta_1) [\delta_1^2 a^2 + (\frac{1}{2}\delta_1^2 - \tilde{a}^2)^2] + (\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a} + a)(\tilde{a} - \frac{3}{2}\delta_1) [a^2(\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})^2 + \\ + \delta_1^2(\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})^2] + (\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a} + a)(\frac{3}{2}\delta_1 + \tilde{a}) [a^2(\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})^2 + \delta_1^2(\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})^2];$$

$$Q = -2\tilde{a}(a + \delta_1) [\delta_1^2 a^2 + (\frac{1}{2}\delta_1^2 - \tilde{a}^2)^2] + (\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a} - a)(\frac{3}{2}\delta_1 - \tilde{a}) [\delta_1^2(\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})^2 + \\ + a^2(\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})^2] + (a - \frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})(\frac{3}{2}\delta_1 + \tilde{a}) [a^2(\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})^2 + \delta_1^2(\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})^2];$$

$$R = 2a(\frac{3}{2}\delta_1 - \tilde{a}) [a^4 + \delta_1^2(\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})^2] + a^3 [\delta_1^2 + (\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})^2] (2\tilde{a} - 3\delta_1);$$

$$S = -2a(\frac{3}{2}\delta_1 + \tilde{a}) [a^4 + \delta_1^2(\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})^2] + a^3 [\delta_1^2 + (\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})^2] (2\tilde{a} + 3\delta_1);$$

$$T = 4a\tilde{a} [a^2 + (\frac{1}{2}\delta_1^2 - \tilde{a}^2)^2] - 8a^3\tilde{a}(\frac{1}{2}\delta_1^2 + \tilde{a}^2); \quad \varphi(x, x_0) = \int_{x_0}^x \tilde{q}(t) dt;$$

рівняння /1/ має фундаментальну систему розв'язків, асимптотичне зображення яких при $x \rightarrow \infty$ дають формули:

$$y_1(x, x_0) = \tilde{q}^2(x) \exp[a\varphi(x, x_0)] (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty; \quad /2/$$

$$y_2(x, x_0) = \tilde{q}^2(x) \exp[-a\varphi(x, x_0)] (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty; \quad /3/$$

$$y_3(x, x_0) = \tilde{q}^2(x) \exp[(\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})\varphi(x, x_0)] (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty; \quad /4/$$

$$y_4(x, x_0) = \tilde{q}^2(x) \exp[(\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})\varphi(x, x_0)] (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty; \quad /5/$$

$$y_5(x, x_0) = \tilde{q}^2(x) \exp[-\delta_1 \varphi(x, x_0)] (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty \quad /6/$$

За цих же умов головні частини асимптотичних формул для похідних першого та другого порядку фундаментальної системи розв'язків рівняння /1/ одержують формальним диференціюванням головних частин формул /2/ - /6/.

Те ж саме наче для похідних третього і четвертого порядку цих розв'язків за додаткових умов

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (A'(x) - P_1'(x)) \tilde{q}^3(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{5}{2} A''(x) + r'(x) - 4P_1''(x)) \tilde{q}^4(x) = 0.$$

Список літератури: 1. Жерновий Ю.Б., Костенко В.Г. Лінійні звичайні диференціальні рівняння п'ятого порядку інтегровані в замкнутій формі. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. 1979, вип. 14. 2. Костенко В.С. Интегрирование в замкнутой форме и асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. - Дифференциальные уравнения, 1974, т.10, № 10. 3. Павлюк І.А. Асимптотичні властивості розв'язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. - Київ: Вид-во Київ. ун-ту, 1970.

Стаття надійшла в редакцію 29.01.1979 р.

К.С.Костенко

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ
ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Для рівняння

$$y^{(iv)} + p_1(x)y'' + (p_2(x) + r(x))y' + p_3(x)y = 0 \quad (1)$$

встановлено таке твердження.

Теорема. Нехай у рівнянні (1) $p_3(x)$ неперервна, а $r(x)$, $p_1(x)$ і $p_2(x) = \lambda \tilde{z}^3(x) \neq 0$ неперервно диференційовані функції відносно один, два і три рази на інтервалі $x_0 \leq x < \infty$. Припустимо також, що

$$A(x) = \tilde{z}^2(x) \left(\mu - 5\tilde{z}''(x)\tilde{z}(x) + \frac{5}{2}\tilde{z}'^2(x) \right), \quad B(x) = \lambda \tilde{z}^3(x) + A'(x),$$

$$C(x) = \left(\nu - (0,3\mu)^2 - \frac{3}{2}\lambda \tilde{z}'(x) \right) \tilde{z}^4(x) + 0,3 A''(x) + (0,3 A(x))^2,$$

$\beta_0 \neq 0$ - дійсний розв'язок системи рівнянь

$$20\beta^3 - 2\mu\beta - \lambda = 0, \quad 21\beta^4 + 3\mu\beta^2 + \nu = 0,$$

результант якої дорівнює нулеві, причому $6\beta_0^2 + \mu = a^2 > 0$. Тоді

за умов

$$\beta_0 \tilde{z}(x) > 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x, x_0) = \infty, \quad \int_{x_0}^{\infty} b(t) dt < \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} p_i(x) \tilde{z}^i(x) = 0,$$

або

$$\beta_0 \tilde{z}(x) < 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x, x_0) = \infty, \quad \int_{x_0}^{\infty} b(t) dt < \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} p_i(x) \tilde{z}^i(x) = 0, \quad (i = \overline{1,3})$$

то

$$P_1(x) = 4a\beta_0 \left\{ \left[6\beta_0 \tilde{z} \tilde{z}'' + 3\beta_0 \tilde{z}'^2 - 2(4\beta_0^2 + a^2) \tilde{z}' - 4\beta_0^3 - 2a^2\beta_0 \right] (A(x) - \right. \\ \left. - p_1(x)) + 2\tilde{z} (6\beta_0 \tilde{z}' - 4\beta_0^2 - a^2) \left(\frac{A'(x) + r(x)}{2} \cdot p_1'(x) + 4\beta_0 \tilde{z}^2 (C(x) + \right. \right. \\ \left. \left. + r(x) - p_3(x) - p_1''(x)) \right) \right\} W^{-1},$$

$$P_2(x) = \alpha^2 \beta_0 \left\{ (6\beta_0^2 + 3\beta_0^2 + 24\beta_0^2 - 28\beta_0^2 - 4\alpha^2)(A(x) - P_1(x)) + \right. \\ \left. + 12\beta_0(\beta_0^2 + 2\beta_0^2) \left(\frac{A(x) + r(x)}{2} - P_1'(x) \right) + 4\beta_0^2 (C(x) + r'(x) - P_3(x) - P_1''(x)) \right\} W^{-1};$$

$$P_3(x) = \alpha \left\{ [(-24\beta_0^2 + \frac{3}{2}\alpha^2)\beta_0^2 - (12\beta_0^2 + \frac{3}{2}\alpha^2)\beta_0^2 + 2\beta_0(16\beta_0^2 + \alpha^2)\beta_0' - \beta_0^2(16\beta_0^2 + \alpha^2)] + \right. \\ \left. + (A(x) - P_1(x)) + 2\beta_0 [(-24\beta_0^2 + \frac{3}{2}\alpha^2)\beta_0^2 + \beta_0(16\beta_0^2 + \alpha^2)] \left(\frac{A(x) + r(x)}{2} - P_1'(x) \right) - \right. \\ \left. - (16\beta_0^2 + \alpha^2)\beta_0^2 (C(x) + r'(x) - P_3(x) - P_1''(x)) \right\} W^{-1};$$

$$P_4(x) = \alpha^2 \left\{ \left(\frac{3}{2}\beta_0^2 + \frac{3}{2}\beta_0^2 + 6\beta_0^2 + 9\beta_0^2 \right) (A(x) - P_1(x)) + \right. \\ \left. + 3\beta_0(\beta_0^2 + 2\beta_0^2) \left(\frac{A(x) + r(x)}{2} - P_1'(x) \right) + \beta_0^2 (C(x) + r'(x) - P_3(x) - P_1''(x)) \right\} W^{-1};$$

$$\theta(x) = 4|\beta_0(x)| \max[|P_1(x)|, |P_2(x)|, |P_3(x)|, |P_4(x)|],$$

$$\varphi(x, x_0) = \int_{x_0}^x \beta_0^{-1}(t) dt; \quad W = 4\beta_0 \alpha^3 (22\beta_0^2 + \mu),$$

рівняння /1/ має фундаментальну систему розв'язків, асимптотичне зображення яких за $x \rightarrow \infty$ дають формули

$$y_1(x, x_0) = \beta_0^{\frac{3}{2}}(x) \exp[\beta_0 \varphi(x, x_0)] (\cos \alpha \varphi(x, x_0) + o(1)), \quad x \rightarrow \infty; \quad /2/$$

$$y_2(x, x_0) = \beta_0^{\frac{3}{2}}(x) \exp[\beta_0 \varphi(x, x_0)] (\sin \alpha \varphi(x, x_0) + o(1)), \quad x \rightarrow \infty; \quad /3/$$

$$y_3(x, x_0) = \beta_0^{\frac{3}{2}}(x) \exp[\beta_0 \varphi(x, x_0)] (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty; \quad /4/$$

$$y_4(x, x_0) = \beta_0^{\frac{3}{2}}(x) \exp[-3\beta_0 \varphi(x, x_0)] (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty. \quad /5/$$

За цих же умов головні частини асимптотичних формул для перших похідних фундаментальної системи розв'язків одержуємо формальним диференціюванням головних частин рівняння /2/ - /5/.

то ж саме матиме для похідних другого і третього порядку при розв'язках за додаткових умов

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (A(x) - P_1(x)) z''(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (P_1'(x) - z(x)) z'(x) = 0.$$

Список літератури: І. Костенко Н.С. Интегрирование в замкнутой форме и асимптотическое поведение решений линейных обобщенных дифференциальных уравнений третьего порядка. - Дифференциальные уравнения, 1974, т.10, № 10. 2. Павлык І.А. Асимптотичні властивості розв'язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. - Київ: Вид-во Київ. ун-ту, 1970.

Стаття надійшла в редакцію 29.01.1979 р.

УДК 517.94

В.Г.Костенко, О.О.Веселовська
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ
ДЛЯ АНІЗОТРОПНОГО СТЕРЖНЯ

Сукупність лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку, інваріантних відносно групи перетворень в еліптичній траєкторії [1], у системі координат

$$\begin{aligned} x &= c \operatorname{ch} u \cdot \cos v, & (0 \leq u \leq \infty; 0 \leq v \leq \pi) \\ y &= c \operatorname{sh} u \cdot \sin v \end{aligned}$$

матиме вигляд

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} u} \cdot \frac{\varphi_3}{2} + \varphi_1 \right) \frac{\operatorname{ch} u}{c^2 \operatorname{sh}^5 u} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{2\varphi_2}{c^2 \operatorname{sh}^2 u} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} + \\ & + \left(\frac{\operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} u} \cdot \frac{\varphi_3}{2} - \varphi_1 \right) \frac{1}{c^2 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} - \left(\frac{\operatorname{sh}^2 u + \operatorname{ch}^2 u}{c^2 \operatorname{sh}^4 u} \varphi_1 + \right. \\ & + \frac{\operatorname{ch} u}{c^2 \operatorname{sh}^5 u} \cdot \frac{\varphi_3}{2} - \frac{1}{c \operatorname{sh} u} \cdot \varphi_5 \left. \right) \frac{\partial w}{\partial u} + \left(2 \frac{\varphi_2}{c^2 \operatorname{ch} u \cdot \operatorname{sh} u} - \right. \\ & \left. - \frac{\varphi_4}{c \operatorname{ch} u} \right) \cdot \frac{\partial w}{\partial v} + \varphi_6 w = \varphi_7, \end{aligned} \quad (1)$$

де $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_7$ - довільні функції від u .

Частинним випадком рівняння /1/ при належному виборі φ_1 ,
 ... φ_7 є рівняння для визначення функції напружень $w(u, v)$
 неоднорідного ортотропного стержня [3]:

$$\frac{chu}{csh^2u \cdot G_1} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \left(\frac{1}{csh^3u \cdot G_1} + \frac{chu}{shu \cdot G_1^2} \right) \frac{\partial w}{\partial u} + \quad /2/$$

$$+ \frac{1}{cshu \cdot G_2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = -2cshu,$$

де G_1, G_2 - неперервні функції від u .

Розглянемо загальну задачу про кручення ортотропного неоднорідного стержня в перерізі у вигляді частини еліптичного кільця K , що міститься між дугами софокусних гіпербол, яка полягає у визначенні розв'язку $w(u, v)$ /1/ рівняння /2/ у K і наступним умовам на його межі:

$$\begin{aligned} w \Big|_{\substack{u=u_0 \\ v_0 \leq v \leq v_1}} &= f_1(v), & w \Big|_{\substack{v=v_0 \\ u_0 \leq u \leq u_1}} &= \psi_1(u), \\ w \Big|_{\substack{u=u_1 \\ v_0 \leq v \leq v_1}} &= f_2(v), & w \Big|_{\substack{v=v_1 \\ u_0 \leq u \leq u_1}} &= \psi_2(u). \end{aligned} \quad /3/$$

Розв'язок задач: /2/, /3/ шукаємо у вигляді

$$w(u, v) = w_0(u) + w_1(u, v) + w_2(u, v),$$

$$\text{де } w_0(u) = \int_{v_0}^u \left(\exp \left[\int \left(\frac{1}{chu \cdot shu} + \frac{cshu \cdot G_1'}{G_1} \right) du \right] \cdot \int (-2cshu \cdot sh^2u \cdot G_1(u) \exp \left[- \int \left(\frac{1}{chu \cdot shu} + \frac{cshu \cdot G_1'}{G_1} \right) du \right] du - \right.$$

частинний розв'язок рівняння /2/: $w_i(u, v)$, $i = 1, 2$ - розв'язки рівняння

$$\frac{chu}{csh^2u \cdot G_1} \cdot \frac{\partial^2 w_i}{\partial u^2} - \left(\frac{1}{csh^3u \cdot G_1} + \frac{chu}{shu \cdot G_1^2} \right) \frac{\partial w_i}{\partial u} + \quad /4/$$

$$+ \frac{1}{cshu \cdot G_2} \cdot \frac{\partial^2 w_i}{\partial v^2} = 0,$$

які задовольняють відповідно умови:

$$\begin{aligned} \omega_1 / \left. \begin{array}{l} u = u_0, u_1 \\ v_0 \leq v \leq v_1 \end{array} \right\} &= 0, & \omega_1 / \left. \begin{array}{l} u_0 \leq u \leq u_1 \\ v = v_0 \end{array} \right\} &= \psi_1(u) - \omega_0(u), \\ \omega_1 / \left. \begin{array}{l} u_0 \leq u \leq u_1 \\ v = v_1 \end{array} \right\} &= \psi_2(u) - \omega_0(u) \end{aligned} \quad /5/$$

та

$$\omega_2 / \left. \begin{array}{l} v_0 \leq v \leq v_1 \\ u = u_0 \end{array} \right\} = f_1(v), \quad \omega_2 / \left. \begin{array}{l} u_0 \leq u \leq u_1 \\ v = v_0, v_1 \end{array} \right\} = 0, \quad \omega_2 / \left. \begin{array}{l} v_0 \leq v \leq v_1 \\ u = u_1 \end{array} \right\} = f_2(v) - \omega_0(u). \quad /6/$$

Часткові розв'язки рівняння /4/, що задовольняють нульові крайові умови із /5/, шукаємо у вигляді

$$\omega_{1e} = R_e(u) \exp[l(v - v_0)]. \quad /7/$$

Тоді R_e має бути розв'язком рівняння

$$R_e'' - \left(\frac{1}{\operatorname{sh} u \cdot \operatorname{ch} u} + \frac{1}{c \operatorname{sh} u} \cdot \frac{G_1'}{G_1} \right) R_e' + \frac{\operatorname{sh}^2 u}{c \operatorname{ch}^2 u} \cdot \frac{G_1}{G_2} \ell^2 R_e = 0, \quad /8/$$

яке відомою заміною зводимо до

$$R_e'' + I(u) R_e = 0, \quad /9/$$

де

$$\begin{aligned} I(u) &= \ell^2 \frac{\operatorname{sh}^2 u}{c \operatorname{ch}^2 u} \cdot \frac{G_1}{G_2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} - \frac{1 + c \operatorname{ch}^2 u}{2c \operatorname{sh}^2 u \cdot \operatorname{ch} u} \cdot \frac{G_1'}{G_1} - \\ &= \frac{1 - 2c \operatorname{sh} u}{4c^2 \operatorname{sh}^2 u} \cdot \frac{G_1'^2}{G_1^2} + \frac{1}{2c} \cdot \frac{G_1''}{\operatorname{sh} u \cdot G_1}. \end{aligned} \quad /10/$$

Нехай $\xi(u) = \frac{c \operatorname{ch} u \cdot \sqrt{G_2(u)}}{\operatorname{sh} u \cdot \sqrt{G_1(u)}}$, а між $G_1(u)$ і $G_2(u)$ існує залежність

$$\frac{1}{4} \rho^2 + \frac{1}{2} \rho' + \frac{1}{4} \xi'^2(u) \cdot \xi^{-2}(u) - \frac{1}{2} \xi''(u) \cdot \xi^{-2}(u) = 0, \quad /11/$$

де

$$\rho = - \frac{1}{\operatorname{sh} u \cdot \operatorname{ch} u} - \frac{1}{c \operatorname{sh} u} \cdot \frac{G_1'}{G_1}.$$

У цьому випадку для рівняння /9/ виконуються умови його інтегрування у замкнутій формі

$$I(u) = \xi(u) \left(\lambda - \frac{1}{2} \xi''(u) \cdot \xi(u) + \frac{1}{4} \xi'(u)^2 \right), \quad /12/$$

де $\xi(u)$ - довільна двічі неперервно диференційована функція; λ - довільна стала [2].

Розв'язок рівняння /9/ за умови /11/ і $\xi(u) = \frac{chu \cdot \sqrt{G_2(u)}}{\operatorname{sh} u \cdot \sqrt{G_1(u)}}$ у випадку задачі /4/, /5/ повинен перетворюватися у нуль при $u = u_0$ і $u = u_1$.

Таким чином, ми одержали задачу Штурма-Ліувільні:

$$R_e'' - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} + \frac{1 + \operatorname{ch}^2 u}{2c \operatorname{sh}^2 u \cdot \operatorname{ch} u} \cdot \frac{G_1'}{G_1} + \frac{1 - 2c \operatorname{sh} u}{4c^2 \operatorname{sh} u} \cdot \frac{G_1'^2}{G_1^2} - \frac{G_1''}{2c \operatorname{sh} u \cdot G_1} \right) R_e + \frac{c^2 \operatorname{sh}^2 u}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot \frac{G_2}{G_2} R_e = 0, \quad /13/$$

$$R_e(u_0) = 0, \quad R_e(u_1) = 0. \quad /14/$$

Згідно з загальною теорією задач на власні значення, якщо

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} + \frac{1 + \operatorname{ch}^2 u}{2c \operatorname{sh}^2 u \cdot \operatorname{ch} u} \cdot \frac{G_1'}{G_1} + \frac{1 - 2c \operatorname{sh} u}{4c^2 \operatorname{sh}^2 u} \cdot \frac{G_1'^2}{G_1^2} - \frac{G_1''}{2c \operatorname{sh} u \cdot G_1} \geq 0, \quad u_0 \leq u \leq u_1,$$

то власні функції задачі /13/, /14/ ортогональні з вагом

$$\frac{\operatorname{sh}^2 u \cdot G_1}{\operatorname{ch}^2 u \cdot G_2} \quad \text{з умови, що} \quad \int_{u_0}^{u_1} \frac{\operatorname{sh} t \cdot \sqrt{G_1(t)}}{\operatorname{ch} t \cdot \sqrt{G_2(t)}} dt = \kappa \pi,$$

знаходимо власні функції задачі /13/, /14/:

$$R_e(u) = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} u}} \cdot \sqrt{\frac{G_2(u)}{G_1(u)}} \cdot \sin \left(c \int_{u_0}^u \frac{\operatorname{sh} t \cdot \sqrt{G_1(t)}}{\operatorname{ch} t \cdot \sqrt{G_2(t)}} dt \right). \quad /15/$$

Розв'язок задачі /4/, /5/ зображається рядом Фур'є

$$\omega_1(u, v) = \sum_{\ell=1}^{\infty} R_{\ell} (A_{\ell} \operatorname{ch} \ell (v - v_0) + B_{\ell} \operatorname{sh} \ell (v - v_0)) \quad /16/$$

з коефіцієнтами

$$A_{\ell} = \frac{\int_{u_0}^{u_1} R_{\ell}(u) \cdot \frac{\operatorname{sh}^2 u \cdot G_1(u)}{\operatorname{ch}^2 u \cdot G_2(u)} \cdot (\psi_1(u) - \omega_0(u)) du}{\int_{u_0}^{u_1} R_{\ell}^2(u) \cdot \frac{\operatorname{sh}^2 u \cdot G_1(u)}{\operatorname{ch}^2 u \cdot G_2(u)} \cdot du} \quad /17/$$

$$B_{\ell} = \frac{1}{\int_{u_0}^{u_1} R_{\ell}(u) \cdot \frac{\operatorname{sh}^2 u \cdot G_1(u)}{\operatorname{ch}^2 u \cdot G_2(u)} \cdot du \cdot \operatorname{sh} \ell (v_1 - v_0)} \times \quad /18/$$

$$\times \left(\int_{u_0}^{u_1} R_{\ell}(u) \cdot \frac{\operatorname{sh}^2 u \cdot G_1(u)}{\operatorname{ch}^2 u \cdot G_2(u)} \cdot (\psi_2(u) - \omega_0(u)) du - \right. \\ \left. - \operatorname{ch} \ell (v_1 - v_0) \int_{u_0}^{u_1} R_{\ell}(u) \cdot \frac{\operatorname{sh}^2 u \cdot G_1(u)}{\operatorname{ch}^2 u \cdot G_2(u)} \cdot (\psi_1(u) - \omega_0(u)) du \right).$$

У випадку задачі /4/, /6/ часткові розв'язки /4/, що задовольняють нульові крайові умови /6/, подаються у вигляді

$$\omega_{2\ell}(u, v) = R_{\ell}(u) \exp \left[i \frac{\ell \pi (v - v_0)}{v_1 - v_0} \right]. \quad /19/$$

Тоді R_{ℓ} повинно бути розв'язком рівняння

$$R_{\ell}'' + \left(- \frac{\ell^2 \pi^2}{(v_1 - v_0)^2} \cdot \frac{\operatorname{sh}^2 u \cdot G_1}{\operatorname{ch}^2 u \cdot G_2} - \frac{3}{2 \operatorname{sh}^2 u} - \frac{1 + \operatorname{ch}^2 u}{2c \operatorname{sh}^2 u \cdot \operatorname{ch} u} \cdot \frac{G_1'}{G_1} \right. \\ \left. - \frac{1 - c \operatorname{sh} u}{4c^2 \operatorname{sh}^2 u} \cdot \frac{G_1'^2}{G_1^2} - \frac{G_1''}{2c \operatorname{sh} u \cdot G_1} \right) \cdot R_{\ell} = 0. \quad /20/$$

Якщо існує залежність /11/ між G_1 та G_2 і $\xi(u) = \frac{\operatorname{ch} u \cdot \sqrt{G_2(u)}}{\operatorname{sh} u \cdot \sqrt{G_1(u)}}$, то умова інтегрування /12/ для рівняння /20/ виконується при

$$\lambda = - \frac{\ell^2 \pi^2}{(v_1 - v_0)^2} < 0.$$

Використовуючи працю [2], знаходимо

$$R_e(u) = \sqrt{\frac{chu}{shu}} \cdot \sqrt[4]{\frac{G_2(u)}{G_1(u)}} \cdot \left(C_{1e} \operatorname{ch} \left(\frac{e\pi}{v_1-v_0} \int_{u_0}^u \frac{sh t \cdot \sqrt{G_1(t)}}{cht \sqrt{G_2(t)}} dt \right) + i2I \right. \\ \left. + C_{2e} \operatorname{sh} \left(\frac{e\pi}{v_1-v_0} \int_{u_0}^u \frac{sh t \cdot \sqrt{G_1(t)}}{cht \sqrt{G_2(t)}} dt \right) \right).$$

Розв'язок задачі /4/, /6/ зображається рядом

$$\omega_2(u, v) = \sqrt{\frac{chu}{shu}} \sqrt[4]{\frac{G_2(u)}{G_1(u)}} \cdot \sum_{e=1}^{\infty} \left(\operatorname{ch} \left(\frac{e\pi}{v_1-v_0} \int_{u_0}^u \frac{sh t \cdot \sqrt{G_1(t)}}{cht \sqrt{G_2(t)}} dt \right) \times \right. \\ \left. \times B_e \sin \frac{e\pi(v-v_0)}{v_1-v_0} + \operatorname{sh} \left(\frac{e\pi}{v_1-v_0} \int_{u_0}^u \frac{sh t \cdot \sqrt{G_1(t)}}{cht \sqrt{G_2(t)}} dt \right) D_e \sin \frac{e\pi(v-v_0)}{v_1-v_0} \right) \quad /22/$$

з коефіцієнтами

$$B_e = \frac{2 \int_{v_0}^{v_1} f_1(v) \cdot \sin \frac{e\pi(v-v_0)}{v_1-v_0} \cdot dv}{(v_1-v_0) \cdot \sqrt{\frac{chu_0}{shu_0}} \cdot \sqrt[4]{\frac{G_2(u_0)}{G_1(u_0)}}}, \quad /23/$$

$$D_e = \left(\int_{v_0}^{v_1} (f_2(v) - \omega_0(u_1)) \cdot \sin \frac{e\pi(v-v_0)}{v_1-v_0} \cdot dv - \right. \\ \left. - \operatorname{ch} \frac{e\pi^2 \kappa}{v_1-v_0} \cdot \int_{v_0}^{v_1} f_1(v) \cdot \sin \frac{e\pi(v-v_0)}{v_1-v_0} \cdot dv \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\sqrt{\frac{chu_1}{shu_1}} \cdot \sqrt[4]{\frac{G_2(u_1)}{G_1(u_1)}}}{\sqrt{\frac{chu_0}{shu_0}} \cdot \sqrt[4]{\frac{G_2(u_0)}{G_1(u_0)}}} \right) \cdot \frac{(v_1-v_0) \sqrt{\frac{chu_1}{shu_1}} \cdot \sqrt[4]{\frac{G_2(u_1)}{G_1(u_1)}}}{2sh \frac{e\pi \kappa^2}{v_1-v_0}} \quad /24/$$

У результаті розв'язок задачі /3/, /4/ набуває вигляду

$$\omega(u, v) = \omega_0(u) + \omega_1(u, v) + \omega_2(u, v), \quad /25/$$

де $\omega_0(u)$ - частковий розв'язок рівняння /3/, $\omega_1(u, v)$ і $\omega_2(u, v)$ - ряди /16/, /22/ з відповідними коефіцієнтами /17/, /18/ і /23/, /24/.

Якщо функції $\psi_1(u)$, $\psi_2(u)$ і $f_1(v)$, $f_2(v)$ неперервно диференційовані чотири рази на відрізках $u_0 \leq u \leq u_1$ і $v_0 \leq v \leq v_1$, а на їх кінцях задовольняють умови:

$$\psi_1(u_0) = \psi_2(u_0) = 0, \quad \psi_1'(u_0) = \psi_2'(u_0) = \omega_0'(u_0),$$

$$\psi_1''(u_0) = \psi_2''(u_0) = \omega_0''(u_0), \quad \psi_1(u_1) = \psi_2(u_1) = \omega_0(u_1),$$

$$\psi_1'(u_1) = \psi_2'(u_1) = \omega_0'(u_1), \quad \psi_1''(u_1) = \psi_2''(u_1) = \omega_0''(u_1);$$

$$f_1(v_0) = f_1(v_1), \quad f_1''(v_0) = f_1''(v_1), \quad f_2(v_0) = f_2(v_1) = \omega_0(u_1), \quad f_2''(v_0) = f_2''(v_1) = 0,$$

то /25/ є класичним розв'язком задачі /2/, /3/.

Список літератури: 1. К о о т е н к о В.Г., В е с е л о в - с ь к а О.О. Загальне лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних другого порядку на площині, інваріантне відносно однієї заданої групи перетворень. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1972, вип. 7. 2. К о о т е н к о К.С. Умови інтегрування у квадратурах деяких звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1972, вип. 7. 3. Л е х н и ц к и й С.Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней. - М.: Наука, 1971.

Стаття надійшла в редакцію 12.03.1979 р.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СОБРАЖЕНИЯ МЕТАГАРМОНИЙНЫХ ФУНКЦИЙ
В ОБЛАСТЯХ СІ ЩІЛИНАМИ

Розглянемо метагармонійний оператор четвертого порядку в області зі щілиною

$$A[u] = (\Delta - \kappa_1^2)(\Delta - \kappa_2^2)u, \quad \kappa_i = \text{const}, \quad i=1,2.$$

Під щілиною розуміємо розріз видовя гладкої незамкнутої поверхні $\mathcal{G}$, обмеженої гладкою кривою γ .

Теорема I. Якщо функції $u(\rho)$ і $v(\rho) \in C^4(D)$, в околі лінії γ обмежені разом із своїми похідними до другого порядку включно, а треті похідні поводять себе як $R_0^{-\alpha}$, де $0 \leq \alpha < 1$, R_0 - відстань від точки ρ до лінії γ , то має місце формула

$$\iiint_D (u A[v] - v A[u]) d\tau = \iint_S [F(u, v)] d\sigma + \iint_S [F(u_+, v_+) - F(u_-, v_-)] d\sigma,$$

$$\text{де} \quad F(u, v) = u \frac{\partial \Delta v}{\partial n} - v \frac{\partial \Delta u}{\partial n} + \Delta u \frac{\partial v}{\partial n} - \Delta v \frac{\partial u}{\partial n} - (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right);$$

S - поверхня, яка обмежує область D ; індекси „+” і „-” означають граничні значення величин при наближенні точки ρ до $\mathcal{G}$ по напрямку відповідно додатної або від'ємної нормалі.

Щоб застосувати формулу Гріна для оператора $A[u]$ [2], помістимо лінію γ в середину трубчастої поверхні T_ε , яка є обгорткою сфер радіуса ε з центрами на лінії γ , і проведемо дві поверхні $\mathcal{G}_\varepsilon^+$ та $\mathcal{G}_\varepsilon^-$, які розміщені по обидві сторони поверхні $\mathcal{G}$ на відстані ε . Через $\mathcal{G}_\varepsilon$ позначимо гладку замкнуту поверхню, що

складається із G_ε^+ , G_ε^- і частини трубчастої поверхні T_ε , яка їх з'єднує. Тоді наявна формула

$$\iiint_{D/D_\varepsilon} (u A[v] - v A[u]) d\tau = \iint_{T_\varepsilon} F(u, v) d\sigma + \iint_{G_\varepsilon} F(u, v) d\sigma \quad /2/$$

У формулі /2/ перейдемо до межі при $\varepsilon \rightarrow 0$. Покажемо, що інтеграли по трубчастій поверхні прянуть до нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для цього введемо на поверхні T_ε систему координат ρ, φ , де ρ - довжина дуги лінії φ ; φ - кут, що змінюється від 0 до 2π . Елемент поверхні T_ε дорівнюватиме $\varepsilon d\rho d\varphi$, тому інтеграл по T_ε оцінюється величиною $\varepsilon \varepsilon^{\alpha-1} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Інтеграли по G_ε^+ і G_ε^- запишемо у вигляді суми двох інтегралів по поверхні G від межових значень підінтегральних виразів, коли точка P прямує до G по напрямку додатної або від'ємної нормалі.

Формула /1/ має місце і для нескінчених областей із щільними, якщо тільки $u(\rho)$ і $v(\rho)$ регулярні на нескінченності функції.

Теорема 2. Коли $\omega(P, Q)$ - фундаментальний розв'язок рівняння $A[u] = 0$, то наявна формула

$$u(P) = \iiint_D \omega(P, Q) A[u] d\tau + \iint_{G^+} F(u(Q), \omega(P, Q)) d\sigma + \iint_{G^-} [F(u_+, \omega) - F(u_-, \omega)] d\sigma \quad /3/$$

Формула /3/ доводиться методом, застосованим у праці [2].

Теорема 3. Якщо $u(\rho)$ - метегармонічна функція, яка задовольняє умови теореми 1, крім цього,

$$u_+(Q) = u_-(Q), \quad \frac{\partial u_+}{\partial n} = \frac{\partial u_-}{\partial n},$$

то

$$u(P) = u_+(P) - \iint_G [\omega(P, Q) M_1(Q) - \frac{\partial \omega}{\partial n} M_2(Q)] d\sigma,$$

$$\text{де } u_+(P) = \iint_{G^+} F(u, \omega) d\sigma, \quad M_1(Q) = \frac{\partial \Delta u_+}{\partial n} - \frac{\partial \Delta u_-}{\partial n},$$

$$M_2(Q) = \Delta u_+ - \Delta u_-.$$

Коли ж на ϕ

$$u_+(Q) = u_-(Q), \quad \Delta u_+ = \Delta u_-,$$

то

$$u(p) = u_+(p) - \iint_{\phi} [\omega \mu_1(Q) + \mu_3(Q) (\Delta \omega - (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \omega)] d_Q \phi,$$

де

$$\mu_3(Q) = \frac{\partial u_+}{\partial n} - \frac{\partial u_-}{\partial n}.$$

За умови, що на ϕ

$$u_+(Q) = u_-(Q), \quad \frac{\partial \Delta u_+}{\partial n} = \frac{\partial \Delta u_-}{\partial n},$$

то

$$u(p) = u_+(p) + \iint_{\phi} \left[\frac{\partial \omega}{\partial n} \mu_2(Q) - \mu_3(Q) (\Delta \omega - (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \omega) \right] d_Q \phi.$$

А якщо на ϕ

$$\frac{\partial u_+}{\partial n} = \frac{\partial u_-}{\partial n}, \quad \frac{\partial \Delta u_+}{\partial n} = \frac{\partial \Delta u_-}{\partial n},$$

то

$$u(p) = u_+(p) + \iint_{\phi} \left[\frac{\partial \omega}{\partial n} \mu_2(Q) + \mu_4(Q) \frac{\partial}{\partial n} (\Delta \omega - (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \omega) \right] d_Q \phi,$$

де

$$\mu_4(Q) = u_+(Q) - u_-(Q).$$

Коли на ϕ

$$\Delta u_+ = \Delta u_-, \quad \frac{\partial \Delta u_+}{\partial n} = \frac{\partial \Delta u_-}{\partial n},$$

то

$$u(p) = u_+(p) + \iint_{\phi} \left[\mu_4(Q) \frac{\partial}{\partial n} (\Delta \omega - (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \omega) - \mu_3(Q) (\Delta \omega - (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \omega) \right] d_Q \phi.$$

Всі ці формули одержуємо з формули /3/, за умови, що $u(p)$ — метагармонійна функція. При цьому $\mu_1(Q)$ — густина метагармонійного потенціалу простого шару на краю γ розрізу ϕ може мати особливості вигляду $R_0^{-\alpha}$. Густини μ_2 , μ_3 , μ_4 залишаються обмеженими при наближенні точки Q до краю щілини.

Аналогічні формули для бігармонічних функцій отримані у праці [1].

Список літератури: І. Мартиненко М.Д., Мунтєн-
ко В.С., Шериф А. Об інтегральному представленні бігармоні-
чних функцій в областях со скелами. - ДАН БССР, т.8, № 9, 1974.
2. Шипха Я.Г. Про деякі еліптичні рівняння вищих порядків. -
Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1979, вип. 14.

Стаття надійшла в редакцію 12.03.1979 р.

УДК 517.946

Л.О.Губаль, М.І.Іванчов

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ НЕЛІНІЙНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Розглянемо застосування методу малого параметра до задачі про
визначення температурного поля у шарі при інтенсивному локальному
нагріві у випадку, коли теплофізичні характеристики залежать від
температури.

Нехай в області $\Omega = \{(x, y, z, t): -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, 0 \leq z \leq h, t > 0\}$ задано рівняння теплопровідності

$$C_v(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda(T) \operatorname{grad} T) \quad /1/$$

при таких початкових і крайових умовах:

$$T|_{t=0} = T_0, \quad /2/$$

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\tilde{q}, \quad T|_{z=h} = T_0, \quad /3/$$

де $C_v(T)$ - коефіцієнт об'ємної теплоємності; $\lambda(T)$ - коефіцієнт
теплопровідності; $T_0 = \text{const}$;

$$\tilde{q} = \begin{cases} q = \text{const}, & \text{коли } x^2 + y^2 \leq R^2, \\ 0, & \text{коли } x^2 + y^2 > R^2. \end{cases}$$

За допомогою підстановки Кірхгофа

$$v(x, y, z, t) = \int_{T_0}^{T(x, y, z, t)} \lambda(\theta) d\theta$$

задача /1/ - /3/ зводиться до:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a(v) \Delta v, \quad /4/$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z}|_{z=0} = -\tilde{q}, \quad v|_{z=h} = 0, \quad /5/$$

де

$$a(v) = \frac{\lambda(T)}{c_v(T)} \Big|_{T=T(v)}.$$

Припустимо, що

$$a(v) = a_0^{(j)} + \varepsilon a_1^{(j)} v + \varepsilon^2 a_2^{(j)} v^2 + \dots, \quad \theta_{j-1} \leq v \leq \theta_j, \quad j = (1, K). \quad /6/$$

Відповідно зображенню $a(v)$ формулою /6/ розбиваємо процес нагрівання тіла на K етапів.

На першому, коли $\theta_0 \leq v \leq \theta_1$, застосовуючи метод малого параметра, розв'язок задачі /4/, /5/ шукаємо у вигляді

$$v^{(1)} = v_0^{(1)} + \varepsilon v_1^{(1)} + \varepsilon^2 v_2^{(1)} + \dots \quad /7/$$

Функції $v_i^{(1)}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) є розв'язками відповідних задач:

$$\frac{\partial v_0^{(1)}}{\partial t} = a_0^{(1)} \Delta v_0^{(1)}, \quad v_0^{(1)}|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial v_0^{(1)}}{\partial z}|_{z=0} = -\tilde{q}, \quad v_0^{(1)}|_{z=h} = 0, \quad /8_0/$$

$$\frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial t} = a_0^{(1)} \Delta v_1^{(1)} + a_1^{(1)} v_0^{(1)} \Delta v_0^{(1)}, \quad v_1^{(1)}|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial z}|_{z=0} = 0, \quad v_1^{(1)}|_{z=h} = 0, \quad /8_1/$$

$$\frac{\partial v_2^{(1)}}{\partial t} = a_0^{(1)} \Delta v_2^{(1)} + a_1^{(1)} (v_0^{(1)} \Delta v_1^{(1)} + v_1^{(1)} \Delta v_0^{(1)}) + a_2^{(1)} v_0^{(1)} \Delta v_0^{(1)}, \quad /8_2/$$

$$v_2^{(1)}|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial v_2^{(1)}}{\partial z}|_{z=0} = 0, \quad v_2^{(1)}|_{z=h} = 0.$$

Для знаходження функцій $v_i^{(1)}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) використаємо функцію Гріна *

* Б е л я е в Н.М., Р я д н о А.А. Методы нестационарной теплопроводности. - М.: Высшая школа, 1978.

$$G(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi a_0^{(1)}}(t-\tau))^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \times \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta+2nh)^2}{4a_0^{(1)}(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta+2nh)^2}{4a_0^{(1)}(t-\tau)}} \right)$$

і відомі зображення розв'язків задач /8./ за допомогою цієї ж функції.

Переходячи у /8./ до циліндричної системи координат і виконуючи елементарні перетворення, одержуємо

$$u_0^{(1)}(z, z, t) = \frac{q}{2\sqrt{\pi a_0^{(1)}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \int_0^t \int_0^z \tau^{-\frac{1}{2}} J_0\left(\frac{z\rho}{2a_0^{(1)}\tau}\right) e^{-\frac{\rho^2 + z^2 + (z+2nh)^2}{4a_0^{(1)}\tau}} \rho d\rho d\tau,$$

$$u_1^{(1)}(z, z, t) = \frac{a_1^{(1)}}{4a_0^{(1)}\sqrt{\pi a_0^{(1)}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \int_0^t \int_0^z \int_0^\infty \rho u_0^{(1)}(\rho, \zeta, \tau) \Delta u_0^{(1)}(\rho, \zeta, \tau) \times (t-\tau)^{-\frac{3}{2}} J_0\left(\frac{z\rho}{2a_0^{(1)}(t-\tau)}\right) \left(e^{-\frac{\rho^2 + z^2 + (z-\zeta+2nh)^2}{4a_0^{(1)}(t-\tau)}} + e^{-\frac{\rho^2 + z^2 + (z+\zeta+2nh)^2}{4a_0^{(1)}(t-\tau)}} \right) d\rho, \quad /9/$$

де $J_0(z)$ - функція Бесселя уявного аргументу.

Аналогічні формули мають місце для інших функцій $u_i^{(1)}$ ($i=2,3,\dots$).

До другого етапу переходимо у момент часу t_1 , коли в центрі круга нагрівання $U=0$. Починаючи з моменту t_1 , значення U у точках тіла, де $U \leq 0$, визначаються за формулами /7/, /9/. В інших точках розрахунок ведуть за формулами, виведеними нижче.

Враховуючи значення U у момент, t_1 , яке дорівнює $u^{(1)}(z, z, t_1)$, для знаходження $u^{(2)}$ одержуємо задачу

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} = (a_0^{(2)} + \varepsilon a_1^{(2)} u_1^{(2)} + \dots) \Delta u^{(2)}, \quad /10/$$

$$u^{(2)}|_{t=t_1} = u^{(1)}|_{t=t_1}, \quad \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z}|_{z=0} = -\tilde{q}, \quad u^{(2)}|_{z=h} = 0.$$

Застосовуючи, як і вище, метод малого параметра до розв'язування

задачі /IO/, дістаємо

$$v_0^{(1)} = \frac{q}{2\sqrt{\pi a_0^{(1)}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \int_{t_1}^t \int_0^R (t-\tau)^{-\frac{3}{2}} J_0\left(\frac{z\rho}{2a_0^{(1)}(t-\tau)}\right) e^{-\frac{\rho^2+z^2+(z+2nh)^2}{4a_0^{(1)}(t-\tau)}} \rho d\rho +$$

$$+ \frac{1}{4a_0^{(1)}\sqrt{\pi a_0^{(1)}}(t-t_1)^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \int_0^h \int_0^{\infty} v''(\rho, \xi, t_1) J_0\left(\frac{z\rho}{2a_0^{(1)}(t-t_1)}\right) \times$$

$$\times \left(e^{-\frac{\rho^2+z^2+(z-\xi+2nh)^2}{4a_0^{(1)}(t-t_1)}} + e^{-\frac{\rho^2+z^2+(z+\xi+2nh)^2}{4a_0^{(1)}(t-t_1)}} \right) \rho d\rho,$$

/II/

$$v_1^{(2)} = \frac{a_0^{(1)}}{4a_0^{(2)}\sqrt{\pi a_0^{(2)}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \int_{t_1}^t \int_0^h \int_0^{\infty} v_0^{(2)}(\rho, \xi, \tau) \times$$

$$\times \Delta v_0^{(2)}(\rho, \xi, \tau) J_0\left(\frac{z\rho}{2a_0^{(2)}(t-\tau)}\right) \left(e^{-\frac{\rho^2+z^2+(z-\xi+2nh)^2}{4a_0^{(2)}(t-\tau)}} + \right.$$

$$\left. + e^{-\frac{\rho^2+z^2+(z+\xi+2nh)^2}{4a_0^{(2)}(t-\tau)}} \right) \rho d\rho.$$

На наступних етапах обчислення виконують за формулами, аналогічними формулам /II/ з відповідною заміною $v^{(1)}$ на $v^{(2)}$, $v^{(2)}$ на $v^{(3)}$, t_1 на t_2 , $a_0^{(1)}$ на $a_0^{(2)}$, $a_0^{(2)}$ на $a_0^{(3)}$ і т.д.

За цією методикою розв'язано задачу про визначення температури T в плиті товщиною $h = 0,004$ м при нагріванні її тепловим потоком густини $q = 22,5 \cdot 10^6 \frac{\text{ккал}}{\text{м}^2 \cdot \text{год}}$, який зосереджено на поверхні $z=0$ в крузі радіуса $R = 0,002$ м. Знайдено нульове наближення температури, коли $\varepsilon=0$ і

$$a(v) = \begin{cases} 0,03, & \text{якщо } 0 \leq v \leq 22000, \\ 0,014, & \text{якщо } 22000 < v \leq 25000, \\ 0,021, & \text{якщо } 25000 < v \leq 40000. \end{cases}$$

Нижче для порівняння наведені результати, одержані даною методикою $T_1(z, z, t)$ і методом сіток $T_2(z, z, t)$ при $t = 2$ с, $z = 0$ і $z = 0,0005$ м:

z	$T_1(0, z)$	$T_2(0, z)$	$T_1(0,5 \cdot 10^{-3}; z)$	$T_2(0,5 \cdot 10^{-3}; z)$
0	1318	1366	1290	1343
$0,5 \cdot 10^{-3}$	924	974	903	950
$0,01 \cdot 10^{-2}$	635	664	617	649
$0,15 \cdot 10^{-2}$	466	486	454	477
$0,2 \cdot 10^{-2}$	351	367	347	362
$0,25 \cdot 10^{-2}$	268	279	264	275
$0,3 \cdot 10^{-2}$	203	210	201	208
$0,35 \cdot 10^{-2}$	149	152	147	150

Як видно з наведених результатів, максимальне розходження між ними не перевищує 5%.

Стаття надійшла в редколегію 11.04.1979 р.

УДК 517.946

Л.С.Параски, Є.М.Параски

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ
З ПАРАМЕТРОМ, ЩО ВИРОДЖУЄТЬСЯ НА МЕЖІ $X_n = 0$.

Розглянемо задачу Коші для гіперболічного рівняння з параметром

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - x_n^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + \lambda x_n^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial x_n} - a^2 u = 0, \quad n \geq 2, \quad (1)$$

що вироджується на гіперплощині $X_n = 0$, з такими початковими

умовами:

$$U(x', 0) = 0, \quad /2/$$

$$x_n^{-\lambda} \frac{\partial U(x', x_n)}{\partial x_n} \bigg|_{x_n=0} = f(x'), \quad /3/$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$.

Розв'язок задачі /1/ - /3/ шукаємо у вигляді $n-1$ - мірного перетворення Фур'є

$$U(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{U}(\alpha', x_n) e^{i(x', \alpha')} d\alpha', \quad /4/$$

де $(x', \alpha') = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_{n-1} \alpha_{n-1}$.

Для трансформанти $\bar{U}(\alpha', x_n)$ одержуємо таку задачу:

$$x_n^\lambda \frac{d^2 \bar{U}}{dx_n^2} - \lambda x_n^{\lambda-1} \frac{d \bar{U}}{dx_n} + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2 + \alpha^2 \right) \bar{U} = 0, \quad /5/$$

$$\bar{U}(\alpha', 0) = 0, \quad /6/$$

$$x_n^{-\lambda} \frac{d \bar{U}(\alpha', x_n)}{dx_n} \bigg|_{x_n=0} = \tilde{f}(\alpha'), \quad /7/$$

$$\text{де } \tilde{f}(\alpha') = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y') e^{-i(y', \alpha')} dy'. \quad /8/$$

Загальний розв'язок рівняння /5/ можна записати у вигляді

$$\bar{U}(\alpha', x_n) = x_n^{\frac{1-\lambda}{2}} [c_1 J_\nu(z) + c_2 Y_\nu(z)], \quad /9/$$

де $J_\nu(z)$ і $Y_\nu(z)$ - циліндричні функції відповідно першого і

другого роду з показником $\nu = \frac{1-\alpha}{2-\alpha}$ дійсного аргументу

$$z = \frac{2 \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2 + a^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{2-\alpha} x_n^{\frac{2-\alpha}{2}} ; \quad /10/$$

C_1 і C_2 - довільні сталі.

Для визначення сталих C_1 і C_2 із початкових умов /6/, /7/ використовуємо асимптотику циліндричних функцій [1] при

$$\lambda < 1, \quad 1 + \lambda < \alpha < 2. \quad /11/$$

Дістаємо

$$C_1 = \frac{\mathcal{I}(\nu) (2-\alpha)^{\nu-1}}{\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2 + a^2 \right)^{\frac{\nu}{2}}} \tilde{f}(\alpha'), \quad /12/$$

$$C_2 = 0. \quad /13/$$

Тоді

$$U(\alpha', x_n) = \frac{\mathcal{I}(\nu) (2-\alpha)^{\nu-1} x_n^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2 + a^2 \right)^{\frac{\nu}{2}}} J_\nu(z) \int_{-\infty}^{+\infty} f(y') e^{-i(y', \alpha')} dy'. \quad /14/$$

Підставивши /14/ у /4/ і змінивши порядок інтегрування, що можливо у нашому випадку, одержимо розв'язок задачі /1/ - /3/ у вигляді

$$U(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x'-y', x_n) f(y') dy', \quad /15/$$

де

$$\omega(x'-y', x_n) = \frac{\mathcal{I}(\nu) (2-\alpha)^{\nu-1} x_n^{\frac{1-\alpha}{2}}}{(2\pi)^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_\nu(z) e^{i(x'-y', \alpha')}}{\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2 + a^2 \right)^{\frac{\nu}{2}}} d\alpha'. \quad /16/$$

Вираз /16/ можна значно спростити. Зробивши перетворення [3], а також використавши відоме співвідношення

$$\int_0^\pi \sin^{\pi-3} \varphi \cdot e^{i z \cos \varphi} d\varphi = \frac{2 \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{n-2}{2})}{(\rho z)^{\mu}} J_{\mu}(\rho z),$$

одержимо

$$\omega(\eta', x_n) = \frac{\Gamma(\nu)(2-\alpha) \cdot x_n^{\nu-1} \frac{1-\alpha}{2}}{(2\pi)^{\mu+1} \rho^{\mu}} \int_0^{+\infty} \frac{J_{\nu}(\frac{2x_n}{2-\alpha} \sqrt{z^2+a^2})}{(z^2+a^2)^{\nu/2}} J_{\mu}(\rho z) z^{\mu+1} dz, \quad /17/$$

$$\text{де } z = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \rho = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \eta_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \eta' = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}), \quad \mu = \frac{n-3}{2}.$$

Інтеграл /17/ є інтегралом типу Соніна-Гегенбауера, що, як відомо, збіжний при додатних x_n і ρ , а також при $\nu > \mu > -1$, що забезпечується умовами /II/.

Проінтегрувавши /17/, запишемо

$$\omega(x'-y', x_n) = \begin{cases} 0, & 0 < x_n < \frac{2-\alpha}{2} |x'-y'|^{\frac{2-\alpha}{2}}, \\ \frac{\Gamma(\nu)(2-\alpha) \cdot R^{\frac{\nu-1}{2}}}{2^{\nu+\mu+1} \pi^{\mu+1} a^{\nu-\mu-1}} J_{\mu+\nu-1}(a\sqrt{R}), & x_n > \frac{2-\alpha}{2} |x'-y'|^{\frac{2-\alpha}{2}}, \end{cases} \quad /18/$$

де

$$R = \frac{4x_n^{2-\alpha}}{(2-\alpha)^2} - \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - y_i)^2.$$

Таким чином справедлива наступна теорема.

Теорема. Якщо $f(x')$ абсолютно інтегровна для $x' \in R^{n-1}$ і $1+\lambda < \alpha < 2$, $\lambda < 1$, то розв'язок задачі /I/ - /3/ існує у вигляді /15/.

Список літератури: 1. В а т о н Г.Н. Теория Бесселевых функций. - М.: ИЛ, 1949, ч.І. 2. В у ш к о В.П., Л и с е в и ч Л.Н., П а р а с к и Л.С. Розв'язок змінаної задачі для одного диференціального рівняння, що вироджується на границі області. - ДАН УРСР, 1965, № 4.

3. Парасюк Л.С. Краевые задачи для некоторых самосопряженных дифференциальных уравнений 2-го порядка, вырождающихся на границе области. - Укр. матем. журн., 1975, т.13, № 3. 4. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. - М.: Наука, 1966. 5. Снеддон И. Преобразование Фурье. - М.: ИЛ, 1955.

и надійшла в редколегію 7.03.1980 р.

УДК 513.88

В.Е.Лянце, О.Г.Сторож

ОПЕРАТОРЫ, СПОРОДНЕНІ ЗІ САМОСПРЯЖЕНІМ

Побудуємо крайову пару для пари взаємно спряжених операторів, один з яких симетричний, за умови, що аналогічна задача розв'язана для пари, яка складається з даного симетричного оператора і деякого наперед заданого його самоспряженого розширення, що дає змогу описати певний клас таких розширень. Поняття крайової пари, а також використані далі позначення пояснені у праці [3].

Нехай S - необмежений самоспряжений оператор у гільбертовому просторі H . Припустимо, що дано ще один гільбертів простір G і лінійний оператор $\Gamma: D(S) \rightarrow G$.

Далі всюди вважається, що

- a) $\Gamma \in \mathcal{B}(D(S), G)$, де $D(S)$ - гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot | \cdot)$, графіка оператора S ;
- б) $R(\Gamma) = G$; в) $Z(\Gamma)$ щільна в H .

Визначимо оператори L_0 і L співвідношеннями

$$D(L_0) = Z(\Gamma), \quad L_0 \subseteq S, \quad L = L_0^*.$$

Зрозуміло, що $L_0 \subseteq S \subseteq L$. Крім того, як випливає з результатів праці [2],

$$D(L) = D(S) \oplus S[D(S) \ominus Z(\Gamma)], \quad /I/.$$

де розклад $/I/$ є $\| \cdot \|_L$ - ортогональним.

Співвідношення /1/ показує, що елемент $f \in H$ належить $D(L)$ тоді і тільки тоді, коли для деякого $f_1 \in D(S) \ominus Z(\Gamma)$

$$f + Sf_1 \in D(S).$$

/2/

Добре видно, що відповідність $f \mapsto f_1$ однозначна, тобто визначає деякий /лінійний/ оператор. Позначимо його через P_1 . Згідно з (2)

$$\forall f \in D(L) \quad f + SP_1 f \in D(S), \quad P_1 f \in D(S) \ominus Z(\Gamma). \quad /3/$$

Розклад /1/ є $\|\cdot\|_L$ - ортогональним, тому

$$1_{D(L)} + SP_1 = P_0, \quad /4/$$

де $P_0 - \|\cdot\|_L$ - ортопроектор $D(L) \rightarrow D(S)$.

Теорема I.

$$\forall f \in D(L) \quad Lf = SP_0 f + P_1 f. \quad /5/$$

Доведення. З леми 3.1 праці [2] випливає, що для всіх $f_1 \in D(S) \ominus Z(\Gamma)$

$$Sf_1 \in D(L) \ominus D(S), \quad LSf_1 = -f_1. \quad /6/$$

$$\text{Тому } Lf = L(f + SP_1 f) - LSP_1 f = SP_0 f + P_1 f.$$

Неважко показати, що існує оператор

$$(\Gamma^*)^{-1} \in \mathcal{B}(D(S) \ominus Z(\Gamma), G).$$

Прийmemo $\Gamma_1 = (\Gamma^*)^{-1} P_1$.

Лема I. Пара (G, Γ_1) є крайовою для пари (S, L) .

Доведення. Нехай $f \in D(L)$. Співвідношення (4) показує, що $\|SP_1 f\|_L \leq \|f\|_L$, а /6/ -

$$\|SP_1 f\|_L = \|P_1 f\|_S. \quad \text{Звідси випливає}$$

$\Gamma \in \mathcal{B}(D(L), G)$. Далі, приймаючи для довільного $\gamma \in G$
 $f = -S\Gamma^*\gamma$, бачимо, що $f \in D(L)$ і $\Gamma f = \gamma$,
 тому $R(\Gamma) = G$. Нарешті, якщо $f \in Z(\Gamma)$, то $Rf = 0$
 і згідно з /3/ $f \in D(S)$. Навпаки, коли $f \in D(S)$, то
 /2/ виконується при $f_1 = 0$, тому $f \in Z(\Gamma)$.

Теорема 2. Нехай

$$\Gamma_0 = \Gamma P_0 = \Gamma(1_{D(L)} + SP_0). \quad /7/$$

Тоді $(G \oplus G, \Gamma_0 \oplus \Gamma_1)$ є крайовою парю для (L_0, L) .

Для доведення досить виконати безпосередню перевірку, при цьо-
 му слід використати лему I.

Має місце така "формула Гріна".

Теорема 3. Для всіх $f, g \in D(L)$

$$(Lf|g) - (f|Lg) = (\Gamma_1 f | \Gamma_0 g)_G - (\Gamma_0 f | \Gamma_1 g)_G. \quad /8/$$

Доведення. Нехай $f, g \in D(L)$. Врахувавши /4/
 і /5/, одержуємо

$$\begin{aligned} I &\stackrel{df}{=} (Lf|g) - (f|Lg) = \\ &= (SP_0 f + P_1 f | P_0 g - SP_1 g) - (P_0 f - SP_1 f | SP_0 g + P_1 g). \end{aligned}$$

Далі, оскільки $S^* = S$ і $P_1 = \Gamma^* \Gamma$, то

$$I = (P_1 f | P_0 g)_G - (P_0 f | P_1 g)_G = (\Gamma_1 f | \Gamma_0 g)_G - (\Gamma_0 f | \Gamma_1 g)_G$$

і залишається використати /7/.

Нехай $\theta \in \mathcal{B}(G)$. Прийmemo $F_\theta = \Gamma_1 - \theta \Gamma_0$.

Тому що $Z(F_\theta) \supset Z(\Gamma)$, то F_θ можна трактувати як крайо-
 вий оператор для пари (L_0, L) . Зауважимо, що $R(F_\theta) = G$,
 оскільки для кожного $\gamma \in G$ $F_\theta f = \gamma$ при $f = -S\Gamma^*\gamma$. Ви-
 значимо оператор S_θ за допомогою співвідношень

$$S_\theta \subset L, \quad D(S_\theta) = Z(F_\theta).$$

Теорема 4. $(S_0)^* = S_0^*$, зокрема S_0 самоспрямлений тоді і тільки тоді, коли θ самоспрямлений.

Доведення. Нехай $g \in D((S_0)^*)$. Тому що $L_0 \subset S_0 \subset L$, то $L_0 \in (S_0)^* \subset L$, отже /див. /8//.

$$\forall f \in D(S_0) \quad (\Gamma_0 f / \theta^* \Gamma_0 g - \Gamma_0 g)_0 = 0.$$

Тому досить переконатися, що $\forall g \in G$ існує $f \in D(S_0)$ таке, коли $\Gamma_0 f = g$. А це справді так. За умови $f_s \in D(S)$ і $\Gamma f_s = g$ при $f = f_s - \Gamma^* \theta g$ маємо $F_0 f = 0$, $\Gamma_0 f = g$.

З а у в а ж е н н я . Інший підхід до встановлення формули типу /8/, а також опис самоспрямлених розширень симетричного оператора у термінах абстрактних граничних операторів запропоновано у праці [1].

Список літератури: 1. К о ч у б е й А.Н. О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений. - Мат. заметки, 1975, 17, № 1. 2. Л я н ц е В.Э. О замынутых операторах в гильбертовом пространстве. - Теория функций, функциональный анализ, 1972, вып. 16. 3. Л я н ц е В.Э., С т о р о ж О.Г. Про збурення крайового оператора. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1979, вып. 14.

Стаття надійшла в редакцію 26.02.1979 р.

УДК 513.88

Я.В.Микитюк

ПРО СЛАБО РЕГУЛЯРНЕ ЗБУРЕННЯ

У праці [3] розглянуто слабо регулярне збурення оператора S^2 / S - оператор множення на незалежну змінну /і сформульовано ряд тверджень. Узагальнимо ці результати на випадок слабо регулярного збурення оператора S^n (n - натуральне, $n \geq 2$). Викладена нижче

теорія з точністю до перетворення Фур'є охоплює спектральну теорію несамопрямих диференціальних операторів на всій осі вигляду

$$\left(\frac{1}{i} \frac{d}{dx}\right)^n + \rho_{n-2} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-2} + \dots + \rho_0,$$

де $\rho_0, \dots, \rho_{n-2}$ - швидко спадаючі функції.

Нехай $H, G, \varepsilon, \Phi, \Phi^*, \Omega, D(\cdot)$ ті ж самі, що і в праці [2]. Крім цього, введемо позначення:

$$\Pi_{\kappa}^{+} \stackrel{\text{df}}{=} \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{(2\kappa+1)\pi}{n} > \arg z > \frac{2\kappa\pi}{n} \right\}, \quad /1/$$

$$\Pi_{\kappa}^{-} \stackrel{\text{df}}{=} \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{2\kappa\pi}{n} > \arg z > \frac{(2\kappa-1)\pi}{n} \right\},$$

$$\Pi_{\kappa}^{\pm}(\gamma) \stackrel{\text{df}}{=} \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \gamma, z \in \Pi_{\kappa}^{\pm} \right\},$$

$$W^{\pm}(\gamma) \stackrel{\text{df}}{=} \left\{ z \in \mathbb{C} : z = z_0, z_0 \in \Pi_{\kappa}^{\pm}(\gamma) \right\} \setminus \left\{ z \in \mathbb{C} : \arg z = \pm \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Розглянемо оператори

$$T = L + A^* B F(S), \quad D(T) \stackrel{\text{df}}{=} D(L), \quad /2/$$

де $L = S^n$; оператори $A, B: H \rightarrow G$ слабо регулярні [3]; $F(S)$ - оператор множення на функцію F , яка голоморфна в Ω і при деякому $\delta > 0$ задовольняє умову

$$F(z) = O(|z|^{n-1-\delta}), \quad |z| \rightarrow \infty \quad /3/$$

рівномірно в Ω .

Теорема I. Для довільних $\varphi, \psi \in \Phi$ функція $z \rightarrow (T_z \varphi, \psi)$, де $T_z \stackrel{\text{df}}{=} (T - z)^{-1}$, має продовження $z \rightarrow (T_z \varphi, \psi)_{\pm \kappa} (z \rightarrow (T_z \varphi, \psi)_{\pm \kappa})$ з області $\Pi_{\kappa}^{+} (\Pi_{\kappa}^{-})$, мероморфне в $\Pi_{\kappa}^{+}(\varepsilon) (\Pi_{\kappa}^{-}(\varepsilon))$.

Н а с л і д о к . Для довільних $\varphi, \psi \in \Phi$ функція $z \rightarrow (T_z \varphi, \psi)$ має продовження $z \rightarrow (T_z \varphi, \psi)_{+} (z \rightarrow (T_z \varphi, \psi)_{-})$ з області $\text{Im } z > 0$ ($\text{Im } z < 0$), мероморфне в $W^{+}(\varepsilon) (W^{-}(\varepsilon))$.

Приймаючи

$$(T_z^{(\pm \kappa)} \varphi, \psi) \stackrel{\text{df}}{=} (T_z \varphi, \psi)_{\pm \kappa}, \quad (T_z^{\pm} \varphi, \psi) \stackrel{\text{df}}{=} (T_z \varphi, \psi)_{\pm}, \quad /4/$$

знаходимо, що $T_z^{(\pm \kappa)} \varphi, T_z^{\pm} \varphi \in \Phi^*$ для всіх $\varphi \in \Phi$, тобто

$$T_z^{(\pm \kappa)}: \Phi \rightarrow \Phi^*, \quad T_z^{\pm}: \Phi \rightarrow \Phi^*.$$

Означення. Нехай $n=2m / n=2m+1$ /. Тоді число $\zeta \in]0; \infty[(\zeta \in]-\infty; \infty[\setminus \{0\})$ називаємо спектральною особливістю оператора T , якщо воно є полюсом функції $\zeta \rightarrow T_\zeta^+$, чи $\zeta \rightarrow T_\zeta^-$. До спектральних особливостей відносимо також точку $\zeta = 0$.

Теорема 2. Нехай оператор T визначається співвідношенням /2/ : $n=2m / n=2m+1$ /.

1. Множина власних значень і спектральних особливостей оператора T скінченна.

2. Якщо $\zeta \in [0; \infty[(\zeta \in]-\infty; \infty[)$ не є власним значенням, то ζ належить резольвентній множині оператора T .

3. Коли $\zeta \in [0; \infty[(\zeta \in]-\infty; \infty[)$ не є спектральною особливістю оператора T , то ζ належить неперервному спектру цього оператора.

4. Для того щоб $\zeta \in [0; \infty[(\zeta \in]-\infty; \infty[)$ було власним значенням оператора T , необхідно /але не достатньо/, щоб ζ було спектральною особливістю цього оператора.

Для кожного $\lambda \in [0; \infty[(\lambda \in]-\infty; \infty[)$ у випадку $n=2m / n=2m+1$ /, яке є власним значенням оператора T , приймаємо

$$\rho_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2\pi i} \oint T_\zeta d\zeta = -\text{Res}_{\zeta=\lambda} T_\zeta, \quad /5/$$

де контур інтегрування не містить особливостей резольвенти T_ζ відмінних від λ . Для кожної спектральної особливості ζ , $\zeta \neq 0$, приймаємо

$$\rho_{\zeta \pm} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2\pi i} \oint T_\zeta^\pm d\zeta = -\text{Res}_{\zeta=\zeta} T_\zeta^\pm \quad /6/$$

у випадку $\zeta = 0$,

$$\rho_{0\pm} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2\pi i} \oint \zeta^{n-1} T_\zeta^{(\pm 0)} d\zeta = -\text{Res}_{\zeta=0} \zeta^{n-1} T_\zeta^{(\pm 0)} \quad /7/$$

з аналогічною умовою для контурів інтегрування.

Теорема 3. Оператори $\rho_\lambda, \rho_{\zeta+}, \rho_{\zeta-}$ є скінченновимірними.

Існує ціле число $q, q \geq 0$ таке, що

$$|(P_{\phi} \varphi, \psi)| \leq C \left(\sum_{i=0}^q \| \varphi^{(i)} \|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=0}^q \| \psi^{(i)} \|^2 \right)^{1/2}, \quad \varphi, \psi \in \Phi, \quad /8/$$

де C - додатна константа.

Теорема 4. Оператор-функція $z \rightarrow K(z) \stackrel{\text{def}}{=} I + BF(z)L_n A^*$ має продовження $z \rightarrow K_+(z) (z \rightarrow K_-(z))$ в області $\Pi_p^+ (\Pi_p^-)$, голоморфне в $\Pi_p^+(\varepsilon) \setminus \{0\} (\Pi_p^-(\varepsilon) \setminus \{0\})$. Причому в оператор-функції $z \rightarrow K_{\pm p}(z) (z \rightarrow K_{\mp p}(z))$ є скінченна кількість полюсів у $\Pi_p^+(\varepsilon) (\Pi_p^-(\varepsilon))$, $\varepsilon \in [0; \varepsilon]$.

Введемо такі позначення:

у випадку $n=2m, \xi > 0$

$$\mathcal{L}_\pm f(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} f(\xi) - (\mathcal{L}_\pm \beta f(\xi), K_0(\xi)^{\pm 1} \alpha((1-\varepsilon)\xi))_0, \quad /9/$$

$$\mathcal{U}_\pm f(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} f(\xi) - (\mathcal{L}_\pm \alpha f(\xi), K_0(\xi)^{\pm 1} \beta((1-\varepsilon)\xi))_0,$$

$$\mathcal{U}_\pm f(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{U}_\pm f(\xi), \mathcal{U}_\pm f(\xi)), \quad \mathcal{L}_\pm f(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{L}_\pm f(\xi), \mathcal{L}_\pm f(\xi));$$

у випадку $n=2m+1$

$$\mathcal{L}_\pm f(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(\xi) - (\mathcal{L}_\pm \beta f(\xi), K_0(\xi)^{\pm 1} \alpha(\xi))_0, & \xi > 0, \\ f(\xi) - (\mathcal{L}_\pm \beta f(\xi), K_{(m+1)}(\xi)^{\pm 1} \alpha(\xi))_0, & \xi < 0, \end{cases}$$

$$\mathcal{U}_\pm f(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(\xi) - (\mathcal{L}_\pm \alpha f(\xi), K_0(\xi)^{\pm 1} \beta(\xi))_0, & \xi > 0, \\ f(\xi) - (\mathcal{L}_\pm \alpha f(\xi), K_m(\xi)^{\pm 1} \beta(\xi))_0, & \xi < 0, \end{cases} \quad /10/$$

де $\mathcal{L}_\pm$ позначає відповідне граничне значення інтеграла

$$\mathcal{L}_\pm f(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\eta \rightarrow \pm 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) dx}{x^\eta - (\xi \pm i\eta)^\eta}, \quad \xi \neq 0;$$

$$\alpha f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(x) f(x); \quad \beta f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(x) f(x) \quad \text{причому } A \sim \alpha, B \sim \beta$$

/див. [2]/. Виявляється, що для кожного $f \in H$ формули /9/, /10/

визначають: у випадку $n=2m+1$ функції $\mathcal{U}_\pm f, \mathcal{L}_\pm f$ майже скрізь при $\xi \in]-\infty; \infty[$; у випадку $n=2m$ векторні функції $\mathcal{U}_\pm f, \mathcal{L}_\pm f$

має окрізь при $\xi \in [0; \infty[$. Зокрема, можна довести, що

$$U T^* f(\xi) = \xi^n U f(\xi), f \in D(T^*),$$

$$B T f(\xi) = \xi^n B f(\xi), f \in D(T).$$

У зв'язку з цим можемо розглядати оператор $U(B)$ як T^* - перетворення / T - перетворення / Фур'є на неперервному спектрі.

Теорема 5. Існує ціле $q, q \geq 2$ /див. теорему 3/ таке, що для довільних $f, g \in D(D^q)$ справедлива наступна рівність Парсе-
валя:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = E.P. \int_{-\infty}^{\infty} B f(\xi) \overline{U g(\xi)} d\xi + \sum_{\lambda} (P_{\lambda} f, g) + \frac{1}{2} \sum_{\lambda} ((P_{\lambda} + P_{\lambda}^-) f, g). \quad /II/$$

В /II/ $\sum$ поширюється на всі спектральні особливості ϕ , а $\sum_{\lambda}$ - на всі ті власні значення λ , які не належать $[0; \infty[\cup (-\infty; \infty[)$ у випадку $n=2m$ ($n=2m+1$); при цьому $(P_{\lambda} f, g)$ позначає продовження на $D(D^q)$ білінійних форм /6/, /7/, які існують з огляду на оцінку /8/. Що стосується інтеграла у правій частині /II/, то він позначає регуляризоване значення розбіжного інтеграла /див. [1] / вздовж воєї ξ - осі у випадку $n=2m+1$ і вздовж півої $\xi \geq 0$ у випадку $n=2m$. Для $n=2m$

$$B f(\xi) \overline{U g(\xi)} \stackrel{df}{=} \sum_{k=1}^{k=2} B_k f(\xi) \overline{U_k g(\xi)}.$$

Автор висловляє глибоку вдячність В.Е.Лянцю за постановку задачі та цінні поради.

Список літератури: 1. Э д в а р д с Р. Функциональный анализ, - М.: Мир, 1969. 2. Л я н ц е В.Э. Вполне регулярное возмущение не-
прерывного спектра. - Математический сборник, 1970, № 82. 3. М и -
к и т в к Я.В. Про збурення неперервного спектра. - Вісн. Львів.
політехн. ін-ту, 1977, № II9.

Стаття надійшла в редакцію 12.02.1979 р.

ВЛАСТИВОСТІ ДЕЯКИХ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ

Розглянемо сингулярні оператори виду:

$$I_{\pm k, n} f(\xi) \stackrel{\text{df}}{=} n \xi^{n-1-k} \lim_{\eta \rightarrow \pm 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^k f(x) dx}{x^n - (\xi + i\eta)^n}, \quad /1/$$

$$\tilde{I}_{\pm \nu, n} f(\xi) \stackrel{\text{df}}{=} n |\xi|^{n-1-\nu} \lim_{\eta \rightarrow \pm 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|^\nu f(x) dx}{x^n - (\xi + i\eta)^n}, \quad /2/$$

де n, k - цілі; ν - дійсне; $-1/2 < \nu, k < n-1/2$; $\xi \in \mathbb{R}$; $f \in L_2(\mathbb{R})$.

Оператори $I_{\pm k, n}, \tilde{I}_{\pm \nu, n}$ застосовують при побудові рівності Парсеваля для операторів, які є збуренням операторів S^n , де S - оператор множення на незалежну змінну в $L_2(\mathbb{R})$; n - натуральне. Оператори $I_{\pm 0, 1}$ збігаються з операторами граничних значень інтегралів типу Коші, властивості яких добре вивчені /див., наприклад працю [2]/. Далі наведемо властивості $I_{\pm 0, 1}$, які необхідні для доведення наших теорем.

Відзначимо, що результат, близький до леми 2, отримано у праці [1], але доведення у нас інше.

Нехай $\mathcal{F}$ - оператор Фур'є-Планшереля, $\mathcal{D}$ - оператор диференціювання в $L_2(\mathbb{R})$, $\chi_+(\cdot) (\chi_-(\cdot))$ - характеристична функція півосі $]0; \infty[(]-\infty; 0[)$, а $F(S)$ - оператор множення на функцію $x \rightarrow F(x)$. Тоді /див. [2], с.140 /.

$$I_{\pm 0, 1} = \pm 2\pi i \mathcal{F}^{-1} \chi_{\pm} \mathcal{F}, \quad \chi_{\pm} \stackrel{\text{df}}{=} \chi_{\pm}(S), \quad /3/$$

$$I_{\pm 0, 1} f \in \mathcal{D}(\mathcal{D}) \Leftrightarrow f \in \mathcal{D}(\mathcal{D}), \text{ причому}$$

$$I_{\pm 0, 1} \mathcal{D}f = \mathcal{D} I_{\pm 0, 1} f \text{ при } f \in \mathcal{D}(\mathcal{D}) \quad /4/$$

$\mathcal{D}(\cdot)$ - область визначення оператора/.

Позначимо через $P_{\pm}$, W_{ν} , Q_{ν} оператори в $L_2(R)$, які задані формулами

$$P_{\pm} \stackrel{\text{df}}{=} \mathcal{F}^{-1} \chi_{\pm} \mathcal{F}, \quad W_{\nu} \stackrel{\text{df}}{=} \chi_{+} + e^{\pi \nu i} \chi_{-}, \quad Q_{\nu} \stackrel{\text{df}}{=} W_{\nu} P_{+} + W_{\nu}^{-1} P_{-}. \quad /5/$$

Л е м а 1. Нехай $|\nu| < 1/2$. Тоді оператор Q_{ν}^{-1} існує, всюди заданий і неперервний.

Д о в е д е н н я . Використовуючи /5/, неважко переконатися, що

$$Q_{\nu} = (I + \chi_{-} U \chi_{+}) (I + \chi_{-} U \chi_{-}), \quad /6/$$

$$\text{де } U \stackrel{\text{df}}{=} (\cos \pi \nu - 1) I + i \sin \pi \nu (P_{+} - P_{-}).$$

/7/

Оскільки $(I + \chi_{-} U \chi_{+})^{-1} = (I - \chi_{-} U \chi_{+})$, то достатньо довести обмеженість знизу оператора $I + \chi_{-} U \chi_{-}$. Беручи до уваги самоспряженість оператора $\chi_{-} (P_{+} - P_{-}) \chi_{-}$, отримуємо, що

$$\|I + \chi_{-} U \chi_{-}\| \geq \cos \pi \nu > 0 \quad \text{при } |\nu| < 1/2. \quad \text{Лема доведена.}$$

Л е м а 2. Оператори $\tilde{Z}_{\pm \nu, 1}$ неперервні в $L_2(R)$.

Д о в е д е н н я . Позначимо через $(z^{\nu})_{+}$, $((z^{\nu})_{-})$ ту вітку аналітичної функції $z \rightarrow z^{\nu}$, яка отримується при $0 \leq \arg z < 2\pi$ ($-2\pi < \arg z \leq 0$). Враховуючи лему 1, співвідношення /2/, /3/, /5/, неважко переконатися, що при $\operatorname{Im} z \neq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|^{\nu} f(x) dx}{x - \frac{z}{\bar{z}}} = (\chi_{+} \mathcal{F} Q_{\nu}^{-1} f, \mathcal{F} \varphi_z^{-}) + (\chi_{-} \mathcal{F} Q_{\nu}^{-1} f, \mathcal{F} \varphi_z^{+}), \quad /8/$$

де $\varphi_z^{\pm}(x) = \frac{(x)_{\pm}}{x - \frac{z}{\bar{z}}}$. З допомогою безпосередніх обчислень отримуємо

$$\tilde{Z}_{\pm \nu, 1} = \pm 2\pi i W_{\nu} P_{\pm} Q_{\nu}^{-1} = W_{\pm \nu} \tilde{Z}_{\pm \nu, 1} Q_{\nu}^{-1}. \quad /9/$$

Звідки з огляду на лему 1 випливає твердження леми. Лема доведена.

Нехай $\rho > 0$. Розглянемо оператор $U_{\rho}: L_2(R) \rightarrow L_2(R)$, який діє за формулою

$$U_{\rho} f(x) \stackrel{\text{df}}{=} \rho^{1/2} f(\operatorname{sgn} x |x|^{\rho}) |x|^{(\rho-1)/2} \quad /10/$$

Л е м а 3. Оператор U_p унітарний і $U_p^{-1} = U_{1/p}$. Доведення леми очевидне.

Теорема I. Оператори $I_{\pm k, n}$, $\tilde{I}_{\pm \nu, n}$ неперервні в $L_2(R)$ і справедливі рівності:

$$I_{\pm k, n} = (\operatorname{sgn} S)^{n-1-k} \tilde{I}_{\pm k, n} (\operatorname{sgn} S)^k, \quad /II/$$

$$\tilde{I}_{\pm \nu, 2m+1} = U_{2m+1} \tilde{I}_{\pm \mu, 1} U_{2m+1}^{-1}, \quad \mu = \frac{\nu-m}{2m+1}, \quad /I2/$$

$$\tilde{I}_{\pm \nu, 2m} = U_{2m} (X_+ \tilde{I}_{\pm \mu, 1} X_+ - X_- \tilde{I}_{\pm \mu, 1} X_-) U_{2m}^{-1} M, \quad \mu = \frac{\nu-m}{2m}, \quad /I3/$$

де оператор $M: L_2(R) \rightarrow L_2(R)$ діє за формулою $Mf(x) = f(-x)$.

Д о в е д е н н я. Достатньо довести рівності /II/, /I2/, /I3/. Рівність /II/ очевидна, а рівності /I2/, /I3/ одержуємо прямим обчисленням. Теорема доведена.

Покажемо тепер, як діють оператори $I_{\pm k, n}$, $\tilde{I}_{\pm \nu, n}$ на гладкі функції.

Позначимо через $\hat{D}$ розширення оператора D , приймаючи за $D(\hat{D})$ множину функцій f таких, що f абсолютно неперервна на всіх проміжках вигляду $[-a; -\varepsilon]$, $[\varepsilon; a]$, $a > \varepsilon > 0$, і $f \in L_2(R)$. Для таких функцій приймаємо $\hat{D}f = f'$.

Л е м а 4. Нехай $f \in D(\hat{D}^m)$. Тоді $I_{\pm k, n} f \in D(\hat{D}^m)$,

$$\hat{D}^m I_{\pm k, n} f = I_{\pm n - \{ \frac{k+m}{n} \}, n} \hat{D}^m f, \quad /I4/$$

де $\{ \nu \}$ - дробова частина числа ν .

Д о в е д е н н я. Твердження леми випливає з /4/ і таких рівностей:

$$I_{\pm k, 2m+1} f(\xi) = I_{\pm 1, 1} f(\xi) + \sum_{\operatorname{Im} a_j \neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_j^{k+1} f(x) dx}{x - a_j \xi},$$

$$I_{\pm k, 2m} f(\xi) = I_{\pm 1, 1} (I + (-1)^k M) f(\xi) + \sum_{\operatorname{Im} a_j \neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_j^{k+1} f(x) dx}{x - a_j \xi},$$

де $a_j = \exp \frac{2\pi i j}{n}$. Лема доведена.

Через $E_\delta : L_2(R) \rightarrow L_2(R)$, $\delta > 0$ позначимо оператор множення на нескінченно раз диференційовану функцію $x \rightarrow E_\delta(x)$, яка задовольняє умову $\forall x \in [-\delta; \delta] E_\delta(x) = 0$, $\forall x \in [-2\delta; 2\delta] E_\delta(x) = 1$.

Теорема 2. Нехай $f \in D(\mathcal{D}^p)$, $v = v_1 + k$, $|v_1| < 1/2$, k - ціле, $0 \leq k \leq n-1$. Тоді справедлива нерівність

$$\|\mathcal{D}^p E_\delta \tilde{I}_{\pm v, n} E_\delta f\| \leq C_{p, \delta} \left(\sum_{l=0}^p \|f^{(l)}\|^2 \right)^{1/2}, \quad C_{p, \delta} > 0. \quad /15/$$

Д о в е д е н н я . Беручи до уваги співвідношення /1/, /2/, /11/

$$E_\delta \tilde{I}_{\pm v, n} E_\delta f = E_\delta |S|^{-v_1} (\operatorname{sgn} S)^{n-1-k} \tilde{I}_{\pm k, n} (\operatorname{sgn} S)^k |S|^{v_1} E_\delta f. \quad /16/$$

Нехай $g \in D(\mathcal{D}^p)$; $\hat{\mathcal{D}}^z g \in D(|S|^{-v_1})$ для $z \leq p$, тоді неважко показати, що справедливі нерівності:

$$\|\mathcal{D}^p E_\delta |S|^{-v_1} (\operatorname{sgn} S)^m g\| \leq C_1 \sup_{z \leq p} \| |S|^{-v_1} \hat{\mathcal{D}}^z g \|, \quad C_1 > 0, \quad /17/$$

$$\| |S|^{v_1} \mathcal{D}^p E_\delta |S|^{-v_1} (\operatorname{sgn} S)^m g \| \leq C_2 \sup_{z \leq p} \| \hat{\mathcal{D}}^z g \|, \quad C_2 > 0. \quad /18/$$

Нехай тепер f фінітна і $f \in D(\mathcal{D})^p$. Тоді, враховуючи попередню лему, а також нерівність /18/, маємо

$$\| |S|^{-v_1} \hat{\mathcal{D}}^z \tilde{I}_{\pm k, n} E_\delta |S|^{v_1} (\operatorname{sgn} S)^k f \| \leq \tilde{C} \sup_{z \leq p} \| \mathcal{D}^z f \|, \quad \tilde{C} > 0.$$

Звідки, беручи до уваги /16/, /17/, отримуємо /15/. Теорема доведена.

Автор висловлює глибоку подяку В.Е.Лянцю за цінні поради та зауваження.

Список літератури: 1. Э с к и н Г.И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1973.

2. Л я н ц е В.Э. Вполне регулярное возмущение непрерывного спектра. Математический сборник, 1970, № 82.

Стаття надійшла в редакцію 12.02.1979 р.

ПРО РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ В ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРИ

Нехай H - гільбертів простір, $L_0, L \in \mathcal{G}(H)^*$, причому $L_0 \subset L$, тобто $L_0 \subset L$ і $\dim[D(L)/D(L_0)] = 2m, m < \infty$; $S \in \mathcal{G}(H)$, $L_0 \subset S \subset L$ і S - твірний оператори сильно неперервної півгрупи обмежених операторів $\{S(t)\}$ з C_0 умовою. Задача Коші $\frac{dv}{dt} = Sv$, $v(0) = v_0, v_0 \in D(S)$ для такого оператора має рівномірно коректну на $D(S)$ і має розв'язок $v(t) = S(t)v_0$.

Якщо в неоднорідному рівнянні $\frac{dv}{dt} = Sv + f$ функція $f(t)$ задовольняє одну із умов:

а/ $f(t) \in D(S)$ і $S_f(t)$ неперервна по t ,

б/ $f(t)$ неперервно диференційована по t ,

то $v(t) = S(t)v_0 + \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau$ є розв'язком цього рівняння з початковою умовою $v(0) = v_0$ [2].

Нехай $T \in \mathcal{G}(H)$ - оператор споріднений парі (L_0, L) . Це позначимо символом $T \sim (L_0, L)$. Означення поняття спорідненості не будемо наводити, оскільки воно відоме [3], [4]. Відзначимо лише, що означення еквівалентне наступному.

Коли $T \sim (L_0, L)$, то існують такі функціонали $\varphi_1', \dots, \varphi_{2m}'$, задані на $D(L)$, неперервні по нормі графіка оператора L , не обмежені по нормі простору H , і рівні нулю на $D(L_0)$ та такі $\varphi_1, \dots, \varphi_{2m}, \chi_1, \dots, \chi_n, \psi_1, \dots, \psi_n \in H$, що

$$D(T) = \{f \in D(L) : \varphi_j'(f) = (f, \varphi_j), j = 1, \dots, 2m\},$$

$$T_f = L_f + \sum_{j=1}^{2m} \varphi_j'(f) \varphi_j + \sum_{i=1}^n (f, \chi_i) \psi_i, f \in D(T).$$

* $\mathcal{G}(H)$ - клас щільно заданих заміщених лінійних операторів $H \rightarrow H$.

Нехай A - спільне зруження операторів $S : T$ на $Z(T-S)$.
 Оператор A , взагалі кажучи, не щільно заданий, але є замкненим.
 Так само, як і в працях [3][4], позначимо $U_s \stackrel{\text{df}}{=} D(S) \Theta^S D(A)$,
 $U_T \stackrel{\text{df}}{=} D(T) \Theta^T D(A)$, де ортогональність розуміємо відпо-
 відно як $(\cdot, \cdot)_S = i(\cdot, \cdot)_T$ - ортогональність $((f, g)_A \stackrel{\text{df}}{=} (f, g) +$
 $+(Af, Ag))$ для довільних $f, g \in D(A)$, $\dim U_s, \dim U_T \leq 2m+n$.
 Якщо $\mathcal{X} = m$, то $\dim U_s = \dim U_T$. Далі вважимо, що $\mathcal{X} = m$.
 Через $P_s (P_T)$ позначимо проектор простору $D(S) (D(T))$ на $U_s (U_T)$
 паралельно $D(A)$.

Розглянемо задачу Коші

$$\frac{dy}{dt} = Ty, \quad y(0) = y_0, \quad /I/$$

де $y_0 \in D(T)$.

Справедливе наступне твердження.

Т в е р д ж е н н я . Нехай $y(t)$ - неперервно диференційовний
 розв'язок задачі /I/ і $u(t) \stackrel{\text{df}}{=} P_T y(t)$. Тоді

1/ $u(t)$ неперервно диференційовна по t ,

2/ $u(t)$ задовольняє рівняння

$$P_s (S(t)y_{0A} + \int_0^t S(t-\tau) (T - \frac{d}{d\tau}) u(\tau) d\tau) = 0, \quad /2/$$

де $y_{0A} = (1 - P_T)y_0$. Крім того, для $y(t)$ справедлива рівність

$$y(t) = S(t)y_{0A} + \int_0^t S(t-\tau) (T - \frac{d}{d\tau}) u(\tau) d\tau + u(t). \quad /3/$$

Навпаки, нехай $u(t) \in U_T$, причому $u(0) = P_T y_0, y_0 \in D(T)$ і справе-
 дливо 1/, 2/, а для $f(t) = (T - \frac{d}{d\tau}) u(t)$ виконується одна із умов а/,
 б/. Визначимо $y(t)$ рівність /3/. Тоді $y(t)$ є неперервно диференційов-
 ним розв'язком задачі /I/.

Д о в е д е н н я . Припустимо, що $y(t)$ - неперервно диферен-
 ційовний розв'язок задачі /I/ і $u(t) \stackrel{\text{df}}{=} P_T y(t), y_0(t) \stackrel{\text{df}}{=} y(t) - u(t)$. Дове-
 демо 1/. Оператор P_T обмежений у просторі $D(T)$ з нормою графі-
 ка оператора T . Оскільки $P_T y(t)$ належить простору U_T і
 $\dim U_T < \infty$, а в скінченномірному просторі всі норми еквівалентні,

то $P_T y(t)$ неперервно диференційовна по нормі простору H .

Тому що $y_A = y - u$, то і $y_A(t)$ неперервно диференційовна.

Щоб показати 2/, запишемо рівняння $\frac{dy}{dt} = Ty$ у вигляді

$$\frac{dy_A}{dt} = Sy_A + (T - \frac{d}{dt})u \quad /4/$$

Із 1/ випливає, що $\frac{dy}{dt}$ є сильно неперервною, а $Tu(t)$ – неперервно диференційовна, оскільки $u(t) \in U$, а оператор T обмежений по нормі графіка. Таким чином, $(T - \frac{d}{dt})u(t)$ є сильно неперервною і розв'язок рівняння /4/ має вигляд

$$y_A(t) = S(t)y_{A_0} + \int_0^t S(t-\tau)(T - \frac{d}{d\tau})u(\tau)d\tau, \quad /5/$$

де $y_{A_0} = y_{0A} = (1 - P_T)y_0$ [1].

Оскільки $\forall z \in D(A) P_T z = 0$, то має місце /2/. Далі,

$$y(t) = y_A(t) + u(t) = S(t)y_{A_0} + \int_0^t S(t-\tau)(T - \frac{d}{d\tau})u(\tau)d\tau + u(t),$$

тобто виконується /3/.

Навпаки, коли $u(t) \in U$ така, що справджується 1/, 2/ і $u(0) = P_T y_0$, $y_0 \in D(T)$, то при виконанні для виразу $(T - \frac{d}{dt})u(t)$ однієї з умов а/, б/, функція $y_A(t)$, визначена в /5/, є неперервно диференційовним розв'язком рівняння /4/. Тоді $y(t)$, визначена в /3/, є неперервно диференційовним розв'язком задачі /1/. Це ж саме можна отримати і безпосередньою перевіркою.

Доведене твердження вказує шлях, по якому можна звести задачу /1/ знаходження функції $y(t)$, що набуває значення в нескінченномірному просторі H , до знаходження функції $u(t)$, значення якої належать простору U , який є скінченномірним.

Приклади застосування цього твердження за браком місць ми тут не розглядаємо.

Список літератури: І. К а т о Т. Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. 2. К р е й н С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967.

З. Лянце В.Э. О некоторых отношениях между замкнутыми операторами. - ДАН СССР, 1972, № 3. 4. Лянце В.Э. О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве. - Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1972, № 16.

Стаття надійшла в редакцію 12.02.1979 р.

УДК 517.9

Г.І.Чуйко

РОЗКЛАД ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ОДНОГО НЕСАМОСПРЯЖЕНОГО ОПЕРАТОРА

Нехай дано вимірні функції $\rho_1, \rho_2: R_+ =]0, \infty[\rightarrow C$, які задовольняють умову $\forall t \in R_+ / \rho_j(t) / < C \exp(-2\delta t)$ при деяких фіксованих $C > 0, \delta > 0$. Утворимо диференціальний вираз

$$\ell[u] = -\Delta u + (\rho_1(x_1) + \rho_2(x_2))u, \quad /1/$$

де Δ - двовимірний лапласіан. Позначимо Γ межу додатного конуса $(R_+)^2$ простору R^2 . Диференціальному виразу /1/ і крайовій умові

$$u|_{\Gamma} = 0 \quad /2/$$

звістаємо оператор L , який діє в гільбертовому просторі $H = L_2((R_+)^2)$. За означенням L заданий на множині $D(L)$ тих функцій з простору Соболева $H^2((R_+)^2)$, які задовольняють /2/, і $Lu = \ell[u]$ при $u \in D(L)$.

У цій замітці даємо опис спектральних властивостей оператора L . Одновимірний випадок розглянутий у працях [1-3].

Позначимо через $e_j(x, \rho)$ розв'язок рівняння

$$-y'' + \rho_j(x)y = \rho^2 y, \quad /3/$$

для якого справедлива асимптотична формула

$$e_j(x, \rho) = e^{i x \rho} [1 + o(1/\rho)], \quad \text{Im } \rho > -\frac{\epsilon}{2}, \quad |\rho| \rightarrow \infty,$$

а через $s_j(x, \rho^2)$ - розв'язок рівняння /3/, який задовольняє початкові умови $s_j(0, \rho^2) = 0$, $\frac{ds_j}{dx}(0, \rho^2) = 1$. Приймемо $e_j(\rho) = e_j(0, \rho)$.

Дамо опис спектра оператора L . Позначимо $Z_+(e_j)$ множину коренів рівняння $e_j(\rho) = 0$ в області $\text{Im} \rho > 0$. Число λ належить до точкового спектра $\sigma_p(L)$ оператора L тоді і тільки тоді, коли $\lambda = \rho_1^2 + \rho_2^2$, $\rho_j \in Z_+(e_j)$, $j = 1, 2$. Власному значенню λ відповідає власна функція $S(\vec{x}) = S_1(x_1, \rho_1^2) \cdot S_2(x_2, \rho_2^2)$ і ланцюжок приєднаних функцій $S^{(\alpha)}(\vec{x}) = S_1^{(\alpha_1)}(x_1, \rho_1^2) S_2^{(\alpha_2)}(x_2, \rho_2^2)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $0 \leq \alpha_j < m_j$, $j = 1, 2$, де m_j - кратність ρ_j як кореня рівняння $e_j(\rho) = 0$.

Неперервний спектр $\sigma_c(L)$ оператора L розпадається на головну і точково-неперервну частини. Головна частина неперервного спектра складається з дійсної півосі $\lambda \geq 0$, а точково-неперервна частина - з променів, паралельних до дійсної осі, які виходять з кожної точки ρ_j^2 , $\rho_j \in Z_+(e_j)$, $j = 1, 2$. Власні та приєднані функції неперервного спектра мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} S(x_1, x_2; \lambda_1, \lambda_2) &= S_1(x_1, \lambda_1) \cdot S_2(x_2, \lambda_2), \\ S_1^{(\alpha_1)}(x_1, x_2; \rho_1^2, \lambda_2) &= S_1^{(\alpha_1)}(x_1, \rho_1^2) \cdot S_2(x_2, \lambda_2), \\ S_2^{(\alpha_2)}(x_1, x_2; \lambda_1, \rho_2^2) &= S_1(x_1, \lambda_1) \cdot S_2^{(\alpha_2)}(x_2, \rho_2^2), \\ 0 \leq \alpha_j < m_j, \rho_j &\in Z_+(e_j), \lambda_j \geq 0, j = 1, 2. \end{aligned}$$

Відзначимо, що ці функції не належать до простору $L_2((R_+)^2)$.

Крім того, є ще приєднані функції неперервного спектра, що відповідають дійсним кореням рівняння $e_j(\rho) = 0$.

Щоб одержати розклад функції $f \in L_2((R_+)^2)$ за власними і приєднаними функціями оператора L визначимо L - перетворення Фур'є.

Л е м а . Для кожної фінітної функції $f \in L_2((R_+)^2)$ існують такі числа $C, K_j > 0$ ($j = 1, 2$), що

$$\iint_{(R_+)^2} |S(f, \lambda_1, \lambda_2)|^2 \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} d\lambda_1 d\lambda_2 \leq C \iint_{(R_+)^2} |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2,$$

$$\int_{R_+} |S_j^{(\alpha_j)}(f, \lambda_i)|^2 \sqrt{\lambda_i} d\lambda_i \leq K_j \iint_{(R_+)^2} |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2, (i, j = 1, 2),$$

де

$$S(f, \lambda_1, \lambda_2) = \iint_{(R_+)^2} f(x_1, x_2) S(x_1, x_2; \lambda_1, \lambda_2) dx_1 dx_2;$$

$$S_j^{(\alpha_j)}(f, \rho_j^2, \lambda_i) \stackrel{\text{def}}{=} S_j^{(\alpha_j)}(f, \lambda_i) = \iint_{(R_+)^2} f(x_1, x_2) S_j^{(\alpha_j)}(x_1, x_2; \rho_j^2, \lambda_i) dx_1 dx_2, i, j = 1, 2.$$

О з н а ч е н н я . З огляду на лему для кожної функції $f \in L_2((R_+)^2)$ існують границі

$$S(f, \lambda_1, \lambda_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x_1, x_2) S(x_1, x_2; \lambda_1, \lambda_2) dx_1 dx_2, \quad /4/$$

$$S_j^{(\alpha_j)}(f, \rho_j^2, \lambda_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x_1, x_2) S_j^{(\alpha_j)}(x_1, x_2; \rho_j^2, \lambda_i) dx_1 dx_2, \quad /5/$$

де $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ - послідовність обмежених множин, що розширюється і вичерпує $(R_+)^2$. Крім того, існують інтеграли

$$S^{(\alpha)}(f) = \iint_{(R_+)^2} f(x_1, x_2) S^{(\alpha)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2). \quad /6/$$

Сукупність, складену з границь /4/, /5/ та інтегралів /6/, назовемо L - перетворенням Фур'є функції $f \in L_2((R_+)^2)$.

Розглянемо гільбертів простір H_+ , елементами якого є функції $f \in L_2((R_+)^2)$, для яких норма

$$\|f\|_+ = \iint_{(R_+)^2} |(1+x_1)^{m_0^1+1} (1+x_2)^{m_0^2+1} f(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2$$

скінченна. m_0^j - найбільша з кратностей дійсних коренів рівняння $e_j(\rho) = 0$. Множину таких коренів позначаємо $Z_j(e_j)$.

Якщо H_- - простір лінійних неперервних функціоналів на H_+ , то одержимо деяке оснащення простору $L_2((R_+)^2)$

$$H_+ \subset L_2((R_+)^2) \subset H_-.$$

Теорема I. Для функції $f \in H_+$ існує розклад за власними та приєднаними функціями оператора L :

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2) = & \frac{1}{\pi^2} \iint_{(R_+)^2} [B_1[B_2 S(f, \lambda_1, \lambda_2) S_2(x_2, \lambda_2)] S_1(x_1, \lambda_1)] \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} d\lambda_1 d\lambda_2}{e_1(\sqrt{\lambda_1}) e_1(\sqrt{\lambda_2}) e_2(\sqrt{\lambda_1}) e_2(\sqrt{\lambda_2})} + \\
& + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{p_j \in \mathbb{Z}_0(e_j) \cup \mathbb{Z}_+(e_j) \\ j=1,2}} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \right)^{m_j-1} M_j^1(\lambda_1) \int_0^\infty [B_2 S(f, \lambda_1, \lambda_2) S_2(x_2, \lambda_2)] \frac{S_1(x_1, \lambda_1) \sqrt{\lambda_2} d\lambda_2}{e_2(\sqrt{\lambda_2}) e_2(\sqrt{\lambda_1})} \right\}_{\lambda_1=p_j^2} + \\
& + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{p_j \in \mathbb{Z}_0(e_j) \cup \mathbb{Z}_+(e_j) \\ j=1,2}} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_2} \right)^{m_j-1} M_j^2(\lambda_2) \int_0^\infty [B_1 S(f, \lambda_1, \lambda_2) S_1(x_1, \lambda_1)] \frac{S_2(x_2, \lambda_2) \sqrt{\lambda_1} d\lambda_1}{e_1(\sqrt{\lambda_1}) e_1(\sqrt{\lambda_2})} \right\}_{\lambda_2=p_j^2} + \\
& + \sum_{\substack{p_j \in \mathbb{Z}_0(e_j) \cup \mathbb{Z}_+(e_j) \\ p_k \in \mathbb{Z}_0(e_k) \cup \mathbb{Z}_+(e_k) \\ j,k=1,2}} \left\{ \frac{\partial^{m_j+m_k-2}}{\partial \lambda_1^{m_j-1} \partial \lambda_2^{m_k-1}} M_j^1(\lambda_1) M_k^2(\lambda_2) S(f, \lambda_1, \lambda_2) S_1(x_1, \lambda_1) S_2(x_2, \lambda_2) \right\}_{\substack{\lambda_1=p_j^2 \\ \lambda_2=p_k^2}}.
\end{aligned}$$

Цей розклад є збіжним за нормою простору H_- .

З а у в а ж е н н я . Означення символів B_1, B_2 /за допомогою яких здійснена регуляризація розбіжних інтегралів/ і функцій $M_j^1(\lambda_1), M_k^2(\lambda_2)$ таке ж, як в праці [3].

Позначимо через $\mathcal{M}$ многовид функцій $f \in L_2((R_+)^2)$, що задовольняють умови

$$\iint_{R^2} \left| \frac{\xi_1 \xi_2 S(f, \xi_1^2, \xi_2^2)}{e_1(\xi_1) e_2(\xi_2)} \right|^2 d\xi_1 d\xi_2 < \infty, \quad \int_R \left| \frac{\xi_i S_j^{(\alpha_j)}(f, \xi_i^2, p_j^2)}{e_i(\xi_i)} \right|^2 d\xi_i < \infty,$$

$$l, j = 1, 2, p_j \in \mathbb{Z}_0(e_j), 0 \leq \alpha_j < m_j.$$

Многовид $\mathcal{M}$ є щільним у $L_2((R_+)^2)$. Функція $f \in H_+$ належить $\mathcal{M}$ тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{\partial^{v'+v''}}{\partial \lambda_1^{v'} \partial \lambda_2^{v''}} S(f, \lambda_1, \lambda_2) \Big|_{\substack{\lambda_1=p_j^2 \\ \lambda_2=p_k^2}} = 0, \quad p_j \in \mathbb{Z}_0(e_j), 0 \leq v', v'' < m_j, j=1,2.$$

Тому для функцій $f \in H_+ \cap \mathcal{M}$ інтеграли в формулі /7/ не потребують регуляризації і розклад /7/ матиме вигляд:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi^2} \iint_{(R_+)^2} S(f, \lambda_1, \lambda_2) S_1(x_1, \lambda_1) S_2(x_2, \lambda_2) \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} d\lambda_1 d\lambda_2}{e_1(\sqrt{\lambda_1}) e_1(\sqrt{\lambda_2}) e_2(\sqrt{\lambda_1}) e_2(\sqrt{\lambda_2})} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+(e_1) \\ \lambda_1 \in \mathbb{Z}_+(e_1)}} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \right)^{m_j-1} M_j'(\lambda_1) \int_0^\infty s(f, \lambda_1, \lambda_2) s_2(x_2, \lambda_2) s_1(x_1, \lambda_1) \frac{\sqrt{\lambda_2} d\lambda_2}{e_2(\sqrt{\lambda_2}) e_2(-\sqrt{\lambda_2})} \right\}_{\lambda_1 = \rho_j^2} + \\
& + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+(e_1) \cup \mathbb{Z}_+(e_2) \\ \lambda_2 \in \mathbb{Z}_+(e_2)}} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_2} \right)^{m_j-1} M_j'(\lambda_2) \int_0^\infty s(f, \lambda_1, \lambda_2) s_2(x_2, \lambda_2) s_1(x_1, \lambda_1) \frac{\sqrt{\lambda_1} d\lambda_1}{e_1(\sqrt{\lambda_1}) e_1(-\sqrt{\lambda_1})} \right\}_{\lambda_2 = \rho_j^2} \quad /8/ \\
& + \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+(e_1) \\ \lambda_1 \in \mathbb{Z}_+(e_1)}} \left\{ \frac{\partial^{m_j+m_k-2}}{\partial \lambda_1^{m_j-1} \partial \lambda_2^{m_k-2}} M_j'(\lambda_1) M_k'(\lambda_2) s(f, \lambda_1, \lambda_2) s(f, \lambda_1, \lambda_2) s_1(x_1, \lambda_1) s_2(x_2, \lambda_2) \right\}_{\substack{\lambda_1 = \rho_j^2 \\ \lambda_2 = \rho_k^2}}
\end{aligned}$$

Теорема 2. Розклад /8/ справедливий для кожної функції $f \in \mathcal{H}_j$, причому інтеграли збігаються за нормою простору $L_2((R_+)^2)$.

Теорема 3. Для довільних функцій $f \in \mathcal{H}_j, g \in L_2((R_+)^2)$ існує така рівність Парсеваля:

$$\begin{aligned}
& \iint_{(R_+)^2} f(x_1, x_2) g(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{1}{\pi^2} \iint_{(R_+)^2} s(f, \lambda_1, \lambda_2) s(g, \lambda_1, \lambda_2) \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} d\lambda_1 d\lambda_2}{e_1(\sqrt{\lambda_1}) e_1(-\sqrt{\lambda_1}) e_2(\sqrt{\lambda_2}) e_2(-\sqrt{\lambda_2})} + \\
& + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+(e_1) \\ \lambda_1 \in \mathbb{Z}_+(e_1)}} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \right)^{m_j-1} M_j'(\lambda_1) s(f, \lambda_1, \lambda_2) s(g, \lambda_1, \lambda_2) \right\}_{\lambda_1 = \rho_j^2} \frac{\sqrt{\lambda_2} d\lambda_2}{e_2(\sqrt{\lambda_2}) e_2(-\sqrt{\lambda_2})} + \\
& + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+(e_1) \cup \mathbb{Z}_+(e_2) \\ \lambda_2 \in \mathbb{Z}_+(e_2)}} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_2} \right)^{m_j-1} M_j'(\lambda_2) s(f, \lambda_1, \lambda_2) s(g, \lambda_1, \lambda_2) \right\}_{\lambda_2 = \rho_j^2} \frac{\sqrt{\lambda_1} d\lambda_1}{e_1(\sqrt{\lambda_1}) e_1(-\sqrt{\lambda_1})} + \\
& + \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+(e_1) \\ \lambda_1 \in \mathbb{Z}_+(e_1)}} \left\{ \frac{\partial^{m_j+m_k-2}}{\partial \lambda_1^{m_j-1} \partial \lambda_2^{m_k-2}} M_j'(\lambda_1) M_k'(\lambda_2) s(f, \lambda_1, \lambda_2) s(g, \lambda_1, \lambda_2) \right\}_{\substack{\lambda_1 = \rho_j^2 \\ \lambda_2 = \rho_k^2}}
\end{aligned}$$

Список літератури: 1. Лянце В.Э. О несамопряженном дифференциальном операторе второго порядка на полуоси. - ДАН СССР, 1964, 5, № 154. 2. Лянце В.Э. О дифференциальном операторе со спектральными особенностями. - Математический сборник, 1964, 4, № 64 /106/; № 65 /107/. 3. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. - М.: Наука, 1969.

Стаття надійшла в редакцію 12.02.1979 р.

О.Н.Фрідман

ОЦІНКИ ЗНИЗУ ФУНКЦІЙ, СУБГАРМОНІЧНИХ В R^m
АБО В m -ВИМІРНІЙ КУЛІ

У цій статті одержані оцінки знизу функцій, субгармонічних у просторі R^m , $m \geq 2$, або в кулі $D(R) = \{x: |x| < R\}$, а також так званих δ -субгармонічних функцій, тобто функцій u , що зображаються у вигляді різниці двох субгармонічних функцій, $u = u_1 - u_2$. Через x позначено вектор простору R^m , а через $|x|$ - його довжину/.

Введемо такі позначення: $S(z) = \{x: |x| = z\}$;

$G_m(z) = 2\pi^{m/2} / \Gamma(\frac{m}{2}) z^{m-1}$ - площа поверхні сфери $S(z)$;

$dG(x) = dG_z(x)$ - елемент площі поверхні сфери $S(z)$;

$C(x, \alpha_x) = \{x: |x - x_k| \leq \alpha_x\}$; $N(z, u) = d_m \int_0^{z-m} n(t, u) t^{m-1} dt$,

де $n(t, u)$ - маса Рісса кулі $C(0, t)$ функції u ; $d_2 = 1$,

$d_m = m-2$, $m > 2$;

$$T(z, u) = \frac{1}{G(z) S(z)} \int u^+(x) dG(x) + N(z, u_2).$$

Вважаємо, що $u(x)$ - не обмежена зверху δ -субгармонічна функція /скорочено δ -с.г. функція/, що задовольняє умову $u(0) = 0$.

Означення. Множину куль $C(x_k, \alpha_k)$ називаємо C^0 -множиною в R^m , якщо при $z \rightarrow \infty$

$$z^{1-m} \sum_{|x_k| < z} \alpha_k^{m-1} = o(1).$$

Теорема I. Нехай $u(x)$ - δ -с.г. функція в R^m з характеристикою $T(z, u)$. Тоді для довільної додатної заданої на $[0, \infty[$ функції $A(t)$, $A(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$ можна вказати C^0 -множину в R^m , зовні якої виконується / $|x| = z$

$$u(x) < A(z) T((1+o(1))z, u). \quad //I/$$

У загальному випадку в нерівності /1/ не можна відкинути величину $o(1)$. При $m=2$ на це вказує приклад функції $u(z) = \operatorname{Re}\{e^z\}$, $z \in R^2$. Справді /див., наприклад, [1]/

$$T(z, u) = (1 + o(1)) \frac{e^z}{\sqrt{2\pi^2 z}},$$

і нерівність $u(z) = e^z < A(z) T(z, u)$ не виконується для деяких $A(z)$, що мають властивості, вказані в теоремі. Крім того, можна навести приклади функцій, субгармонічних в R^2 , заданого порядку ρ , $0 \leq \rho \leq \infty$, які показують, що функцію $A(z)$ не можна замінити на як завгодно велику сталу.

Теорема I поліпшує оцінку, доведену І.В.Ушаковою [7], але зовні більш "широї" множини.

При доведенні теореми I використовується така теорема.

Теорема. Нехай $u(x)$ - δ -с.г. функція в R^m . Тоді для довільного $N > 1$ можна вказати систему куль $C(x_k, \alpha_k)$, таку, що $\sum_k \alpha_k^{m-1} < R^{m-1} N^{-1}$ і для $x \in D(R) \setminus \bigcup_k C(x_k, \alpha_k)$ наявна оцінка

$$u(x) < K_m N T(R, u),$$

де K_m - додатна стала, яка залежить тільки від вимірності простору.

Ця теорема доведена М.В.Говоровим [2] для випадку субгармонічних функцій в R^2 і узагальнена Л.С.Кудіною [4] на випадок δ -с.г. функцій в R^m , $m \geq 2$.

Доведення теореми I. Нехай $R_n = (1+\theta)^{n/2}$, $0 < \theta < 1$,
 $A_n = \inf \{A(t) : t \geq R_n\}$, $N_n = A_n K_m^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Застосовуючи наведену теорему до функції $u(x)$ в кулі $D(R_{n+2})$, одержимо, що нерівність

$$u(x) < K_m N_n T(R_{n+2}, u)$$

виконується зовні множини $C_n = \bigcup_k C(x_k^{(n)}, \alpha_k^{(n)})$,

$$\sum_k (\alpha_k^{(n)})^{m-1} < R_{n+2}^{m-1} N_n^{-1}.$$

121

Зуважимо, що коли

$$C(x_k^{(n)}, d_k^{(n)}) \cap \{x: R_n \leq |x| \leq R_{n+1}\} \neq \emptyset, \quad /3/$$

$k \in N$, то для $n \geq n_0$ виконується $|x_k^{(n)}| \geq R_{n-1}$.

З кожної множини C_n , $n \geq n_0$, виділяємо множину тих куль $C(x_k^{(n)}, d_k^{(n)})$, для яких виконується /3/, і позначимо їх через C_n^* . Нехай $C = \{ \bigcup_n C_n^* \} \cup D(R_{n_0})$, тоді, якщо d_j - радіуси, а x_j - центри куль з C , то $|R_n \leq z = |x| < R_{n+1}, n \geq n_0|$

$$z^{1-m} \sum_{|x_j| < z} d_j^{m-1} \leq R_n^{1-m} (R_{n_0}^{m-1} \sum_{j=n_0}^{n+1} \sum_{|x_j^{(j)}| \geq R_{j-1}} (d_k^{(j)})^{m-1}) <$$

$$< (R_{n_0} R_n^{-1})^{m-1} + R_n^{1-m} \sum_{j=n_0}^{n+1} N_j^{-1} R_{j+2}^{m-1} <$$

$$< (R_{n_0} R_n^{-1})^{m-1} + 2^{m-1} \sum_{j=n_0}^{n+1} N_j^{-1} (1+\theta)^{(j-n)(m-1)/2} \quad /4/$$

Застосовуючи до другого доданка у правій стороні /4/ наслідок з теореми Тейлора /9/, с.328 /, одержуємо, що він прямує до 0, коли $n \rightarrow \infty$. Отже, C є C^0 -множиною в R^m . Таким чином, з /2/ дістаємо, що для $|x| \geq R_n$ і $x \in C$ виконується

$$u(x) < A_n T((1+\theta)R_n, u) < A(|x|) T((1+\theta)|x|, u). \quad /5/$$

Виберемо дві числові послідовності (θ_v) , $0 < \theta_v < 1$, $\theta_v \downarrow 0$, $v \rightarrow \infty$; (ε_v) , $\varepsilon_v = 2^{-v}$. Тоді згідно з /5/ для кожного $v \in N$ існує C^0 -множина в R^m /позначимо її через C'_v /, зовні якої виконується $|x| \geq R'_v$.

$$u(x) < A(|x|) T((1+\theta_v)|x|, u). \quad /6/$$

Виберемо послідовність (R'_v) так, щоб $R'_{v+1} > (v+1)R'_v$ і для $|x| = z \geq R'_{v-1}$

$$\sum_{|x_j^{(v)}| < z} (d_j^{(v)})^{m-1} < \varepsilon_v z^{m-1}, \quad C(x_j^{(v)}, d_j^{(v)}) \in C'_v.$$

З кожної множини C'_v виділяємо ті кулі, для яких виконується

$$C(x_j^{(v)}, \alpha_j^{(v)}) \cap \{x: R'_v \leq |x| < R'_{v+1}\} \neq \emptyset, \quad /7/$$

і сукупність таких куль позначимо через C' . Незавжди показати, що центри $x_j^{(v)}$ куль з C'_v , які задовольняють нерівність /7/, лежать в $\{x: R'_{v-1} \leq |x| \leq R'_{v+2}\}$. Покажемо, що C' є C^0 -множиною в R^m . Нехай $C' = \bigcup C(x_j, \alpha_j)$ і $R'_v \leq |x| = z < R'_{v+1}$, тоді

$$\begin{aligned} z^{(m-1)} \sum_{|x_j| < z} \alpha_j^{m-1} &< z^{1-m} \left[(R'_v)^{m-1} + \sum_{j=1}^{v-1} \varepsilon_j (R'_{j+1})^{m-1} + z^{m-1} (\varepsilon_v + \varepsilon_{v+1}) \right] < \\ &< \left(\frac{R'_v}{R'_v} \right)^{m-1} + \sum_{j=1}^{v-2} \varepsilon_j \left(\frac{R'_{j+1}}{R'_v} \right)^{m-1} + \frac{z}{2^{v+1}} \leq \\ &\leq \left(\frac{R'_v}{R'_v} \right)^{m-1} + \left(\frac{R'_{v-1}}{R'_v} \right)^{m-1} \sum_{j=1}^{v-2} \varepsilon_j + \frac{z}{2^{v+1}} \leq \left(\frac{R'_v}{R'_v} \right)^{m-1} + \frac{1}{v^{m-1}} + \frac{z}{2^{v+1}}, \end{aligned}$$

тобто C' є C^0 -множиною в R^m . Крім того, для $x \in C'$ і $|x| > R'_v$ виконується нерівність /6/, тобто для $x \in C'$ виконується /1/.

Перед тим як сформулювати результати, що подані оцінки знизу функцій, субгармонічних в $D(1)$, наведемо означення.

О з н а ч е н н я . Вважимо, що множина куль $C = \bigcup_k C(x_k, \alpha_k)$ має нульову γ -щільність в $\bar{D}(1)$, якщо

$$\begin{aligned} \sum_k \alpha_k^{m-1} &= O((1-z)^{m-1}), \quad \gamma=1, \\ \sum_k \alpha_k^{\gamma(m-1)} &= O((1-z)^{(\gamma-1)(m-1)}), \quad \gamma>1, \quad z \rightarrow 1, \end{aligned}$$

де $\sum^z$ - означає сумування по тих k , для яких

$$C(x_k, \alpha_k) \setminus D(z) \neq \emptyset.$$

Для випадку функцій, аналітичних у $D(1)$ з R^2 , що не мають там нулів, оцінки знизу модуля одержані М.Картрайт [10], а

потім поліпшені М.К.Нікольським [5]. У роботах І.В.Ушакової [6, 8] і І.Ф.Красічкова-Терновського [3] розглянутий випадок функцій, δ - субгармонічних в $D(1)$ з R^2 .

Одержані у цій статті оцінки поліпшують і узагальнюють результати І.В.Ушакової [8], але зовні більшої виняткової множини.

Якщо ρ_M і ρ_T відповідно порядки функцій $M(z, u) = \sup \{u(x) : |x|=z\}$; $T(z, u), z < 1$, то вони можуть не збігатись, але пов'язані нерівністю $\rho_T + m - 1 \geq \rho_M \geq \rho_T$.

Теорема 2. Нехай $u(x)$ - субгармонічна функція в $D(1)$. Тоді для довільної додатної функції $A(t)$, $A(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow 1$ зовні деякої множини куль нульової γ -щільності в $D(1)$ з R^m , $\gamma > 1$ виконується нерівність / $|x|=z$ /

$$u(x) > -A(z) M(z + o(1-z), u).$$

Теорема 3. Нехай $u(x)$ - δ -с.г. функція в $D(1)$ з характеристиком $T(z, u)$. Тоді для довільної додатної функції $A(t)$, $A(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow 1$ існує множина куль нульової γ -щільності в $D(1)$, зовні якої / $|x|=z$ /

$$u(x) < A(z) T(z + o(1-z), u) (1-z)^{(m-1)}, \text{ коли } \gamma = 1,$$

і

$$u(x) < A(z) T(z + o(1-z), u) (1-z)^{(1/\gamma-1)(m-1)}, \text{ якщо } \gamma > 1.$$

Використовуючи приклади, побудовані Лінденом [II], у просторі R^2 , коли $\rho_M \geq 1$, можемо показати, що функцію $A(z)$ в теоремі 2 не можна замінити на як завгодно велику сталу, і в цьому сенсі теорему 2 не можна поліпшити.

Щодо теореми 3, то в просторі R^2 приклад функції $u(z) = 1 - 2A \operatorname{Re}\{(1+z)/(1-z)\}$ показує, що умова $A(z) \rightarrow +\infty$ коли $z \rightarrow 1$, є суттєвою у випадку $\gamma = 1$ і $\rho_T = 0$.

Якщо $\rho > 0$, то ми спроможні вважати лише приклади, які засвідчують, що для $\gamma=1$ множник $(1-z)^{-1}$ / $m=2$ / не можна замінити на $(1-z)^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

Теорема 3 доводиться тим же методом, що й теорема I, а доведення теореми 2 вимагає певної модифікації цього методу.

Список літератури: 1. Гельдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. - М.: Наука, 1970. 2. Говоров И.В. Об оценке снизу функции субгармонической в круге. - Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Харьков, 1968, № 6. 3. Красичков-Терновский И.Ф. Оценки субгармонической разности субгармонических функций. I-II. Математический сборник, 1977, 2, № 102 /44/; 5, № 103 /145/. 4. Кудина Л.С. Оценки для функций, представимых в виде разности субгармонических в шаре. - Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1971, № 14. 5. Никольский Н.К. Избранные задачи весовой аппроксимации и спектрального анализа. - Тр. Матем. ин-та им. В.А.Стеклова, 1974, № 120. 6. Ушакова И.В. Некоторые оценки субгармонических функций в круге. - Зап. Харьк. матем. общ-ва, 1963, № 29. 7. Ушакова И.В. Асимптотические оценки разности субгармонических функций в плоскости. - Вестн. Харьк. ун-та, сер. мех.-мат., 1970, № 53, 34. 8. Ушакова И.В. Некоторые теоремы единственности для функций, субгармонических и мероморфных в единичном круге. - ДАН СССР, 1961, 131, № 6. 9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. - М.: Наука, 1969, т.2. 10. Cartwright M.L. On analytic functions regular in the unit circle. I. - Quart. J. Math., 1933, N16, 4. 11. Linden C.N. The minimum modulus of functions regular and of finite order in the unit circle. - Quart. J. Math., 1956, 7.

Стаття надійшла в редакцію 24.02.1979 р.

ЗАУВАЖЕННЯ ПРО ОБМЕЖЕНІ АНАЛІТИЧНІ ФУНКЦІЇ

У зв'язку з відомою теоремою Карлесона про корону [2, гл. 12] виникають деякі суміжні питання. Дамо відповідь на два питання Ерла та Тейлора, що були опубліковані у відомому списку нерозв'язаних задач [1]. Питання наводимо лише у тій частині, на яку даємо відповідь. Через $\mathcal{H}$ позначено клас аналітичних в одиничному крузі D обмежених функцій.

Питання 1 /Ерл [1, задача 9.3 (b)]/. Припустимо, що $f_1, f_2 \in \mathcal{H}^\infty$. Чи необхідно існують $f \in \mathcal{H}^\infty$ та $\delta > 0$, такі, що

$$\delta (|f_1| + |f_2|) \leq |f| \leq |f_1| + |f_2|.$$

Питання 2 /Тейлор [1, задача 9.4]/. Чи для кожної пари функцій $f, g \in \mathcal{H}^\infty$, такої, що $|f| + |g| > 0$, існує інша пара функцій $a, b \in \mathcal{H}^\infty$, така, що $af + bg \neq 0$ ($|z| < 1$).

Негативна відповідь на обидва питання відразу випливає з такої теореми.

Теорема. Нехай K_1 і K_2 - дві довільні неспадні додатні функції, задані відповідно на $[0, 1]$ і $(0, \infty)$, причому $K_2(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$. Існують $f_1, f_2 \in \mathcal{H}^\infty$, $|f_1| + |f_2| > 0$ в D , такі, що коли f - аналітична в D функція, для якої

$$|f(z)| = O\{K_1(|z|)K_2(|f_1(z)| + |f_2(z)|)\}, \quad |z| \rightarrow 1, \quad (1)$$

то f має нескінченну множину нулів у D .

Д о в е д е н н я . Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $K_1(0) > 1$. Нехай $b_n = 1 - 2^{-n}$, $b_n < a_n < b_{n+1}$ і

$$K_2\left(\frac{a_n - b_n}{1 - a_n b_n}\right) < C_n =$$

$$= K_1(b_n)^{-1} \exp\{-2^{n+2} \ln K_1(b_{n+1}) - 3^n\}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Візьмемо

$$f_1(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{b_n - z}{1 - \bar{b}_n z}, \quad f_2(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z}.$$

Очевидно, $|f_1(z)| < 1$, $|f_2(z)| < 1$, $|f_1(z)| + |f_2(z)| > 0$ при $z \in D$. Припустимо, що для аналітичної в D функції f справджується /1/, але f має скінченну кількість нулів $z_1, \dots, z_n \in D$. Очевидно, що $T(z, 1/f) = T(z, f) + O(1) \leq \ln K_1(z) + O(1)$, $z \rightarrow 1$, де T - невангіннівська характеристика. Нехай h_k - головна частина розкладу Лорана функції

$1/f$ в околі полюса z_k , $\mathcal{H} = \sum_{k=1}^n h_k$. Тоді $\varphi = 1/f - \mathcal{H}$ є аналітичною функцією в D і $T(z, \varphi) \leq \ln K_1(z) + O(1)$, $z \rightarrow 1$.

Звідси, використовуючи відому оцінку, одержуємо

$$\ln |\varphi(z)| \leq \frac{4}{1-|z|} \ln K_1\left(\frac{|z|+1}{2}\right) + O\left(\frac{1}{1-|z|}\right), \quad |z| \rightarrow 1. \quad /3/$$

З /1/ і /2/ випливає, що

$$|f(b_n)| \leq O\{K_1(b_n) K_2(|f_2(b_n)|)\} = O\{K_1(b_n) c_n\}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Тоді для деякого $\eta > 0$ при $n \geq n_0$ виконується

$$\begin{aligned} |\varphi(b_n)| &\geq |f(b_n)|^{-1} - |\mathcal{H}(b_n)| \geq \\ &\geq \eta \exp\{2^{n+2} \ln K_1(b_{n+1}) + 3^n\}. \end{aligned} \quad /4/$$

Але з /3/ випливає

$$|\varphi(b_n)| \leq \exp\{2^{n+2} \ln K_1(b_{n+1}) + O(2^n)\}, \quad n \rightarrow \infty. \quad /5/$$

З огляду на несумісність співвідношень /4/ і /5/ одержана суперечність доводить теорему.

Список літератури: I. Anderson J. M., Barth K. F.,
 Brannan D. A. Research problems in complex analysis. —
 Bull. London Math. Soc., 1977, № 2. Duren P. J. Theory of H^p
 spaces. N.Y. and London, Academic Press, 1970.

Стаття надійшла в редакцію 28.02.1979 р.

УДК 517.5

Д.М.Галь

ПРО МАКСИМАЛЬНИЙ ЧЛЕН АБСОЛЮТНО ЗБІЖНОГО У ПІВКОЛОДІ РЯДУ ДІРІХЛЕ

Нехай $f(z)$, $z = \sigma + it$ — аналітична у півколоді $\{z: \sigma < A\}$,
 $-\infty < A < \infty$ функція, задана рядом Діріхле

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp \{z \lambda_n\} \quad (1)$$

з невід'ємними показниками λ_n , $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$
 і абсцисою A абсолютної збіжності, а $M(\sigma) = \sup \{|f(\sigma + it)| : t < \infty\}$
 і $\mu(\sigma) = \max \{|a_n| \exp \{\sigma \lambda_n\} : n \geq 0\}$ — максимальний член ряду (1).

Вивченню зв'язку між $M(\sigma)$ і $\mu(\sigma)$ у випадку скінченного порядку
 росту присвячено статті [2, 3]. Ми такий зв'язок вивчаємо для
 довільного росту. Вважаємо що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln |a_n| + A \lambda_n) = \infty. \quad (2)$$

Умова (2) виконується тоді і тільки тоді, коли $\mu(\sigma) \rightarrow \infty$ при
 $\sigma \rightarrow A-0$ (надалі будемо писати $\sigma \rightarrow A$). Оскільки $\mu(\sigma) \leq M(\sigma)$,
 то з (2) випливає, що $M(\sigma) \rightarrow \infty$ при $\sigma \rightarrow \infty$. З (2) маємо

$$(\forall q > 0) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| \exp \{A \lambda_n\})^q = \infty \right\}.$$

Проте може існувати $q > 0$ таке, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| \exp \{A \lambda_n\})^{-q} = K(q) < \infty. \quad (3)$$

Наступна теорема дає оцінку $M(\sigma)$ через $\mu(\sigma)$ при виконанні
 умови (3).

Теорема I. Якщо для деякого $q > 0$ виконується /3/, то

$$\left(\forall \delta < A \right) \left\{ M(\delta) \leq 2K(q) \left(M(\delta + \frac{q}{1+q}(A-\delta)) \right)^{1+q} \right\}.$$

З теореми I випливає наступний наслідок: якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln / \ln (|a_n| \exp \{ A \lambda_n \}) = h < \infty. \quad /4/$$

то $\forall \varepsilon > 0$ при $\delta_\varepsilon(\varepsilon) \leq \delta \leq A$ виконується

$$M(\delta) \leq K(\varepsilon) \left(M(\delta + \frac{h+\varepsilon}{1+h+\varepsilon}(A-\delta)) \right)^{1+h+\varepsilon},$$

де $K(\varepsilon)$ - деяка стала.

Умови /3/ і /4/ є умовами на ріст коефіцієнтів ряду /1/. Коли, наприклад, $A = 0$, то з цих умов випливає, що $|a_n|$ досить швидко прямує до ∞ при $n \rightarrow \infty$. Проте можна одержати оцінки $M(\delta)$ через $\mu(\delta)$ і у випадку, коли про ріст $|a_n|$ нічого невідомо, але при цьому треба накладати умови на ріст $M(\delta)$ і щільність показників λ_n . Для характеристики росту $M(\delta)$ користуємось узагальненими порядками, наведеними у праці [1]. Говоримо, що функція $\alpha \in \Lambda$, якщо α визначена на $[a, \infty]$, додатна, неперервна, зростає до ∞ разом з x і є повільно зростаючою, тобто для кожного $c \in (0, \infty)$ виконується $\alpha(cx) \sim \alpha(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Вважатимемо, що $\alpha(\infty) = \infty$. У нас можуть траплятися значення функції α у точках, де вона не визначена; приписуємо їй тоді значення $\alpha(a)$. Нехай далі φ - додатна неспадна при $\delta < A$ функція. Приймемо

$$\rho_{\alpha\beta}(\varphi) = \lim_{\delta \rightarrow A} \alpha(\varphi(\delta)) / \beta(1/(A-\delta)), \quad \lambda_{\alpha\beta}(\varphi) = \lim_{\delta \rightarrow A} \alpha(\varphi(\delta)) / \beta(1/(A-\delta))^{1/5}$$

де α і β - неспадні неперервні функції, визначені на $[a, \infty]$

Якщо в /5/ прийняти $\varphi(\delta) = \ln M(\delta)$, то одержимо величини

$$\rho_{\alpha\beta}(\ln M) = \rho_{\alpha\beta}(f) \quad \text{і} \quad \lambda_{\alpha\beta}(\ln M) = \lambda_{\alpha\beta}(f), \quad \text{які називаються відповідно порядком і узагальненим нижнім порядком функції /1/}.$$

Нехай тепер $\alpha \in \Lambda$, $\beta \in \Lambda$, а $0 < c < \infty$. Приймаємо

$$F(x; c) = \beta^{-1}(c\alpha(x)), \quad F^{-1}(x; c) = \alpha^{-1}(c\beta(x)).$$

Теорема 2. Нехай $\alpha \in \Lambda$, $\beta \in \Lambda$ і для кожного $c \in (0, \infty)$ при $x \rightarrow \infty$ виконується

$$x/F(x; c) \uparrow \infty, \quad \alpha(x/F(x; c)) \sim \alpha(x). \quad /6/$$

Тоді, якщо $\rho_{\alpha\beta}(t) < \infty$ і для кожного $\gamma < \frac{1}{\rho_{\alpha\beta}}(t)$ виконується

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^{-1} F(\lambda_n, \gamma) \ln n < \infty,$$

то $\forall \varepsilon > 0$ при $\phi_0(\varepsilon) \leq \phi < A$ існує нерівність

$$M(\phi) \leq \mu(\phi) \exp\{(A-\phi)F^{-1}(1/(A-\phi); \rho_{\alpha\beta}(\ln \mu) + \varepsilon)\}.$$

Нехай тепер $n(t)$ - численна функція послідовності (λ_n) , а

$$q_{\alpha\beta}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t)/\beta(t/\ln n(t)), \quad \rho_{\alpha\beta}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t)/\beta(t/\ln n(t)).$$

Наступна теорема доповнює теорему 2.

Теорема 3. Нехай $\alpha \in \Lambda$, $\beta \in \Lambda$ і виконуються умови /6/.

Тоді $\forall q \in (0, 1)$ і $\forall \varepsilon > 0$ при $\phi_0(\varepsilon) \leq \phi < A$ наявна нерівність

$$M(\phi) \leq \mu(\phi + q(A-\phi)) \{1 + \exp\{q(A-\phi)F^{-1}(1/(qA-q\phi); \rho_{\alpha\beta}(t) + \varepsilon)\}\}.$$

Істотною умовою в теоремі 2 є пара з умов /6/, з якої випливає, що $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \rightarrow \infty$. Постає питання: чи можна одержати відповідні оцінки, якщо співвідношення $\alpha(x) = o(\beta(x))$ не виконується? З огляду на це наведемо наступну теорему.

Теорема 4. Нехай $\alpha \in \Lambda$, $\beta \in \Lambda$ і для кожного $c \in (0, \infty)$ при $x \rightarrow \infty$ виконується

$$x/F^{-1}(x; c) \uparrow \infty, \quad \beta(x/F^{-1}(x; c)) \sim \beta(x). \quad /7/$$

Тоді, якщо $\rho_{\alpha\beta}(t) < \infty$ і для кожного $\gamma > \rho_{\alpha\beta}(t)$ виконується

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n / F^{-1}(\lambda_n, \gamma) < \infty,$$

$\forall \varepsilon > 0$ при $\phi_0(\varepsilon) \leq \phi < A$ є нерівність

$$M(\phi) \leq \mu(\phi) \exp\{F^{-1}(1/(A-\phi); \rho_{\alpha\beta}(\ln \mu) + \varepsilon)\}.$$

Нехай

$$q_{\alpha\beta}^*(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(\ln n(t))/\beta(t), \quad \rho_{\alpha\beta}^*(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(\ln n(t))/\beta(t).$$

Аналогом теореми 3 є така теорема.

Теорема 5. Якщо $\alpha \in \Lambda$, $\beta \in \Lambda$ і виконуються умови /7/, то $\forall \epsilon \in (0,1)$ і $\forall \epsilon > 0$ при $G_\epsilon(\epsilon) \leq G < A$ виконуються

$$M(G) \leq M(G + q(A-G)) \{ 3 + \exp \{ F^{-1}(1/(qA - qG)); \rho_{\alpha\beta}^*(f) + \epsilon \} \}.$$

Безпосереднім наслідком наведених вище теорем є теорема 6.

Теорема 6. Нехай $\alpha \in \Lambda$, $\beta \in \Lambda$. Тоді:

а/ якщо виконуються умови /4/, то $\lambda_{\alpha\beta}(f) = \lambda_{\alpha\beta}(\ln \mu)$ і

$$\rho_{\alpha\beta}(f) = \rho_{\alpha\beta}(\ln \mu);$$

б/ коли виконані умови теореми 2, то $\rho_{\alpha\beta}(f) = \rho_{\alpha\beta}(\ln \mu)$;

в/ якщо виконані умови теореми 3, то $\rho_{\alpha\beta}(\ln \mu) \leq \rho_{\alpha\beta}(f) \leq$

$$\leq \max \{ \rho_{\alpha\beta}(\ln \mu), \rho_{\alpha\beta}(f), \lambda_{\alpha\beta}(\ln \mu) \leq \lambda_{\alpha\beta}(f) \leq \max \{ \lambda_{\alpha\beta}(\ln \mu), \rho_{\alpha\beta}(f) \} \};$$

г/ коли виконані умови теореми 4, то $\rho_{\alpha\beta}(f) = \rho_{\alpha\beta}(\ln \mu)$;

д/ якщо виконані умови теореми 5, то $\rho_{\alpha\beta}(\ln \mu) \leq \rho_{\alpha\beta}(f) \leq$

$$\leq \max \{ \rho_{\alpha\beta}(\ln \mu), \rho_{\alpha\beta}^*(f) \}, \lambda_{\alpha\beta}(\ln \mu) \leq \lambda_{\alpha\beta}(f) \leq \max \{ \lambda_{\alpha\beta}(f), \rho_{\alpha\beta}^*(0) \}.$$

Наступна теорема засвідчує, що оцінки у твердженнях в/ і д/ теореми 6, взагалі кажучи, поліпшити не можна.

Теорема 7. Нехай $\alpha \in \Lambda$, $\beta \in \Lambda$ і $|a_n| \exp \{ A \lambda_n \} \geq c > 0$ при $n \geq 1$. Тоді, якщо виконуються умови /6/, $\lambda_{\alpha\beta}(f) \geq q_{\alpha\beta}(f)$, а коли виконуються умови /7/, то $\lambda_{\alpha\beta}(f) \geq q_{\alpha\beta}^*(f)$.

З теореми 7 видно, що коли $a_n = e^{-A \lambda_n}$, виконуються умови /6/, а послідовність (λ_n) вибрана так, що $q_{\alpha\beta}(f) = \rho_{\alpha\beta}(f)$, то $\rho_{\alpha\beta}(\ln \mu) = 0$, а $\rho_{\alpha\beta}(f) \geq \rho_{\alpha\beta}(f)$ і за теоремою 6 /твердження в/ і $\rho_{\alpha\beta}(f) = \rho_{\alpha\beta}(f)$ /. Аналогічно доводиться, що твердження д/ теореми 6 поліпшити не можна.

Список літератури: 1. Г а л ь В.М., Ш е р е м е т а М.М. Про ріст аналітичних у півплощині функцій, заданих рядами Діріхле. - ДАН УРСР, сер. А, 1970, № 12. 2. Д а г е н е В.Я. О центральном показателе ряда Дирихле. - Литовск, матем. сб., 1968, т.8, № 3.

Стаття надійшла в редакцію 10.II.1978 р.

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ПОВІЛЬНОГО РОСТУ,
ЗАДАНИХ РЯДАМИ ДІРІХЛЕ

Нехай f - ціла функція, задана абсолютно збіжним в усій площині рядом Діріхле

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z \lambda_n}, \quad z = x + iy, \quad /1/$$

де $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, $M(x) = \sup\{|f(x+iy)| : |y| < \infty\}$, $m(x) = \inf\{|f(x+iy)| : |y| < \infty\}$, а $\mu(x)$ і $\nu(x)$ - відповідно максимальний член і центральний індекс ряду /1/. Вкажемо на зв'язки між ростом величин $M(x)$, $m(x)$, $\mu(x)$ і $\lambda_{\nu}(x)$ для цілих функцій /1/, які задовольняють умову

$$\ln M(x) \leq Ax^p, \quad 1 < p < 2, \quad /2/$$

при всіх досить великих x . Наведені тут теореми доповнюють результати статей [1, 2].

Надалі через C_0 позначатимемо довільну вимірну множину з $]-\infty, \infty[$ таку, що $\int_{C_0 \cap [0, x]} dx = o(x)$ при $x \rightarrow \infty$.

Теорема 1. Нехай для функції /1/ виконується /2/ і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n / \ln \lambda_n \leq \rho < 1/(p-1).$$

Тоді для кожних $\varepsilon > 0$ і $\eta \in]0, (1-\rho(p-1))/\rho[$ виконується $M(x) \leq \mu(x) (1 + \lambda_{\nu+1}^{\rho+\varepsilon} \exp\{-\ell_{\nu} \lambda_{\nu}^{\eta/(p-1)}\})$ для всіх x зовні деякої множини C_0 , де $\ell_{\nu} = \min\{\lambda_{\nu} - \lambda_{\nu-1}, \lambda_{\nu+1} - \lambda_{\nu}\}$ і $\nu = \nu(x)$.

Теорема 2. Нехай для функції /1/ виконується /2/ і $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq h > 0$, $n \geq 0$. Тоді для кожного $\eta \in]0, \frac{2-p}{p}[$ і для всіх x зовні деякої множини C_0 виконується $M(x) \leq \mu(x) (1 + \exp\{-\lambda_{\nu}^{\eta/(p-1)}\})$.

Теорема 3. При виконанні умов теореми 2 для кожного $\eta \in]0, (2-p)/p[$ і для всіх x зовні деякої множини C_0 виконується $m(x) \geq M(x) (1 - \exp\{-\lambda_{\nu}^{\eta/(p-1)}\})$.

Теорема 4. Нехай для функції /1/ виконується /2/ та $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \lambda_n^{-\alpha}$ при $n \geq n_0$ і деякому $\alpha < (2-p)/(p^2-1)$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ і для всіх X зовні деякої множини C_0 виконується $m(X) \geq (1-\varepsilon) M(X)$.

Список літератури: І. Ш е р е м е т а М.Н. Метод Вимана-Валірона для цілих функцій, заданих рядами Діріхле. - ДАН СССР, 1978, т.240, № 5. 2. Ш е р е м е т а М.М. Застосування методу Вімана-Валірона до рядів Діріхле. - ДАН УРСР, сер. А, 1979, № 2.

Стаття надійшла в редколегію 28.02.1979 р.

УДК 517.535.4

М.М.Шеремета

ПРО ДІЙСНІ ЗНАЧЕННЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

Нехай f - ціла функція порядку ρ , а $\omega(z)$ - число точок на $\{z: |z|=z\}$, в яких $\operatorname{Im} f = 0$. А.О.Гельфонд [2] показав, що

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \ln \omega(z) / \ln z = \rho.$$

Ми узагальнюємо цей результат на випадок узагальнених порядків.

Через Λ позначимо клас неперервних додатних на $[a, \infty]$, $a \geq 0$, функцій α таких, що $\alpha(x) \neq \infty$ і $\alpha(cx) \sim \alpha(x)$ при $x \rightarrow \infty$ для кожного $c \in (0, \infty)$.

Теорема 1. Нехай $\alpha \in \Lambda$, $\beta \in \Lambda$ і $\alpha(\alpha'(\beta(x)) \ln x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow \infty$.

Тоді

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \alpha(\omega(z)) / \beta(z) = \rho_{\alpha\beta}(f),$$

де $\rho_{\alpha\beta}(f)$ - узагальнений порядок функції f , визначений рівністю [1]

$$\rho_{\alpha\beta}(f) = \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \alpha(\ln M(z, f)) / \beta(z).$$

Доведення цієї теореми базується на формулі

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \alpha(n(z, a, f)) / \beta(z) = \rho_{\alpha\beta}(f) \quad //1/$$

для всіх $a \in \mathbb{C}$ за винятком, можливо, одного, де $n(z, a, f)$ - число a - точок функції f в $\{z: |z| \leq z\}$. Рівність /I/ доводимо за допомогою методів розподілу значень. Дальше доведення теореми проводимо аналогічно доведенню відповідної теореми з праці [3].

Оскільки універсальної шкали росту цілих функцій побудувати не можна, корисною може бути наступна теорема.

Теорема 2. Нехай $\Phi(x) = \ln M(e^x, f)$, а ψ - функція, обернена до Φ . Тоді якщо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln^2 x \ln \Phi(x) = \infty,$$

$$\text{то } \lim_{z \rightarrow \infty} \psi(\omega(z)) / \ln z = 1$$

Список літератури: 1. Ш е р е м е т а М.Н. О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения. - Изв. вузов. Математика, 1967, № 2. 2. *Gelfond A.O.*

Über die harmonischen Functionen.

- Тр.

физ.-мат. ин-та АН СССР им. В.А.Стеклова, 1934, т.5. 3. *Hellerstein S.*

Korwaan J. The real values of an entire function. - Bull. Amer. Math. Soc., 1964, v. 70.

Стаття надійшла в редколегію 12.12.1979 р.

УДК 517.537.6

М.М.Хом'як

ТЕОРЕМА ТИПУ ВІМАНА ДЛЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ НУЛЬОВОГО ПОРЯДКУ ЗА РІТТОМ, ЗАДАНИХ РЯДАМИ ДІРІХЛЕ

Нехай $f(z)$, $z = x + iy$ - ціла функція, задана абсолютно збіжним у всій площині рядом Діріхле

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^z, \quad a_1 = 1. \quad /I/$$

$M(x) = \sup \{|f(x + iy)| : |y| < \infty\}$, а $\mu(x)$ і $\nu(x)$ - відповідно максимальний член і центральний індекс ряду /I/.

Верхньою щільністю dE вимірної множини $E \subset (-\infty, \infty)$ називається величина

$$dE = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{m(E \cap [0, x])}{x}, \quad mE = \int_{E \cap [0, \infty)} dx.$$

Через E_q позначимо довільну множину, верхня щільність якої не перевищує $q \in [q_1]$.

Ми вже розглядали клас функцій /I/, які задовольняють умову

$$\ln M(x) \leq Ax^p, \quad 1 < p < \infty, \quad 0 < A < \infty, \quad /2/$$

і встановили [2], що для цього класу функцій, кожного $q \in (0, 1)$ та $B > \frac{1}{2} (q^{2-2p} A^2 p^{2p-2} (p-1)^{2-p})^{1/p}$ і для всіх x зони деякої множини E_q виконується

$$M(x) \leq 2\sqrt{\pi B} M(x) \{ \ln M(x) \}^{\frac{p-2}{2p}} \exp \left\{ D (\ln M(x))^{\frac{p-1}{p}} + B (\ln M(x))^{\frac{p-2}{p}} \right\}, \quad /3/$$

де $D = (q^{1-p} A p^{2p-1} (p-1)^{1-p})^{1/p}$.

Зараз проаналізуємо ширший клас функцій /I/, а саме функції нульового порядку за Ріттом. При цьому використаємо результати і метод з праці [3].

Ріст $M(x)$ порівняємо з додатною і випуклою на $(-\infty, \infty)$ функцією $\Phi(x)$, яка прямує до 0 при $x \rightarrow \infty$ [3]. Через $\varphi(x)$ позначимо функцію, обернену до $\Phi(x)$, а через $\varphi'(x)$ - її правосторонню похідну.

Безпосереднім наслідком теореми 3 праці [3] є наступна лема.

Л е м а I. Нехай функція /I/ задовольняє умову

$$\ln M(x) \leq \Phi(x). \quad /4/$$

Тоді для кожного $q \in [q_1]$, всіх $n \geq 1$ та x зони деякої множини E_q виконується

$$|a_n|/n^x \leq M(x) \exp \left\{ -\frac{q}{2} \varphi'(\max(\ln n, \ln x)) \ln^2 \frac{n}{x} \right\}, \quad /5/$$

де $\varphi_1(x) = \varphi(x)$ при $x \geq x_0$ і $\varphi_1(x) = \frac{x}{x_0} \varphi(x_0)$ при $0 \leq x \leq x_0$, а $x_0 > 0$ - довільна точка, для якої $\varphi(x_0) > 0$.

Л е м а 2. Для того щоб функція /1/ мала нульовий порядок за Ріттом, необхідно і досить, щоб існувала функція $\Phi(x)$, яка задовольняє /4/ і умову

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = 0. \quad /6/$$

Д о в е д е н н я . Справді, з умови /6/ випливає, що для функції /1/ порядок за Ріттом $\rho_R = 0$. Нехай тепер для цілої функції /1/ порядок за Ріттом $\rho_R = 0$. Тоді [1] існує такий уточнений порядок $\rho_R(x)$, що

$$\rho_R(x) \rightarrow 0, \quad x \rho_R'(x) \ln x \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty,$$

$$\ln \ln M(x) \leq x \rho_R(x), \quad x \geq x_0.$$

Візьмемо $\Phi(x) = e^{x \rho_R(x)}$, $x \geq x_0$. Маємо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\rho_R(x) + x \rho_R'(x)) = 0, \quad \text{тобто виконується /6/}.$$

Теорема I. Нехай функція /1/ задовольняє умову /4/ з $\Phi(x)$, яка задовольняє /6/. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ та $q \in (0, 1)$ і всіх x зовні деякої множини E_q виконується

$$M(x) \leq \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}} (1+\varepsilon) \nu(x) \frac{\exp\{2q\psi(\varepsilon\nu + k(\varepsilon\nu))\}}{\sqrt{\psi'(\varepsilon\nu + k(\varepsilon\nu))}} M(x), \quad /7/$$

де

$$k(x) = \sqrt{\frac{ax}{\psi'((1+\varepsilon)x)}}, \quad a > \frac{2}{\varepsilon}. \quad /8/$$

Д о в е д е н н я . З умови /6/ випливає, що $x\psi'(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$, отже $k(x) = o(x)$, $x \rightarrow \infty$. Нехай η - довільне фіксоване число, $0 < \eta < \min(\varepsilon, \frac{2a}{\varepsilon} - 1)$. Згідно з лемою I, для всіх x зовні деякої множини E_q маємо

$$\frac{M(x)}{M(x)} \leq \frac{1}{M(x)} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^x \leq \sum_{n < \nu} \exp\left\{-q\psi(\varepsilon\nu) \frac{\varepsilon^2 n}{2}\right\} +$$

$$+ 1 + \left(\sum_{v < n < ve^{k(\ln v)}} + \sum_{v \cdot e^{k(\ln v)} \leq n < v^{1+\eta}} + \sum_{n \geq v^{1+\eta}} \right) \exp \left\{ -\frac{q}{2} \varphi'(\ln n) \ln^2 \frac{n}{v} \right\} = 1 + \sum_{i=1}^4 \phi_i(x). \quad /9/$$

Оцінюючи окремо кожний доданок у /9/, запишемо

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \sum_{n < v} \exp \left\{ -\frac{q}{2} \varphi'(\ln v) \ln^2 \frac{n}{v} \right\} \leq \int_1^v \exp \left\{ -\frac{q}{2} \varphi'(\ln v) \ln^2 \frac{u}{v} \right\} du = \\ &= v \int_{-\ln v}^0 \exp \left\{ -\frac{q}{2} \varphi'(\ln v) t^2 + t \right\} dt \leq v \int_{-\infty}^0 \exp \left\{ -\left(\sqrt{\frac{q \varphi'(\ln v)}{2}} t - \sqrt{\frac{1}{2q \varphi'(\ln v)}} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2q \varphi'(\ln v)} \right\} dt = v \cdot e^{\frac{1}{2q \varphi'(\ln v)}} \sqrt{\frac{2}{q \varphi'(\ln v)}} \times \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{1}{2q \varphi'(\ln v)}}} e^{-t^2} dt = \\ &= v(1+o(1)), \quad x \rightarrow \infty \end{aligned} \quad /10/$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} \phi_2(x) &= \sum_{v < n < ve^{k(\ln v)}} \exp \left\{ -\frac{q}{2} \varphi'(\ln n) \ln^2 \frac{n}{v} \right\} \leq \sum_{v < n < ve^{k(\ln v)}} \exp \left\{ -\frac{q}{2} x \right. \\ &\quad \left. \times \varphi'(\ln v + k(\ln v)) \ln^2 \frac{n}{v} \right\} \leq \frac{v \cdot e^{\frac{1}{2q \varphi'(\ln v + k(\ln v))}}}{\sqrt{\frac{q}{2} \varphi'(\ln v + k(\ln v))}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{q \varphi'(\ln v + k(\ln v))}} v(x) \cdot e^{\frac{1}{2q \varphi'(\ln v + k(\ln v))}} \end{aligned} \quad /11/$$

Далі, враховуючи /8/, маємо

$$\begin{aligned} \phi_3(x) &= \sum_{v \cdot e^{k(\ln v)} \leq n < v^{1+\eta}} \exp \left\{ -\frac{q}{2} \varphi'(\ln n) \ln^2 \frac{n}{v} \right\} \leq \sum_{v \cdot e^{k(\ln v)} \leq n < v^{1+\eta}} \exp \left\{ -\frac{q}{2} x \right. \\ &\quad \left. \times \varphi'((1+\eta) \ln v) k^2(\ln v) \right\} \leq v^{-\frac{q}{2} \varphi'((1+\eta) \ln v) \frac{k^2(\ln v)}{\ln v} + 1 + \eta} = \\ &= v^{-\frac{q}{2} a \frac{\varphi'((1+\eta) \ln v)}{\varphi'((1+\varepsilon) \ln v)} + 1 + \eta} \leq v^{-\frac{q}{2} + 1 + \eta} = o(1), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad /12/$$

І, нарешті, враховуючи, що $x\varphi'(x) \rightarrow \infty$, дістаємо

$$\begin{aligned} \Theta_n(x) &= \sum_{n \geq v^{1+\eta}} \exp\left\{-\frac{q}{2}\varphi'(\ln n)\ln^2 \frac{n}{v}\right\} \leq \sum_{n \geq v^{1+\eta}} \exp\left\{-\frac{q}{2}x\right. \\ &\quad \left. \times \varphi'(\ln n)\left(\frac{q}{q+1}\right)^2 \ln^2 n\right\} \leq \sum_{n \leq v^{1+\eta}} n^{-\frac{q}{2}\left(\frac{q}{q+1}\right)^2 \varphi'(\ln n)\ln n} \quad /13/ \\ &= o(1), x \rightarrow \infty \\ &= 1/(2q\varphi'(\ln v + k(\ln v))) \end{aligned}$$

Об'єднуючи /10/ - /13/ і враховуючи, що $\frac{e}{\sqrt{\varphi'(\ln v + k(\ln v))}}$ монотонно зростаюча функція, отримуємо /7/.

Зауважимо, що при додатковій умові

$$\varphi'((1+o(1))x) \sim \varphi'(x), \quad x \rightarrow \infty, \quad /14/$$

і при умовах теореми 1 одержуємо, що для всіх X зовні деякої множини E_q

$$M(x) \leq \mu(x) v(x) \exp\left\{\frac{1+o(1)}{2q\varphi'(\ln v(x))}\right\}, \quad x \rightarrow \infty \quad /15/$$

Нехай $\Psi(x) = \int_0^x t\varphi'(t) dt$. Враховуючи, що $t\varphi'(t) > 0$ і згідно /6/ $t\varphi'(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, маємо $\Psi(x)$ - монотонно зростає до ∞ при $x \rightarrow \infty$. Через $\Psi^{-1}(x)$ позначимо функцію, обернену до $\Psi(x)$. Тоді $\Psi^{-1}(x) > 0$ при $x > 0$ і $\Psi^{-1}(x)$ монотонно прямує до ∞ при $x \rightarrow \infty$.

Т е о р е м а 2. Нехай виконуються умови теореми 1 і умова /14/. Тоді для кожного $q \in (0,1)$ і для всіх X зовні множини E_q виконуються

$$M(x) \leq \mu(x) \exp\left\{\Psi^{-1}\left(\frac{\ln \mu(x)}{q}\right) + \frac{1+q}{2q\varphi'\left(\Psi^{-1}\left(\frac{\ln \mu(x)}{q}\right)\right)}\right\}. \quad /16/$$

Приклад функції

$$f(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n^{-(\ln \ln n)^2} z \quad /17/$$

вказує на точність оцінок /15/ і /16/.

Для функції /17/ виконується співвідношення

$$M(x) = \sqrt{\frac{\pi}{e}} \frac{1+O(1)}{\sqrt{x}} \exp \left\{ 2e^{\sqrt{x+2}-1} (\sqrt{x+2}-1) + \frac{\sqrt{x+2}}{2} \right\},$$

отже, виконується /4/ з $\Phi(x) = 2(1+O(1))\sqrt{x} e^{\sqrt{x+2}-1}$, яка задовольняє /6/, /14/ та $\Psi'(x) \sim \frac{x}{2 \ln x}$. Крім цього, для функції /17/ маємо

$$\mu(x) = (1+O(1)) \exp \left\{ 2e^{\sqrt{x+1}-1} (\sqrt{x+1}-1) \right\},$$

$$\nu(x) = \exp \left\{ e^{\sqrt{x+1}-1} \right\} + \alpha(x), \quad |\alpha(x)| \leq 1/2,$$

і

$$M(x) = \begin{cases} \mu(x) \nu(x) \exp \left\{ (1+O(1)) \frac{\ln \nu(x)}{4 \ln \ln \nu(x)} \right\}, \\ \mu(x) \exp \left\{ \frac{\ln \mu(x)}{2 \ln \ln \mu(x)} + (1+O(1)) \frac{\ln \mu(x)}{4 \ln^2 \ln \mu(x)} \right\}. \end{cases}$$

Висловлюємо подяку М.М.Шереметі за керівництво роботою.

Список літератури: 1. Гольдберг А.А., Островський И.В. Распределение значений мероморфных функций. - М.: Наука, 1970. 2. Хом'як М.М. Асимптотичні властивості цілих функцій, заданих рядами Діріхле. - Вісн. Львів.ун-ту, сер. мех.-мат., 1979, вип. 16. 3. Шеремета М.Н. Метод Вимана - Валирона для рядов Дирихле. УМЖ, 1978, т.30, № 4.

Стаття надійшла в редколегію 2.02.1979 р.

УДК 517.535.4

А.А.Кошпратик

ДВІ ВЛАСТИВОСТІ МЕРОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ

ЦІЛКОМ РЕГУЛЯРНОГО РОСТУ

Нехай $\lambda(z)$ - додатна, неспадна, неперервна, неогмежена на $]0, \infty[$ функція, яка називається функцією росту, Λ - клас мероморфних функцій скінченного λ -типу [8]. Припускаємо, що існує

стал $M > 0$ така, що для всіх $z > 0$ виконується $\lambda(2z) \leq M\lambda(z)$.
Тоді через Λ^0 позначимо клас мероморфних функцій цілком регулярного росту [2], $\Lambda^0 \subset \Lambda$.

Нехай Z та W - відповідно послідовності нулів і полюсів функції $f \in \Lambda$. $S(z, \varphi) - S(z, 0)$ - кількість нулів функції f у секторі $\{z: 0 < \arg z \leq \varphi, |z| \leq z\}$, помножена на 2π , де $0 < \varphi \leq 2\pi$. Рівність

$$S(z, \varphi + 2\pi) - S(z, \varphi) = S(z, 2\pi) - S(z, 0) \quad /1/$$

визначає при будь-яких виборах значень $S(z, 0)$ і при кожному $z > 0$ клас неспадних неперервних справа функцій від $\varphi \in \mathbb{R}$ які вважаємо еквівалентними і позначаємо також через $S(z, \varphi) = S(z, \varphi, Z)$. Аналогічно визначаємо $S(z, \varphi, W)$.

Приймемо

$$S(z, \varphi) - S(z, 0) = \int_0^z \frac{S(t, \varphi) - S(t, 0)}{t} dt,$$

$$G(z, \varphi) = S(z, \varphi, Z) - S(z, \varphi, W),$$

$$N_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi} dG(z, \varphi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Нехай $\rho(z)$ - деякий уточнений порядок [3], $\rho(z) \rightarrow \rho > 0$ при $z \rightarrow \infty$.

Означення 1. Пара (Z, W) має усереднену кутову щільність /відносно $z^{\rho(z)}$ /, якщо існує функція $G(\varphi)$ обмеженої варіації на $[0, 2\pi]$ така, що

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{-\rho(z)} \|G(z, \varphi) - G(\varphi)\| = 0,$$

де

$$\|G\| = \max_{a \in \mathbb{R}} \min_{c \in \mathbb{R}} \int_a^{a+2\pi} |G(\varphi) + c| d\varphi, \quad /2/$$

і G продовжена на $\mathbb{R}$ за допомогою умови /1/.

Теорема 1. Нехай $\lambda(z) = z^{\rho(z)}$, $f \in \Lambda$. Для того щоб $f \in \Lambda^0$ при нецілому ρ , необхідно і досить, щоб пара (Z, W) мала усе-

реднену кутову щільність, а при цілому ρ , крім того, має існувати границя

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{-\rho(z)} \int_0^{2\pi} e^{-i\rho\theta} \ln |f(ze^{i\theta})| d\theta. \quad /3/$$

Д о в е д е н н я . Нехай X - лінійний простір неперервних справа і обмеженої варіації функцій на $[0, 2\pi]$. Продовжимо їх на R за допомогою умови /1/. Функції F та G з X вважаємо еквівалентними, якщо $F(x) - G(x) \equiv \text{const}$.

Введемо на X норму співвідношенням /2/ [6]. Коефіцієнти Фур'є-Стільтьєса функції $F \in X$ позначаємо через

$$N_k^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi} dF_n(\varphi), \quad k \in Z.$$

Використовуємо наступне твердження, доведене Леві [6].

Л е м а I. Нехай (F_n) - послідовність з X , для якої існує стала $K > 0$ така, що для всіх $n \in N$ виконується

$$\int_0^{2\pi} |dF_n(\varphi)| \leq K. \quad /4/$$

Для того щоб послідовність (F_n) збігалась до нуля по нормі простору X , необхідно і досить, щоб для кожного $k \in Z$ виконувалось

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_k^n = 0.$$

За умов теореми I критерієм належності функції f до класу Λ^0 /див. [2], теорема IO/ є у випадку нецілого ρ умова існування границь

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{-\rho(z)} N_k(z) = \Delta_k, \quad k \in Z, \quad /5/$$

а у випадку цілого ρ , крім того, умова /3/. Зі співвідношення $f \in \Lambda$ очевидна [2, 7] умова /4/ для сім'ї $\{z^{-\rho(z)} G(z, \varphi)\}$, $z > 0$.

Звідси, та з /5/ за лемою 2 з праці [2] випливає існування функції $G(\varphi) \in X$, коефіцієнти Фур'є-Стільтьєса якої суміщаються з Δ_k , $k \in Z$. Для довільної послідовності (z_n) , $z_n \rightarrow \infty$,

позначимо

$$F_n(\varphi) = z_n^{-\rho(z_n)} \phi(z_n, \varphi) - \phi(\varphi).$$

З леми I та /5/ одержуємо тепер теорему I.

Через Λ^{0+} позначимо підклас класу Λ^0 мероморфних функцій з додатними нулями та полюсами. Клас Λ^{0+} називається нетривіальним, якщо в ньому існує функція з відмінним від тотожного нуля індикатором [2]. Позначимо

$$\lambda_1(z) = \int_0^z \frac{dt}{t} \int_0^t \frac{\lambda(\tau)}{\tau} d\tau,$$

$$\lambda^2 = \lim_{z \rightarrow \infty} \lambda(z) / \lambda_1(z) \leq \lim_{z \rightarrow \infty} \lambda(z) / \lambda_1(z) = \rho^2.$$

Теорема 2. Для того щоб клас Λ^{0+} при $\rho > 0$ був нетривіальним, необхідно і досить

$$\lambda(z) = z^\rho L(z), \quad /6/$$

де $L(z)$ - повільно змінна функція в сенсі Карамати [5], тобто для кожного $C > 0$ виконується

$$\lim_{z \rightarrow \infty} L(Cz) / L(z) = 1. \quad /7/$$

Д о в е д е н н я . Достатність очевидна, бо при виконанні /6/ нетривіальність Λ^{0+} добре відома [2, 3].

Припустимо тепер, що існує функція $f_0 \in \Lambda^{0+}$ з відмінним від тотожного нуля індикатором. Тоді $\lambda = \rho$, бо в протилежному випадку для двох нецілих ω_1, ω_2 , $\lambda \leq \omega_1 < \omega_2 \leq \rho$, із зображення для індикатора $h(\theta, f_0)$ випливало б [2]

$$h(\theta, f_0) = A_1 \cos \omega_1(\theta - \pi) = A_2 \cos \omega_2(\theta - \pi), \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \\ A_1 \neq 0, A_2 \neq 0, \text{ що неможливо. Необхідність випливає з наступної леми.}$$

Л е м а 2. Для того щоб функція росту $\lambda(z)$ зображалась у вигляді /6/, де L задовольняє умову /7/, необхідно і досить $\lambda = \rho$.

Це твердження було висловлене М.В.Говоровим.

Необхідність очевидна. Доведемо достатність. Якщо позначити $\lambda_1(e^x) = y(x)$, то легко зауважити, що рівність $\mathcal{R} = \rho$ перешеться у вигляді

$$y'' - [\rho^2 + o(1)]y = 0, \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Оскільки $y(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, то враховуючи відомі результати [1, 4, 7], одержуємо $y(x) = ay_1(x) + by_2(x)$,

$$a \neq 0, \quad y_1'/y_1 \rightarrow \rho, \quad y_2'/y_2 \rightarrow -\rho \quad \text{при } x \rightarrow +\infty.$$

Звідси легко випливає /6/.

Ми вдячні А.А.Гольдбергу та О.Е.Єременку, які допомогли спростити початкове доведення леми 2.

Список літератури: 1. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1954. 2. Кондратик А.А. Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста. — Математический сборник, 1978, 106, № 3. 3. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. — М.: Гостехиздат, 1956. 4. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1954, т.2. 5. Karamata J. Sur un mode de croissance régulière des fonctions. — *Mathematica (Cluj)*, 1930, 4. 6. Liévy P. L'espace de répartitions linéaires. — *Bull. des Sciences Math.*, 1938, 62. 7. Perron J. Ueber lineare Differentialgleichungen bei denen die unabhängige Variable reelle ist. — *Journ. für die reine und ang. Math.*, 1913, 142. 8. Rubel L.A., Taylor B.A. A Fourier series method for meromorphic and entire functions. — *Bull. Soc. Math. France*, 1968, 96.

Стаття надійшла в редколегію 13.03.1979 р.

УДК 517.574

А.А.Кондратик

ПРО УЗАГАЛЬНЕННЯ КЛАСІВ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

ЦІЛКОМ РЕГУЛЯРНОГО РОСТУ

Нехай $\lambda(\tau)$ — додатна, неспадна, неперервна на $]0, \infty[$ функція, $\lambda(\tau) \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow \infty$, яка називається функцією росту.

Через L позначимо клас субгармонічних в S функцій u , кожна з яких гармонічна в деякому околі нуля і для кожної з яких існує стала A така, що для всіх $z > 0$ виконується $T(z, u) \leq A \lambda(z)$, де $T(z, u)$ — неванлінівська характеристика функції u [5]. Через L^0 позначимо підклас класу L функцій u , для яких існує границя

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda(z)} \int_{\eta}^{\varphi} u(z e^{i\theta}) d\theta$$

при довільних $\eta, \varphi \in R$?

А.А.Гольдберг показав [1], що підклас $\Lambda^0 \subset L^0$ функцій $u = \ln |f|$, де f — ціла, при $\lambda(z) = z^{\rho(z)}$, $\rho(z)$ — уточнений порядок [4], суміщається з класом цілих функцій цілком регулярного росту в сенсі Левіна-Пфлгера [3, 4].

Нехай

$$c_k(z) = c_k(z, u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} u(z e^{i\theta}) d\theta, \quad k \in Z.$$

Формули, що виражають коефіцієнти Фур'є $c_k(z, u)$ через розподіл мас μ , асоційованих за Ріссом з функцією u , встановлені П.Новеразом [6].

Теорема I. Якщо $u \in L^0$, тоді для кожного $k \in Z$ існує скінченна границя

$$\lim_{z \rightarrow \infty} c_k(z, u) / \lambda(z) = c_k[u] = c_k. \quad (I)$$

Доведення цілком аналогічне доведенню необхідності в теоремі I праці [3].

Позначимо далі, вважаючи $\frac{1}{\infty} = 0$, $\infty^2 = \infty$,

$$\lambda_1(z) = \int_0^z \frac{dt}{t} \int_0^t \frac{\lambda(\tau)}{\tau} d\tau,$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \lambda(z) / \lambda_1(z) = x^2 \leq \rho^2 = \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \lambda(z) / \lambda_1(z),$$

$$\delta(z, \varphi) - \delta(z, \eta) = 2\pi\mu(\{z: |z| \leq z, \eta < \arg z \leq \varphi\}),$$

$$S(z, \varphi) - S(z, \eta) = \int_0^z \frac{s(t, \varphi) - s(t, \eta)}{t} dt,$$

$$N_\kappa(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\kappa\theta} dS(z, \theta), \quad N_0(z) = N(z).$$

Обернені формули для коефіцієнтів Фур'є $C_\kappa(z)$ одержуємо так само, як і для мероморфних функцій [3]. Вони мають вигляд

$$N_\kappa(z) = C_\kappa(z) - \kappa^2 \int_0^z \frac{dt}{t} \int_0^t \frac{C_\kappa(\tau)}{\tau} d\tau. \quad (2)$$

Означення I. Дійсна 2π -періодична функція $h(\theta)$ називається $[\alpha, \rho]$ -тригонометрично опуклою, $0 \leq \alpha \leq \rho \leq +\infty$, якщо вона ω -тригонометрично опукла [3] при кожному ω , $\alpha \leq \omega \leq \rho$. Під 0 - тригонометрично опуклими функціями розумімо невід'ємні сталі, а під ∞ - тригонометрично опуклими 2π -періодичні невід'ємні неперервні функції.

Приклад. 2π -періодичне продовження функції

$$h(\theta) = (-1)^{[\alpha]} \cos \alpha \theta + 1, \quad \alpha \geq 0$$

в $[-\pi, \pi]$ на $R = [\alpha, \infty]$ -тригонометрично опукла функція, що неважко перевірити, використовувачи означення I та критерій ω -тригонометричної опуклості (див. [4], с. 79).

Теорема 2. Якщо $u \in L^0_{+\infty}$ і $\alpha < +\infty$, то функція

$$h(\theta, u) = \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} C_\kappa e^{i\kappa\theta}$$

$[\alpha, \rho]$ -тригонометрично опукла і для кожної послідовності (z_j) такої, що

$$\lim_{z_j \rightarrow \infty} \lambda(z_j) / \lambda_1(z_j) = \omega^2, \quad \alpha \leq \omega \leq \rho, \quad \omega \neq 0,$$

виконується

$$\lim_{z_j \rightarrow \infty} \frac{S(z_j, \varphi) - S(z_j, \eta)}{\lambda(z_j)} = \frac{h'(\varphi, u) - h'(\eta, u)}{\omega^2} + \int_\eta^\varphi h(\theta, u) d\theta \quad (3)$$

для всіх η, φ з R , в яких існує h' .

Д о в е д е н н я використовує обернені формули /2/ і аналогічне доведення теореми 8 з праці [3]. При $\omega = +\infty$ ліва сторона рівності /3/ невід'ємна, тому з невід'ємності її правої сторони для всіх η і φ з R випливає $h(\theta) \geq 0$, тобто ∞ - тригонометрична опуклість.

Теорема 3. Якщо $u \in L^0$ і $x = \rho = +\infty$, то для всіх η, φ з $[0, 2\pi]$ за винятком, можливо, не більш як зліченної множини справедливо

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{S(z, \varphi) - S(z, \eta)}{\lambda(z)} = \sum_{k \neq 0} \frac{c_k}{k} (e^{ik\varphi} - e^{ik\eta}), \quad /4/$$

а також

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{S(z, 2\pi) - S(z, 0)}{\lambda(z)} = c_0. \quad /5/$$

Д о в е д е н н я. З /1/ та /2/ для $k \in Z$ одержуємо

$$N_k(z) = c_k \lambda(z) + o(\lambda(z)), \quad (z \rightarrow \infty) \quad /6/$$

за теоремою Каратеодорі-Леві /див. [2], с.227-229, а також лему I з праці [3]/ існує неспадна функція $S(\varphi)$ на $[0, 2\pi]$, для якої

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{S(z, \varphi) - S(z, \eta)}{\lambda(z)} = S(\varphi) - S(\eta)$$

у всіх точках неперервності функції S і, крім того,

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} dS(\theta). \quad /7/$$

Звідси одержуємо /4/ і /5/.

О з н а ч е н н я 2. Клас L^0 називається тривіальним, якщо для кожної функції $u \in L^0$ і всіх $k \in Z$ виконується $c_k[u] = 0$, і нетривіальним - в протилежному випадку.

О з н а ч е н н я 3. Функції росту $\lambda(z)$ та $\bar{\lambda}(z)$ називаються еквівалентними, коли $\lambda(z)/\bar{\lambda}(z) \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$.

Теорема 4. Для того щоб клас L^0 був нетривіальним, необхідно і досить, щоб функція росту $\lambda(z)$ була еквівалентною деякій опуклій відносно $\ln z$ функції росту $\bar{\lambda}(z)$.

Д о в е д е н н я . Необхідність доведемо від супротивного, припускаючи, що $\lambda(z)$ не еквівалентна жодній опуклій відносно $\ln z$ функції $\tilde{\lambda}(z)$. Тоді $C_0 = 0$, бо функція $N(z)$ опукла відносно $\ln z$. Якщо $\mathcal{R} = +\infty$, то з /7/ одержуємо $|C_k| \leq C_0$. Таким чином, $C_k = 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$ та $u \in L^0$, що суперечить нетривіальності класу L^0 .

Якщо ж $\mathcal{R} < +\infty$, то при $\mathcal{R} = 0$ з /2/ і співвідношення $|N_k(z)| \leq N(z) = O(\lambda(z))$ при $z \rightarrow \infty$ одержимо $C_k = 0, k \in \mathbb{Z}$, а при $\mathcal{R} > 0$ виконується $\mathcal{R} \neq \rho$, бо функція $\lambda_1(z)$ - опукла відносно $\ln z$. Із зображення для індексатора [3] при деякому нецілому $\omega, \mathcal{R} \leq \omega \leq \rho$ дістаємо $C_k = 0, k \in \mathbb{Z}, u \in L^0$, що знову ж суперечить нетривіальності класу L^0 .

Щоб довести достатність, вважаємо, не зменшуючи загальності, що $\lambda(z)$ - двічі неперервно диференційована і опукла відносно $\ln z$. Позначимо $u_0(z) = (\lambda(z) - \lambda(1))^+$. Функція u_0 - субгармонічна в S , і, очевидно, $u_0 \in L^0$. Крім того, $C_0[u] = 1$, що й завершує доведення.

Список літератури: 1. А з а р и н В.С. О регулярности роста коэффициентов Фурье логарифма модуля целой функции. - Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1977, вып. 27. 2. З и г - м у н д А. Тригонометрические ряды. - М.: Мир, 1965, т.1. 3. К о н - д р а т я к А.А. Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста. - Математический сборник, 1976, 106 /148/, № 3 /7/. 4. Л е в и н Б.А. Распределение корней целых функций. - М.: Гостехиздат, 1956. 5. Hayman W.K., Kennedy P.P. Subharmonic functions. - Academic Press, 1976, v.1. 6. Novakovic P. Fonctions plurisousharmoniques et analytiques dans les espaces topologiques complexes. - Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 1969, 19.

Стаття надійшла в редакцію 13.03.1979 р.

Б.В.Ковальчук, З.Д.Фаріон

ПРО ЗБІЖНІСТЬ РЯДІВ ФУР'Є ДЕЯКИХ КЛАСІВ

 S^p - МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ МАТРИЦЬ

Нехай $F(x) = [f_{jk}(x)] (-\infty < x < \infty)$ є S^p - майже періодична матриця, показники Фур'є якої мають єдину граничну точку на нескінченності.

Ряд Фур'є такої матриці можна записати у вигляді

$$F(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x}, \quad /I/$$

де $\{\lambda_n\}$ - спектр матриці $F(x)$, а $A_n = M\{F(x) \cdot e^{-i\lambda_n x}\}$ - II матричні коефіцієнти Фур'є /4/.

S^p - майже періодичні матричні многочлени

$$S_\lambda(x) = \sum_{|\lambda_n| \in \lambda} A_n e^{i\lambda_n x} \quad /2/$$

називатимемо частинними сумами порядку λ ряду Фур'є /1/.

Е.А.Бредихіна [1, 2] знайшла умови збіжності рядів Фур'є майже періодичних функцій Степанова в точці неперервності і в точці Лебега при відповідних властивостях розрідженості показників Фур'є заданого класу функцій.

Ми вивчаємо аналогічні питання для класу S - майже періодичних матриць (якщо $p=1$, то замість S^p пишемо S). При цьому, для доведення збіжності рядів Фур'є S - майже періодичних матриць опираємося на результати, одержані у працях [1, 2].

I. Умови збіжності рядів Фур'є S - майже періодичних матриць в точці неперервності. Позначимо через $Z(F)$ послідовність $\{\lambda_n\} (n=0,1,2,\dots)$ додатних показників Фур'є матриці $F(x)$, а через Σ - клас всіх лакунарних послідовностей $Z(F)$. Причому, $Z(F) \in \Sigma$ тоді і тільки тоді, коли

$$\lambda_{n+1}/\lambda_n \geq \theta > 1 \quad (n=1,2,\dots).$$

Послідовність $Z(F)$ відносимо до класу Σ , якщо із послідовності пар точок $\{\lambda_n, \lambda_{n+1}\} (n=1,2,\dots)$ можна виділити нескінченну підпослідовність $\{\mu_m, \mu_m'\} (m=1,2,\dots)$ таку, що $\mu_m'/\mu_m \geq \theta > 1 (m=1,2,\dots)$

Теорема 1. За умови $Z(F) \in \bar{\Sigma}$ і X_0 точка неперервності S -майже періодичної матриці $F(x)$ має місце рівність

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|S_{\lambda_m}(X_0) - F(X_0)\|_S = 0 \quad /3/$$

Віднесемо тепер послідовність $Z(F)$ до класу $\bar{\Sigma}$, якщо із послідовності пар точок $\{\lambda_n, \lambda_{n+1}\}$ ($n=1,2,\dots$) можна виділити нескінченну підпослідовність $\{\lambda_m, \lambda'_m\}$ ($m=1,2,\dots$), для якої $\lambda'_m - \lambda_m \rightarrow \infty$ і $\lambda'_m / \lambda_m \rightarrow 1$ ($m \rightarrow \infty$). Введемо величину $\omega(x, \delta) = \sup_{|t| \leq \delta} \|F(x+t) - F(x)\|_S$.

Теорема 2. Якщо $Z(F) \in \bar{\Sigma}$, то в точці X_0 неперервності $F(x)$ рівність /3/ виконується за умови

$$\omega\left(X_0, \frac{1}{\lambda'_m - \lambda_m}\right) \ln\left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda'_m}\right) \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty).$$

2. Умови збіжності рядів Фур'є S -майже періодичних матриць у точці Лебега. Нехай $F(x) = [f_{jk}(x)]$ обмежена матриця і $|F(x)| = [|f_{jk}(x)|]$. Називатимемо X точкою Лебега матриці $F(x)$, якщо

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |F(t) - F(x)| dt = 0.$$

Позначимо через B_0 сукупність обмежених матриць $\psi(x) = [g_{jk}(x)]$, для яких $g_{jk}(x)$ є цілі функції степеня ≤ 0 .

Прийmemo

$$E_0(F) = \inf_{\psi(x) \in B_0} \{ \|F - \psi\|_S \}.$$

Теорема 3. Якщо X - точка Лебега матриці $F(x)$, то за умови $E_0(F) [N(2\delta) - N(\delta)] = o(1)$ ($\delta \rightarrow \infty$), де $N(\delta) = \sum_{|\lambda_n| \leq \delta} 1$, справедлива рівність

$$\|S_\delta(x) - F(x)\|_S = o(1) \quad (\delta \rightarrow \infty). \quad /4/$$

Опираючись на теорему 3, можна одержати таке твердження.

Теорема 4. Якщо послідовність $Z(F)$ задовольняє умову $N(2\delta) - N(\delta) = o(1)$, то майже всюди виконується рівність

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \|S_\delta(x) - F(x)\|_S = 0. \quad /5/$$

3. Умови збіжності лакунарних рядів Фур'є S^2 - майже періодичних матриць. Е.А.Бредихіна [3] узагальнила теорему А.Н.Колмогорова про збіжність лакунарних рядів Фур'є сумовних з квадратом функцій на S^2 - майже періодичні функції за деяких умов, накладених на показники Фур'є. Знайдені умови можна застосувати і для доведення збіжності лакунарних рядів Фур'є S^2 - майже періодичних матриць.

Віднесемо послідовність $Z(F)$ абсолютних величин показників Фур'є матриці $F(x)$ до класу Σ_α , якщо існує $\alpha > 0$ таке, що

$$N(\lambda + \alpha) - N(\lambda) = o(1) \quad /6/$$

рівномірно відносно λ .

Користуючись методом із праці [3], доводимо справедливості таких тверджень.

Теорема 5. Якщо $Z(F) \in \Sigma_\alpha$ і $\lambda_{n_{\nu+1}}/\lambda_{n_\nu} > \theta > 1$, то майже всюди виконується рівність

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|S_{\lambda_{n_\nu}}(x) - F(x)\|_{S^2} = 0. \quad /7/$$

Теорема 6. Якщо $Z(F) \in \Sigma_\alpha$ і $\lambda_{n_{\nu+1}}/\lambda_{n_\nu} \geq \theta > 1$, то при умові $\sum_{s=-\infty}^{\infty} \|A_s\|^2 < \infty$ майже всюди виконується рівність

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|T_{n_\nu}(x) - F(x)\|_{S^2} = 0, \quad /8/$$

де $T_n(x) = \sum_{s=-n}^n A_s e^{i\lambda_s x} \quad (n=1, 2, \dots).$

Список літератури: 1. Бредихіна Е.А. О сходимости рядов Фурье почти-периодических функций Степанова. - Успехи математических наук, XIX, 6/120/, 1964, т.19, № 6/120/. 2. Бредихіна Е.А. О приближении почти-периодических функций Степанова. - ДАН СССР, 1965, 164, № 2. 3. Бредихіна Е.А. К теореме А.Н.Колмогорова о лакунарных частных суммах ряда Фурье. - Сибирский математический журнал, 1968, т.9, № 2. 4. Лісевич Л.М., Ковальчук Б.В. Середні значення і поняття ряду Фур'є для S^p - майже періодичних матриць. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1975, вип. 10.

Стаття надійшла в редколегію 26.03.1979 р.

Л.М.Лісевич

ДЕЯКІ ДОСТАТНІ УМОВИ ІСНУВАННЯ ОБМЕЖЕНОГО
І МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО ЛІНІЙНОГО
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Існування обмеженого і майже періодичного розв'язку рівняння

$$y'' = \varphi(x)y + \psi(x)$$

досліджено [2] при умові, коли $\varphi(x)$ - майже періодична /м.п./ функція Бора, причому така, що $0 < \alpha^2 < \varphi(x) < \beta^2$, а $\psi(x)$ - м.п. функція Степанова / S^p - м.п./, неозначений інтеграл якої обмежений.

Ми узагальнимо цей результат на випадок рівняння

$$y'' = \varphi(x)y + \psi(x)y' + \omega(x). \quad /1/$$

Теорема I. Нехай:

1/ $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ - неперервні на всій дійсній осі функції, причому

$$0 < \alpha^2 < \varphi(x) < \beta^2, \quad /2/$$

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |\psi(x)| < \frac{\beta^2 - \alpha^2}{|\beta|}, \quad /3/$$

$$\beta^2 < 2\alpha^2; \quad /4/$$

2/ $\omega(x)$ - сумовна разом із своїм p -м степенем / $p \geq 1$ / функція в кожному скінченному інтервалі, неозначений інтеграл якої

$$S_2(x) = \int_0^x \omega(t) dt \quad /5/$$

обмежений.

Тоді існує розв'язок $y(x)$ рівняння /1/, для якого

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |y(x)| \leq \frac{2|\beta| \sup |S_2(x)|}{2\alpha^2 - \beta^2}. \quad /6/$$

Д о в е д е н н я . Розглянемо рівняння

$$y'' - \beta^2 y = \mu [f(x)y + \psi(x)y'] + \omega(x), \quad /7/$$

яке при $\mu = 1$ і $f(x) = \varphi(x) - \beta^2$ переходить у рівняння /I/. Шукатимемо розв'язок рівняння /7/ у вигляді

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n y_n(x). \quad /8/$$

Вважаючи, що ряд /8/ можна двічі почленно диференціювати, з /8/ і /7/ отримуємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu^n (y_n'' - \beta^2 y_n) = \mu \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n [f(x)y_n + \psi(x)y_n'] + \omega(x).$$

Прирівнявши тепер вирази при однакових степенях μ , одержимо нескінченну систему

$$y_0'' - \beta^2 y_0 = \omega(x), \quad /9/$$

$$y_n'' - \beta^2 y_n = f(x)y_{n-1} + \psi(x)y_{n-1}', \quad /9_n/$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots).$$

Не порушуючи загальності, вважатимемо, що $\beta > 0$. Тоді, як відомо, частинний розв'язок рівняння /9/ запишемо

$$y_0(x) = -\frac{1}{2\beta} \left[e^{\beta x} \int_x^{+\infty} e^{-\beta t} \omega(t) dt + e^{-\beta x} \int_{-\infty}^x e^{\beta t} \omega(t) dt \right].$$

Застосувавши другу теорему про середнє значення і використавши умови теореми, легко отримати

$$|y_0(x)| \leq \frac{2 \sup_x |\omega(x)|}{\beta}, \quad (-\infty < x < +\infty). \quad /10/$$

Аналогічно маємо

$$|y_0'(x)| \leq 2 \sup_x |\omega(x)|. \quad /11/$$

Частинний розв'язок рівняння /9_n запишемо

$$y_n(x) = -\frac{1}{2\beta} \left\{ e^{\beta x} \int_x^{+\infty} e^{-\beta t} [f(t)y_{n-1}(t) + \psi(t)y_{n-1}'(t)] dt + \right.$$

$$+ e^{-\beta x} \int_{-\infty}^x e^{\beta t} [f(t) y_0(t) + \psi(t) y_0'(t)] dt. \quad /12/$$

Оскільки

$$|f(x)| = |\varphi(x) - \beta^2| < \beta^2 - \alpha^2 = \gamma, \quad /13/$$

то на основі /3/, /10/ і /11/ одержуємо

$$|y_1(x)| \leq \frac{2 \sup_x |\Omega(x)|}{\beta} \left(\frac{2\gamma}{\beta^2} \right). \quad /14/$$

Враховуючи тепер оцінки /3/, /10/, /11/, і з /12/ дістаємо оцінку

$$|y_1'(x)| \leq 2 \sup_x |\Omega(x)| \left(\frac{2\gamma}{\beta^2} \right). \quad /15/$$

Запишемо тепер частинний розв'язок рівняння /9₂/

$$y_2(x) = -\frac{1}{2\beta} \left\{ e^{\beta x} \int_x^{\infty} e^{-\beta t} [f(t) y_1(t) + \psi(t) y_1'(t)] dt + \right. \\ \left. + e^{-\beta x} \int_{-\infty}^x e^{\beta t} [f(t) y_1(t) + \psi(t) y_1'(t)] dt \right\}. \quad /16/$$

Беручи до уваги /3/, /13/, /14/, /15/, і з /16/ отримуємо

$$|y_2(x)| \leq \frac{2 \sup_x |\Omega(x)|}{\beta} \left(\frac{2\gamma}{\beta^2} \right)^2, \quad /17/$$

$$|y_2'(x)| \leq 2 \sup_x |\Omega(x)| \left(\frac{2\gamma}{\beta^2} \right)^2, \quad (-\infty < x < +\infty). \quad /18/$$

Оцінюючи аналогічно розв'язок $y_k(x)$ рівняння /9_k/, маємо оцінку

$$|y_k(x)| \leq \frac{2 \sup_x |\Omega(x)|}{\beta} \left(\frac{2\gamma}{\beta^2} \right)^k, \quad (k=1, 2, 3, \dots). \quad /19/$$

Таким чином, ряд /8/ мажорується збіжним рядом

$$\frac{2 \sup_x |\Omega(x)|}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2\gamma}{\beta^2} \right)^n,$$

сума якого дорівнює

$$\frac{2\beta \sup_x |\Omega(x)|}{2\alpha^2 - \beta^2},$$

причому ряд /8/ рівномірно збіжний при $\mu=1$. Отже, при $\mu=1$

ряд /8/ є розв'язком $y(x)$ рівняння /1/ такий, що

$$\sup_x |y(x)| \leq \frac{2\beta \sup |Q(x)|}{2\alpha^2 - \beta^2}, \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Теорема доведена.

Теорема 2. Нехай у рівнянні /1/:

- 1/ $\varphi(x)$ - м.п. функція Бора, яка задовольняє умову /2/;
- 2/ $\psi(x)$ - м.п. функція Бора, яка задовольняє умову /3/;
- 3/ $\omega(x)$ - м.п. функція Степанова з обмеженим неозначеним інтегралом /5/.

Тоді існує обмежений розв'язок рівняння /1/, який є майже періодичною функцією Бора.

Д о в е д е н н я . Існування обмеженого розв'язку рівняння /1/ випливає з теореми I і цей розв'язок визначається рівномірно збіжним на всій дійсній осі рядом /8/, коли $M=1$.

Щоб довести майже періодичність за Бором цього розв'язку, досить довести, що кожний член ряду /8/ є м.п. функцією Бора. Але, як відомо, сума ряду /8/ у цьому випадку також м.п. функція Бора. За теоремою про неозначений інтеграл від S^p - м.п. функції [1] стверджуємо, що $Q(x)$ є м.п. функцією Бора.

Нехай $\tau = \tau(\beta, \varepsilon)$ - майже період функції $Q(x)$. Тоді, скориставшись другою теоремою про середнє значення, маємо

$$\begin{aligned} |y_0(x+\tau) - y_0(x)| &= \frac{1}{2\beta} \left| e^{\beta x} \int_{-\infty}^x e^{-\beta t} [\omega(t+\tau) - \omega(t)] dt + \right. \\ &+ \left. e^{-\beta x} \int_{-\infty}^x e^{\beta t} [\omega(t+\tau) - \omega(t)] dt \right| = \\ &= \frac{1}{2\beta} \left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\omega(t+\tau) - \omega(t)] dt + \int_{\theta_2}^x [\omega(t+\tau) - \omega(t)] dt \right| = 1/20 \\ &= \frac{1}{2\beta} \left| \int_0^{\theta_1+\tau} \int_0^{\theta_1} \omega(t) dt - \int_{\theta_2+\tau}^{\theta_1} \int_{\theta_2}^0 \omega(t) dt \right| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2\beta} \{ |\Omega(\theta_1 + \tau) - \Omega(\theta_1)| + |\Omega(\theta_2 + \tau) - \Omega(\theta_2)| \} < \varepsilon,$$

тобто $y_0(x)$ - м.п. функція Бора.

Аналогічно можна показати, що

$$|y'_0(x + \tau) - y'_0(x)| < \beta \varepsilon, \quad /21/$$

тобто $y'_0(x)$ також м.п. функція Бора.

Нехай $\tau = \tau(\beta \varepsilon)$ - спільний майже період м.п. функцій Бора $\varphi(x)$ і $\psi(x)$. Тоді, прийнявши $\sup_x |\Omega(x)| = A$, $(-\infty < x < +\infty)$ і врахувавши /3/, /10/, /11/, /13/, /20/, /21/, отримуємо

$$|y_1(x + \tau) - y_1(x)| \leq 2\left(\frac{A}{\beta^2} + 2A + \frac{2(\beta^2 - \alpha^2)}{\beta}\right)\varepsilon.$$

Отже, $y_1(x)$ - м.п. функція Бора. Зовсім аналогічно показуємо, що $y_k(x)$, $(k = 2, 3, \dots)$ - м.п. функція Бора.

Таким чином, ряд /8/ при $\mu = 1$, як рівномірно збіжний ряд, дає майже періодичний за Бором розв'язок рівняння /1/. Теорема доведена.

Список літератури: І. Кованько А.С., Лисевич Л.Н. О некоторых свойствах интеграла и производной от S^p - п.п. функции. Вопросы математической физики и теории функций. - Київ: Наукова думка, 1964. 2. Лисевич Л.М., Костюк Я.П. Про майже періодичність розв'язків деяких звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з S^p - майже періодичною правою частиною. - ДАН УРСР, серія А, 1971, № 1.

Стаття надійшла в редколегію 28.03.1979 р.

І.Д.Квіт, В.М.Косарчин

РІВНІСТЬ ПАРСЕВАЛЯ ДЛЯ ВІДБИТТЯ

Нехай додатна випадкова змінна ξ з функцією розподілу $F(t)$ має відбиття

$$\varphi(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} dF(t), \quad 1-\alpha < \operatorname{Re} z < 1+\beta, \quad (\alpha > 0, \beta > 0), \quad /1/$$

а незалежна від ξ додатна випадкова змінна η з функцією розподілу $G(t)$ -

$$\psi(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} dG(t), \quad 1-A < \operatorname{Re} z < 1+B, \quad (A > 0, B > 0). \quad /2/$$

Тоді випадкова змінна $\zeta = \xi\eta$ має функцію розподілу

$$H(t) = \int_0^{\infty} G\left(\frac{t}{x}\right) dF(x) = \int_0^{\infty} F\left(\frac{t}{y}\right) dG(y), \quad t > 0, \quad /3/$$

і відбиття

$$\omega(z) = \varphi(z)\psi(z), \quad 1 - \min(\alpha, A) < \operatorname{Re} z < 1 + \min(\beta, B), \quad /4/$$

причому виконується рівність

$$\int_0^{\infty} G\left(\frac{t}{x}\right) dF(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{(t+0)^{1-z}}{1-z} \varphi(z)\psi(z) dz, \quad /5/$$

$$\max[0, 1 - \min(\alpha, A)] < c < 1.$$

Справді, з означення функції розподілу за допомогою формули повної ймовірності дістаємо вираз /3/

$$\mathcal{P}\{\xi\eta \leq t\} = \sum_x \mathcal{P}\left\{\eta \leq \frac{t}{\xi} \mid \xi = x\right\} \mathcal{P}\{\xi = x\} = \int_0^{\infty} G\left(\frac{t}{x}\right) dF(x), \quad t > 0.$$

За означенням відбиття маємо

$$\omega(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} d_t \int_0^{\infty} G\left(\frac{t}{x}\right) dF(x) = \int_0^{\infty} x^{z-1} \left\{ \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{x}\right)^{z-1} d_t G\left(\frac{t}{x}\right) \right\} dF(x) = \varphi(z)\psi(z)$$

у перетині смуг /1/ і /2/. Це доводить рівність /4/. При доведенні рівності /5/ використовуємо зворотну формулу (порівн. [1]).

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{(t+0)^{1-z}}{1-z} \psi(z) dz, \quad \max(0, 1-A) < c < 1. \quad /6/$$

Отже, в окозі /4/, при $\max [Q_1 - \min(a, A)] < c < 1$ виходить,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty G\left(\frac{t}{x}\right) dF(x) &= \int_0^\infty \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\left(\frac{t}{x} + 0\right)^{1-z}}{1-z} \psi(z) dz dF(x) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left\{ \int_0^\infty x^{z-1} dF(x) \right\} \frac{(t+0)^{1-z}}{1-z} \psi(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{(t+0)^{1-z}}{1-z} \psi(z) \psi(z) dz \end{aligned}$$

Лівий бік рівності /5/ представляє функцію розподілу добутку

$\xi \eta$ у термінах функцій розподілу множників, правий - у термінах відбиттів множників. Рівність /5/ є узагальненням відомої з теорії функцій рівності Парсеваля (порівн. [2]) на випадок існування відповідності між функціями розподілу та відбиттями додатної випадкової змінної. Відзначимо, що коли додатні випадкові змінні ξ та η мають густини $r(t) = F'(t)$ і $q(t) = G'(t)$, то густину добутку $\xi \eta$ запишемо виразом

$$h(t) = \int_0^\infty q\left(\frac{t}{x}\right) r(x) \frac{dx}{x} = \int_0^\infty r\left(\frac{t}{y}\right) q(y) \frac{dy}{y}, \quad t > 0, \quad /7/$$

зворотна формула набуває вигляду

$$q(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-z} \psi(z) dz, \quad \max(Q_1 - A) < c < 1, \quad /8/$$

а рівність /5/ переходить у

$$\int_0^\infty q\left(\frac{t}{x}\right) r(x) \frac{dx}{x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-z} \psi(z) \psi(z) dz, \quad \max [Q_1 - \min(a, A)] < c < 1. \quad /9/$$

Формула /9/ є узагальненням рівності Парсеваля на випадок існування відповідності між густинами та відбиттями додатної випадкової змінної. Рівняння /7/, /8/ та /9/ є похідними відповідно формул /3/, /6/ та /5/.

Для ілюстрації рівності Парсеваля /5/ розглянемо такий приклад.

Нехай додатна випадкова змінна ξ має функцію розподілу $F(t) = 1 - \frac{1 + \ln t}{t}$, $t \geq 1$, а $\eta - G(t) = 1 - \frac{1}{t}$, $t \geq 1$.

Тоді ξ має відбиття $\psi(z) = \frac{1}{(2-z)^2}$, $\operatorname{Re} z < 2$, а $\eta - \psi(z) = \frac{1}{2-z}$, $\operatorname{Re} z < 2$. Отже, лівий бік рівності /5/ набуває

вартості

$$\int_0^{\infty} G\left(\frac{t}{x}\right) dF(x) = \int_1^t \left(1 - \frac{x}{t}\right) \frac{\ln x}{x^2} dx = 1 - \frac{\ln^2 t + 2\ln t + 2}{2t}, t \geq 1,$$

а правиль при $0 < C < 1$ дорівнює

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{(t+z)^{1-z}}{1-z} \psi(z) \psi(z) dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{(t+z)^{1-z}}{(1-z)(2-z)^3} dz = \\ &= - \sum_{1,2} \operatorname{res} \frac{t^{1-z}}{(z-1)(z-2)^3} = - \lim_{z \rightarrow 1} \frac{t^{1-z}}{(z-2)^3} - \lim_{z \rightarrow 2} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \frac{t^{1-z}}{z-1} = \\ &= 1 - \frac{\ln^2 t + 2\ln t + 2}{2t}, t \geq 1. \end{aligned}$$

Аналогічно перевіряємо рівність /9/.

Повторно застосовуючи рівність /5/ у випадку трьох і більше незалежних додатних випадкових змінних, що мають відбиття, можемо записати відповідні рівності Парсеваля.

Список літератури: 1. К в і т І.Д. Зворотна формула для відбиття. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1978, вип. 13.
2. Т и т ч м а р и В. Теорія функцій. - М.; Л.: Гостехиздат, 1951.

Стаття надійшла в редакцію 26.02.1979 р.

УДК 512.553

О.А.Горбачук, О.В.Крочак

КРУЧЕННЯ НАД ДУО-КІЛЬЦЯМИ

Опишемо кручення над дуо-кільцями. Введемо поняття підривіаль-ного кручення й опишемо кільця, над якими всі кручення підривіальні. Дано необхідну і достатню умови розщеплюваності всіх кручень над дуо-кільцем.

Припустимо, що всі модулі ліві та унітарні. Через R^m по-значимо категорію лівих модулів над кільцем, R , а че, з R кручення в категорії R^m . Всі означення та факти, пов'язані з крученням, можна знайти у праці [3]. Там також показано, що між крученнями в категорії R - модулів і радикальними фільтрами

кілцьця R існує взаємоднозначна відповідність. Нагадаємо, що кручення τ називається розщеплюваним, якщо для довільного модуля A підмодуль $\tau(A)$ виділяється прямим доданком. У праці [1] показано, що при накладанні кілець /гомоморфізмі на/ радикальний фільтр переходить на радикальний фільтр.

Нехай $\varphi: R_1 \rightarrow R_2$ - накладання кілець у категорії R , -модулів задано кручення τ . Через $\varphi(\tau)$ позначаємо кручення, яке відповідає образу радикального фільтра кручення τ при накладанні φ . Відомо [1], що з розщеплюваності кручення τ випливає розщеплюваність кручення $\varphi(\tau)$. Нехай R -прямий добуток кілець R_i . Через φ_i позначаємо природне накладання R на R_i . Якщо в категорії R^m задано кручення τ , то кручення $\tau_i = \varphi_i(\tau)$ називаємо i -проекціями кручення τ . Кручення τ вважаємо тривіальним крученням, коли $\tau(A) = A$ для всіх A або $\tau(A) = 0$ для всіх модулів A . Якщо в категорії R^m задано кручення τ , то це кручення називаємо прямою сумою кручень τ_i тоді, коли

$$R = R_1 \oplus \dots \oplus R_n,$$

$$\tau_i = \varphi_i(\tau) \quad , \quad \text{де} \quad \varphi_i: R \rightarrow R_i.$$

Кручення τ вважаємо півтривіальним, якщо воно є прямою сумою скінченного числа тривіальних кручень.

Кільце R називаємо нерозкладним, якщо воно не розкладається в пряму суму своїх власних двосторонніх ідеалів.

Дуо-кільце - це кільце, всі ліві ідеали якого двосторонні. Нагадаємо, що кільце R досконале зліва, якщо його радикал Джекобсона $J(R)$ - Т-нільтпотентний зліва і фактор-кільце $R/J(R)$ півпросто.

Теорема I. У категорії R -модулів всі кручення півтривіальні тоді і тільки тоді, коли кільце R є скінченною сумою матричних кілець над локальними та досконалими кільцями.

Д о в е д е н н я . Достатність. Нехай кільце R є скінченною прямою сумою матричних кілець $R = B_1 \oplus \dots \oplus B_n$, де B_i – кільце матриць порядку n_i над локальним і досконалим кільцем. Тоді $Z = \sum_{i=1}^n \oplus Z_i$, де $Z_i = \varphi_i(Z)$. Для доведення підривальності кручення Z покажемо, що кручення Z_i тривіальні. Оскільки Z_i – кручення у категорії лівих модулів над кільцем матриць з елементами з локального і досконалого кільця, то всі кручення Z_i тривіальні згідно з теоремою праці [4]. Таким чином, кручення Z підривальні.

Необхідність. Розкладемо кільце R у пряму суму нерозкладних кілець. Зауважимо, що в кільці R не може бути нескінченної прямої суми. Справді, якщо $R = \sum_{i=0}^{\infty} \oplus R_i$, то існує нескінченна строго спадна система ідеалів $\{B_k\}$, породжених центральними ідемпотентами. Неважко перевірити, що вони задовольняють умову лемми Маранди / [3], припущення 06 /. Таким чином, якщо побудувати фільтр $\mathcal{E}$ лівих ідеалів $\{B_k\}$, то цей фільтр за лемою Маранди радикальний. Розглянемо кручення Z , яке відповідає радикальному фільтру $\mathcal{E}$. Кручення Z не буде підривальним, що суперечить умові теореми. Отже, кільце розкладається в пряму суму скінченного числа нерозкладних кілець $R = \sum_{i=1}^n \oplus R_i$, де R_i – нерозкладні.

Доведемо, що кільця R_i – матричні кільця над локальними і досконалими кільцями. Для цього достатньо довести, що всі кручення Z_i в категорії R_i^m тривіальні [4]. Розглянемо деяке фіксоване кручення Z_{i_0} . Кручення Z будемо так, щоб $\pi_{i_0}(Z) = Z_{i_0}$, де π_{i_0} – проекція. Оскільки кільце R_{i_0} нерозкладне, то Z_{i_0} теж не розкладається в пряму суму, а раз так, то Z_{i_0} – тривіальне кручення.

Теорема 2. Над дво-кільцями всі кручення розщеплюються тоді і тільки тоді, коли вони підривальні.

Доведення. Достатність. Якщо кручення півтривіальні, то очевидно, що вони розщеплюються.

Необхідність. Нехай над дуо-кільцем всі кручення розщеплюються. Тоді, згідно з лемою 3 праці [3] кільце є прямою сумою скінченного числа нерозкладних кілець, всі кручення над якими розщеплюються. Розглянемо деяке з цих розщеплюваних кручень τ_{i_0} . Покажемо, що це кручення тривіальне. Оскільки, для дуо-кілля виконується умова теореми 1 праці [2], то за цієї теоремою ядро кручення $K_{\tau_{i_0}} \in \mathcal{E}$: $R_{i_0} = \tau_{i_0}(R_{i_0}) \oplus K_{\tau_{i_0}}$. Тому що кільце R_{i_0} нерозкладне, то або $\tau_{i_0}(R_{i_0}) = 0$, або $K_{\tau_{i_0}} = 0$. Якщо $K_{\tau_{i_0}} = 0$, то $R_{i_0} = \tau_{i_0}(R_{i_0})$. Але за припущенням теореми це неможливо. Отже, $\tau_{i_0}(R_{i_0}) = 0$. Тоді згідно з лемою 2 праці [2], умови якої наявні і для дуо-кілля, випливає, що τ_{i_0} тривіальне кручення. Таким чином, кручення τ , побудоване так, щоб $\tau_{i_0} = \pi_{i_0}(\tau) / \pi_{i_0}$ - проєкція/ буде півтривіальним.

Теорема 3. Над дуо-кільцями всі кручення розщеплюються тоді і тільки тоді, коли це кільце досконале.

Доведення. Нехай над дуо-кільцем всі кручення розщеплюються, тоді за теоремою 2 вони півтривіальні. Оскільки у категорії $\mathcal{R}$ - модулів всі кручення півтривіальні, то дуо-кільце $\mathcal{R}$ є скінченною сумою матричних кілець над дуо-локальними і досконалими кільцями /теорема 1/. Але дуо-кільце не розкладається в пряму суму матричних кілець. Отже, дуо-кільце розкладається в скінченну пряму суму дуо-локальних і досконалих кілець. Неважко перевірити, що дуо-кільце досконале тоді і тільки тоді, коли воно є скінченною прямою сумою дуо-локальних і досконалих кілець. Таким чином, дуо-кільце - досконале. З іншого боку, якщо дуо-кільце - досконале, тоді воно є скінченною прямою сумою дуо-локальних і досконалих кілець. Розглянемо дуо-локальне і досконале кільце R_i і покажемо, що всі кручення у категорії $\mathcal{R}_i$ - модулів тривіальні. Властивості /в/ і /с/ теореми 2 праці [2] існують і для дуо-кілець. За цієї

теоремою розглядувані кручення у категорії R_i - модулів тривіальні. Тоді кручення над дуо-досконалим кільцем півтривіальні, а за теоремою 2 кручення розщеплюються.

Н а с л і д о к . Наступні умови для дуо-кільця R еквівалентні:

1. Всі кручення у категорії лівих R - модулів розщеплюються.
2. Всі кручення в категорії лівих R - модулів півтривіальні.
3. Кільце R досконале.

Список літератури: 1. Горбачук Е.Л. Радикали в модулях над різними кільцями. - Математические исследования, 1972, т.7, № 1.
2. Горбачук Е.Л. Коммутативные кольца, над которыми все кручения расщепляемы. - Математические исследования, 1972, т.7, № 3.
3. Мишина А.П., Скорняков Л.А. Абелевы группы и модули. - М.: Наука, 1969. 4. Dlab V. On a class of perfect rings. - Can. J. Math., 1970, 22, №4.

Стаття надійшла в редколегію 25.12.1979 р.

УДК 512.553

О.Л.Горбачук, Р.Б.Попович
ПРО РОЗЩЕПЛЮВАНІСТЬ J - РАДИКАЛІВ

Досліджуємо питання про розщеплюваність J - квазірадикалів та J - радикалів. Припускаємо, що кожне кільце, яке розглядаємо, асоціативне кільце з одиницею, а кожен модуль - правий та унітарний. Категорію правих модулів над кільцем позначаємо $Mod-R$. Всі означення та факти, зв'язані з радикалами, можна знайти у працях [4, 6].

Нехай J - правий ідеал кільця R . Тоді J - квазірадикалом називаємо правило t_J , яке кожному модулю $M \in Mod-R$ приводить у відповідність його підмодуль $t_J(M) = MJ$. Зауважимо, що t_J збігається з t_J , де $J = RJ$. Справді, $t_J(M) = MJ = MRJ = t_J(M)$.

Очевидно, що t_J задовольняє умови:

1. Для будь-якого R - гомоморфізму модулів $\varphi: M \rightarrow N$
 $\varphi(t_J(M)) \subseteq t_J(N)$.
2. $t_J(M/t_J(M)) = 0$.
3. $t_J(t_J(M)) = t_J(M)$ виконується не завжди, що підтверджує приклад R - модуля R .

Теорема I. Над кільцем R J - квазірадикал розщеплюється тоді і тільки тоді, коли $R = RJ \oplus S$ /пряма модульна сума/.

Доведення. Якщо J - квазірадикал розщеплюється, то, очевидно, що $R = RJ \oplus S$ /пряма модульна сума/. Навпаки, нехай $R = RJ \oplus S$. Оскільки $S \cdot (RJ) \subseteq S \cap RJ = 0$, то $SJ = S(RJ) = 0$. Виходячи з цього, легко перевірити, що сума $M = MJ + MS$ є прямою. Теорема доведена.

Наслідок I. Над кільцем R всі J - квазірадикали розщеплюються тоді і тільки тоді, коли кожен двосторонній ідеал кільця R виділяється прямим модульним доданком.

Наслідок 2. Нехай R - комутативне кільце. Тоді над R всі J - квазірадикали розщеплюються тоді і тільки тоді, коли R - класично півпросто.

Приклад. Над кільцем $\mathbb{Z}$ цілих чисел, тобто в випадку абелевих груп, всі нетривіальні J - квазірадикали не розщеплюються.

У праці [2] кожному правому ідеалу J кільця R зіставлено радикал, який називається J - радикалом. Нагадаємо, що його радикальним класом є клас $T_J = \{M / M \in \text{Mod-}R, MJ = M\}$. Кожен J - радикал можна задати двостороннім ідеалом $J = RJ$, тобто $T_J = T_{RJ}$. Справді, якщо $MJ = M$, де $M \in \text{Mod-}R$, то $MJ = MRJ = MJ = M$.

Лема I. J - квазірадикал збігається з J - радикалом тоді і тільки тоді, коли $J = J^2$.

Д о в е д е н н я . Припустимо $J = J^2$. Тоді J - квазі-
радикал задовольняє умову 3 і є радикалом. Його радикальний клас
 $T = \{M/M \in \text{Mod-}R, L(M) = M\}$ збігається з J .

Якщо J - квазірадикал збігається з J -радикалом, то він
повинен задовольняти умову 3. Остання характерна для всіх
 $M \in \text{Mod-}R$, коли $J = J^2$. Лема доведена.

Правий ідеал J кільця R називаємо T - нільпотентним
справа, якщо для будь-якої послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ елементів із
 J існує таке натуральне k , що $a_k a_{k-1} \dots a_1 = 0$. Кіль-
це R досконале справа, коли його радикал Джекобсона $J(R)$ T -
нільпотентний справа, а кільце $R/J(R)$ класично півпросто. Всі
означення, зв'язані з досконалим кільцем, можна знайти у праці [6].

Теорема 2. Нехай для кільця R виконуються наступні умови:

- 1/ R - досконале справа;
- 2/ для кожного ідемпотента e кільця R ідеал eR ви-
діляється прямим модульним доданком. Тоді над R всі J - радика-
ли розщеплюються.

Д о в е д е н н я . Візьмемо довільний ідеал J кільця
 $R/J(R)$. Оскільки $R/J(R)$ класично півпросто, що $J =$
 $= f \cdot R/J(R)$, де f - ідемпотент кільця $R/J(R)$. Підні-
маючи f до ідемпотента e кільця R , одержуємо $eR \subseteq$
 $\subseteq J \subseteq eR + J(R)$.

Покажемо, що $(eR + L)$ - радикал, де $L \subseteq J(R)$, збіга-
ється з eR - радикалом. Нехай $M/(eR + L) = M$. Факторизуючи
попередню рівність по MeR , маємо $M/MeR(eR + L) =$
 $= M/(MeR \cdot eR + MeRL) = M/MeRL = M/MeR$.

За лемою I.I праці [5] рівність $NJ = N$ при T - нільпотент-
ному справа ідеалі J можлива лише за умови $N = 0$. Тому
 $M/MeR = 0$, $M = MeR$. Отже, J - радикал збігається з eR -
радикалом. Тому що eR - ідемпотентний ідеал, то за лемою I eR -
радикал збігається з eR - квазірадикалом.

За умовою 2/ ідеал $R \in R$ виділяється прямим модульним доданком, отже, за теоремою 1 eR - квазірадикал розщеплюється. Теорема доведена.

Лема 2. Над кільцем $R = R_1 \times \dots \times R_n$ всі радикали розщеплюються тоді і тільки тоді, коли всі радикали розщеплюються над кожним кільцем R_i , $i = 1, \dots, n$.

Доведення. Випливає з еквівалентності категорій $\text{Mod}-(R_1 \times \dots \times R_n) : \text{Mod}-R_1 \times \dots \times R_n$ [6]. Лема доведена.

Теорема 3. Для комутативного кільця R наступні властивості еквівалентні:

- 1/ над R всі радикали розщеплюються;
- 2/ над R всі кручення розщеплюються;
- 3/ R - досконале кільце.

Доведення. $1 \Rightarrow 2$ очевидно. Імплікація $2 \Rightarrow 3$ випливає з наслідку 2 праці [1] і того, що комутативне досконале кільце розкладається в пряму суму скінченного числа локальних кілець [6]; $3 \Rightarrow 1$ одержуємо із леми 2 та теореми 7 праці [3]. Теорема доведена.

Список літератури: 1. Горбачук Е.Л. Коммутативные кольца, над которыми все кручения расщепляемы. - Математические исследования, 1972, т.7, вып. 2. 2. Горбачук О.Л. Про кручення в модулях. - УМЖ, 1973, т.25, № 4. 3. Горбачук О.Л., Комарницький М.Я. J - радикали та їх властивості. - УМЖ, 1978, т.30, № 2. 4. Мишина А.П., Скорняков Л.А. Абелевы группы и модули. - М.: Наука, 1969. 5. Renault G. Sur les anneaux A , tels que tout A -module a gauche non nul contient un sous-module maximal - C.R. Acad. Sci. Paris, ser. A-B, 1967, 264, N14. 6. Stenström B. Rings and Modules Quotients. - Berlin - New-York, Springer, 1975.

Стаття надійшла в редакцію 1.09.1978 р.

М.Й.Михалюк, Є.М.Парасюк

ПРО ТЕОРЕМУ ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ
ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ДЛЯ ЗМІННОЇ ГУСТИНИ

Як відомо, обернена задача логарифмічного потенціалу полягає в тому, щоб відшукати плоску однозв'язну область D , при заповненні якої речовиною з густиною $\mu(x, y)$ індукується заданий зовнішній потенціал $V_e(x, y)$.

Припустимо, що

$$V_e(x, y, \lambda) = a_0 \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + V(x, y, \lambda), \quad (1)$$

де a_0, λ - дійсні числа, причому $a_0 > 0$; $V(x, y, \lambda)$ - задовольняє умови:

а/ неперервна по всіх аргументах x, y, λ при $x^2 + y^2 > 0$ і $\lambda > 0$;

б/ гармонійна відносно змінних x, y при $x^2 + y^2 > 0$ і зникає у нескінченно віддаленій точці.

Введемо допоміжну функцію $z(t)$, яка відображає конформно круг $|t| < 1$ комплексної площини t на шукану область D площини $z = x + iy$, що містить початок координат, причому $z(0) = 0$, $z'(0) > 0$. Функцію $z(t)$ називаємо розв'язком оберненої задачі для зовнішнього потенціалу $V_e(x, y, \lambda)$ і густини $\mu(x, y)$.

Нехай $t = e^{i\varphi}$, $z(t) = x(\varphi) + iy(\varphi)$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Тоді згідно з лемами 1, 2 праці [2] функція $x(\varphi) = \operatorname{Re} z(e^{i\varphi})$ дає стаціонарне значення інтегралу

$$J_0(z(e^{i\varphi}), \lambda) = \int_0^{2\pi} \{V_e(x, y, \lambda) - V_i(x, y; D)\} d\varphi + 2\pi V_i(a, 0; D), \quad (2)$$

тобто задовольняє нелінійне інтегральне рівняння

$$\begin{aligned} P(\lambda, x) &= V_{ex}(x(\varphi), S(x)(\varphi), \lambda) - V_{ix}(x(\varphi), S(x)(\varphi); D) - \\ &S[V_{ey} - V_{iy}](\varphi) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

де

$$V_i(x, y; D) = \iint_D \mu(\xi, \eta) \ln \frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}} d\xi d\eta -$$

відповідний внутрішній логарифмічний потенціал;

$$S[V_{ey} - V_{iy}](\varphi) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [V_{ey}(x(s), S(x)(s), \lambda) - V_{iy}(x(s), y(s); D)] \times \\ \times \operatorname{ctg} \frac{s-\varphi}{2} ds.$$

Нелінійне рівняння /3/ розглядаємо у просторі Y дійсних 2π -періодичних функцій $x = x(\varphi)$, які задовольняють умову Гельдера разом зі своїми першими похідними. Норму в цьому просторі задаємо формулою

$$\|x\| = \max_{0 \leq \varphi < 2\pi} |x(\varphi)| + \max_{0 \leq \varphi < 2\pi} |x'(\varphi)| + \sup_{0 \leq \varphi_1, \varphi_2 < 2\pi} \frac{|x'(\varphi_1) - x'(\varphi_2)|}{|\varphi_1 - \varphi_2|^\alpha}, \quad /4/$$

де α - стала Гельдера, $0 < \alpha < 1$. Через X позначимо підпростір $\Lambda > 0$.

Надалі вважаємо, що густина $\mu(x, y)$ додатна і задовольняє умову Гельдера у деякій однозв'язній області T , що містить зіркову область D_0 , $(\bar{D}_0 \subset T)$, яка є розв'язком оберненої задачі при $\lambda = \lambda_0$ ($\lambda_0 > 0$) і таку, що відповідна їй функція $z = z_0(t)$, $z_0(0) = 0$, $z'_0(0) > 0$ задовольняє умову

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{t z'_0(t)}{z_0(t)} \right\} \geq \delta_0 > 0 \text{ при } |t| \leq 1 \quad /5/$$

і є розв'язком /3/, тобто

$$D(\lambda_0, x_0) = 0, \quad x_0(\varphi) = \operatorname{Re} z_0(e^{i\varphi}).$$

Покажемо, спираючись на теорему про неявну функцію [1], що рівняння /3/ має розв'язок при λ достатньо близьких до λ_0 у класі зіркових областей.

Нехай

$$z_h(t) = z_0(t) e^{w(t)}, \quad w(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi) \frac{e^{i\varphi} + t}{e^{i\varphi} - t} d\varphi, \quad /6/$$

де $h \in Y$ і має достатньо малу норму.

Легко показати, що для всіх $h \in Y$ з достатньо малою нормою, функції /6/ здійснюють одностійне відображення одиничного круга $|t| < 1$ на зірковій області площини $Z = x + iy$.

Враховуючи аналітичність функції $V_e(x, y, \lambda)$ по x, y при $0 < x^2 + y^2 < \infty$, неважко переконатися, що

$$R(\lambda, h) \equiv P(\lambda, x_h(\varphi)) = V_{ex}(x_h(\varphi), S(x_h)(\varphi), \lambda) - V_{ix}(x_h(\varphi), S(x_h)(\varphi); D) - S[V_{ey} - V_{iy}](\varphi) \quad /7/$$

з неперервним, тобто неперервнодиференційованим оператором у розумінні Фреше по h в околі точки $(\lambda_0, 0) \in X \times Y$, причому $R(\lambda, h) \in Y$ і $R(\lambda_0, 0) = 0$.

Похідна Фреше цього оператора має вигляд

$$\begin{aligned} R'_h(\lambda, h, \ell) &\equiv A(\ell)(\varphi) = \frac{d}{d\ell} R(\lambda, h_\ell) \Big|_{\ell=0} = \\ &= \{V_{exx}(x_h(\varphi), S(x_h)(\varphi), \lambda) - V_{ixx}(x_h(\varphi), S(x_h)(\varphi); D)\} \operatorname{Re}[z_h \cdot \varphi] + \\ &+ \{V_{exy}(x_h(\varphi), S(x_h)(\varphi), \lambda) - V_{ixy}(x_h(\varphi), S(x_h)(\varphi); D)\} \operatorname{Im}[z_h \cdot \varphi] - \\ &- S\{[V_{eyx} - V_{iyx}] \operatorname{Re}[z_h \cdot \varphi] + [V_{eyy} - V_{iyy}] \operatorname{Im}[z_h \cdot \varphi]\}(\varphi), \\ h_\ell(\varphi) &= h(\varphi) + \varepsilon \ell(\varphi), \quad -1 \leq \varepsilon \leq 1, \quad h, \ell \in Y_0, \end{aligned}$$

$$\varphi(\varphi) = \ell(\varphi) + iS[\ell](\varphi),$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Припустимо тепер, що приріст аргумента функції

$$G(t) = [V_{ezz}(x_0(\varphi), y_0(\varphi), \lambda_0) - V_{izz}(x_0(\varphi), y_0(\varphi); D_0)], \quad t = e^{i\varphi}$$

по межі ∂D_0 області D_0 дорівнює нулю, тобто

$$\frac{1}{2\pi} [\arg G(t)]_{\partial D_0} = 0. \quad /9/$$

Взявши $h \equiv 0$ і використовуючи методику дослідження крайової задачі Рімана-Гільберта, зв'язаної з оператором $/8/[2]$, лема 3), переконуємося, що оператор $/8/$ при $h \equiv 0$ має обмежений обернений оператор на Y . Таким чином, наявна така теорема існування. Нехай потенціал $/1/$ задовольняє умовам а/, б/. Тоді за умови $/9/$ нелінійне інтегральне рівняння $/3/$ в достатньо малому околі параметра

$\lambda = \lambda_0$ має розв'язок

$$x_h(\varphi, \lambda) = e^{u_0(\varphi) + h(\varphi, \lambda)} \cdot \cos[S[u_0 + h](\varphi) + \varphi], \quad /10/$$

де $h(\varphi, \lambda) \in Y$. Кожній функції $/10/$ за формулою $/6/$ відповідає розв'язок оберненої задачі логарифмічного потенціалу. Цей розв'язок є зіркованою функцією та неперервно залежить від параметра λ .

З теореми про наявну функцію випливає, що при λ достатньо близьких до λ_0 існує єдиний розв'язок.

Список літератури: І. К а н т о р о в и ч Л.В., А к и л о в Г.П. Функціональний аналіз в нормированих пространствах. - М.: Физматиз, 1959. 2. М и х а й л ю к М.Й. Про локальну єдність розв'язку оберненої задачі логарифмічного потенціалу для змінної густини. - Математична фізика, 1974, вип. 16.

Стаття надійшла в редакцію 29.08.1980 р.

УДК 513

С.В.Дениско

МЕХАНІЗМ ДЛЯ УТВОРЕННЯ ПРЯМОЇ

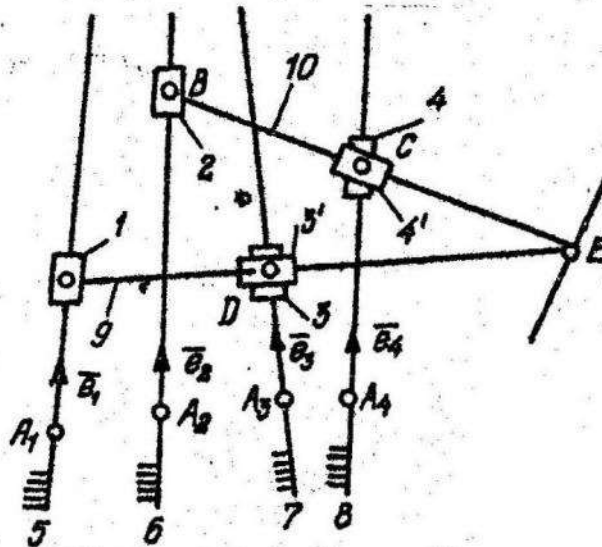
Зображений на рисунку механізм має таку будову. Повзуни 1, 2, 3, 4 переміщаються відповідно вздовж напрямних 5, 6, 7, 8 так, що

$$\overline{A_1 A} = \lambda \bar{e}_1, \quad \overline{A_2 B} = \kappa_2 \lambda \bar{e}_2, \quad \overline{A_3 D} = \kappa_3 \lambda \bar{e}_3, \quad \overline{A_4 C} = \kappa_4 \lambda \bar{e}_4$$

1 A_1, A_2, A_3, A_4 - зафіксовані точки; $\kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$ - сталі; λ - змінна; $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ - орти.

Переміщення повзунів 1 - 4 можна здійснити за допомогою складного

зубчастого механізму, у якого вказані повзуни є зубчастими рейками. Повзуни 3, 3' утворюють обертальну пару D , а повзуни 4, 4' — обертальну пару C . Напрямна 9 повзуна 3' утворює обертальну пару A з повзуном 1, а напрямна 10 повзуна 4' — обертальну пару B з повзуном 2, E — точка перетину прямих AD , BC .



Вияснимо, які необхідні та достатні умови повинні бути для того, щоб точка E описувала пряму.

Виберемо прямокутну декартову систему координат x^1 , x^2 так, щоб вісь x^2 суміщалась з прямою, яку описує точка E .

Рівняння прямих AD , BC запишемо відповідно таким чином:

$$\frac{x^1 - (x_1^1 + \lambda e_1^1)}{x_3^1 + \kappa_3 \lambda e_3^1 - (x_1^1 + \lambda e_1^1)} = \frac{x^2 - (x_1^2 + \lambda e_1^2)}{x_3^2 + \kappa_3 \lambda e_3^2 - (x_1^2 + \lambda e_1^2)},$$

$$\frac{x^1 - (x_2^1 + \kappa_2 \lambda e_2^1)}{x_4^1 + \kappa_4 \lambda e_4^1 - (x_2^1 + \kappa_2 \lambda e_2^1)} = \frac{x^2 - (x_2^2 + \kappa_2 \lambda e_2^2)}{x_4^2 + \kappa_4 \lambda e_4^2 - (x_2^2 + \kappa_2 \lambda e_2^2)}, \quad /I/$$

де x_m^i — координати точки A_m , а e_m^i — координати вектора $\bar{e}_m$. Знайшовши з системи /I/ x^1 і прирівнявши його до нуля, матимемо

$$\lambda^3 [\kappa^3 (-\kappa_4 e_4^1 + \kappa_2 e_2^1)(e_1^1 e_3^2 - e_1^2 e_3^1) +$$

$$\begin{aligned}
& + \kappa_2 \kappa_4 (\kappa_3 e_3' - e_1') (e_2' e_4^2 - e_2^2 e_4')] + \lambda' [\kappa_4 (-x_4' + x_2') \times \\
& \times (e_1' e_3^2 - e_1^2 e_3') + (-\kappa_4 e_4' + \kappa_2 e_2') (e_1' x_3^2 + \kappa_3 e_3^2 x_1' - \\
& - e_1^2 x_3' - \kappa_3 e_3' x_1^2) + \kappa_2 \kappa_4 (x_3' - x_1') (e_2' e_4^2 - e_2^2 e_4') + \\
& + (\kappa_3 e_3' - e_1') (\kappa_2 e_2' x_4^2 + \kappa_4 e_4^2 x_2' - \kappa_2 e_2^2 x_4' - \kappa_4 e_4' x_2^2)] + \\
& + \lambda [(-x_4' + x_2') (e_1' x_3^2 + \kappa_3 e_3^2 x_1' - e_1^2 x_3' - \kappa_3 e_3' x_1^2) + \\
& + (-\kappa_4 e_4' + \kappa_2 e_2') (x_1' x_3^2 - x_1^2 x_3') + (x_3' - x_1') \times \\
& \times (\kappa_2 e_2' x_4^2 + \kappa_4 e_4^2 x_2' - \kappa_2 e_2^2 x_4' - \kappa_4 e_4' x_2^2) + \\
& + (\kappa_3 e_3' - e_1') (x_2' x_4^2 - x_2^2 x_4')] + (-x_4' + x_2') \times \\
& \times (x_1' x_3^2 - x_1^2 x_3') + (x_3' - x_1') (x_2' x_4^2 - x_2^2 x_4') = 0.
\end{aligned}$$

Оскільки в останній рівності λ може бути будь-яким, то існують такі умови:

$$\begin{aligned}
& \kappa_3 (-\kappa_4 e_4' + \kappa_2 e_2') (e_1' e_3^2 - e_1^2 e_3') + \kappa_2 \kappa_4 (\kappa_3 e_3' - e_1') \times \\
& \times (e_2' e_4^2 - e_2^2 e_4') = 0, \\
& \kappa_3 (-x_4' + x_2') (e_1' e_3^2 - e_1^2 e_3') + (-\kappa_4 e_4' + \kappa_2 e_2') \times \\
& \times (e_1' x_3^2 + \kappa_3 e_3^2 x_1' - e_1^2 x_3' - \kappa_3 e_3' x_1^2) + \kappa_2 \kappa_4 (x_3' - x_1') \times \\
& \times (e_2' e_4^2 - e_2^2 e_4') + (\kappa_3 e_3' - e_1') (\kappa_2 e_2' x_4^2 + \kappa_4 e_4^2 x_2' - \\
& - \kappa_2 e_2^2 x_4' - \kappa_4 e_4' x_2^2) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-x_4' + x_2') (e_1' x_3^2 + \kappa_3 e_3^2 x_1' - e_1^2 x_3' - \kappa_3 e_3' x_1^2) + \\
& + (-\kappa_4 e_4' + \kappa_2 e_2') (x_1' x_3^2 - x_1^2 x_3') + (x_3' - x_1') \times \\
& \times (\kappa_2 e_2' x_4^2 + \kappa_4 e_4^2 x_2' - \kappa_2 e_2^2 x_4' - \kappa_4 e_4' x_2^2) + \\
& + (\kappa_3 e_3' - e_1') (x_2' x_4^2 - x_2^2 x_4') = 0, \\
& (-x_4' + x_2') (x_1' x_3^2 - x_1^2 x_3') + (x_3' - x_1') (x_2' x_4^2 - x_2^2 x_4') = 0. \quad /2/
\end{aligned}$$

Вони необхідні та достатні для того, щоб точка $\mathcal{E}$ описувала пряму.

З /2/ випливають такі твердження.

I. Якщо точки A_1, A_2, A_3, A_4 суміщаються, то вони знаходяться на прямій, яку описує точка $\mathcal{E}$.

Д о в е д е н н я . Точки A_1, A_2, A_3, A_4 суміщаються, тому умови /2/ мають вигляд:

$$\begin{aligned}
& \kappa_3 (-\kappa_4 e_4' + \kappa_2 e_2') (e_1' e_3^2 - e_1^2 e_3') + \kappa_2 \kappa_4 (\kappa_3 e_3' - e_1') \times \\
& \times (e_2' e_4^2 - e_2^2 e_4') = 0, \quad /3/ \\
& x_1' [(-\kappa_4 e_4' + \kappa_2 e_2') (\kappa_3 e_3^2 - e_1^2) + (\kappa_3 e_3' - e_1') (\kappa_4 e_4^2 - \kappa_2 e_2^2)] = 0.
\end{aligned}$$

Коли $x_1' \neq 0$, то з другої рівності системи /3/ дістаємо

$$\frac{\lambda (-\kappa_4 e_4' + \kappa_2 e_2')}{\lambda (\kappa_3 e_3' - e_1')} = \frac{\lambda (-\kappa_4 e_4^2 + \kappa_2 e_2^2)}{\lambda (\kappa_3 e_3^2 - e_1^2)}.$$

Звідси випливає, що пряма BC паралельна прямій AD . Це неможливо, оскільки ми вимагаємо, щоб пряма BC перетиналась з прямою AD у точці $\mathcal{E}$. Отже, $x_1' = 0$. Тоді умови /3/ можна

задовільнити, і ми маємо механізм, точки A_1, A_2, A_3, A_4 якого суміщаються з точкою на прямій, яку описує точка E .

2. Нехай суміщаються напрямні 5 та 6 і 7 та 8, та паралельні осі x^2 . Точка E описуватиме вісь x^2 тоді і тільки тоді, коли відношення другої координати вектора $\overline{CD}$ до другої координати вектора $\overline{BA}$ дорівнюватиме відношенню першої координати точки D до першої координати точки A .

Д о в е д е н н я . Візьмемо вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ такими, щоб їх напрямки суміщалися з додатним напрямком осі x^2 .
Тоді

$$e_m^1 = 0, \quad e_m^2 = 1. \quad /4/$$

Крім того, очевидно,

$$x_1^1 = x_2^1, \quad x_3^1 = x_4^1. \quad /5/$$

З огляду на /4/ та /5/ умови /2/ запишемо таким чином:

$$\frac{\lambda(K_3 - K_4)}{\lambda(1 - K_2)} = \frac{x_3^1}{x_1^1}, \quad \frac{x_3^2 - x_4^2}{x_1^2 - x_2^2} = \frac{x_3^1}{x_1^1},$$

що і доводить наше твердження.

Стаття надійшла в редакцію 15.09.1978 р.

З м і с т

Лавренко С.П. Стійкість за Ляпуновим нульового розв'язку рівняння коливання пластинки	3
Лавренко С.П. Існування і єдиність розв'язку нелінійного рівняння коливання пластинки	6
Цимбал В.М. Задача Коші для сингулярно збуреного гіперболічного рівняння	II
Цимбал В.М. Асимптотичний розв'язок змішаної задачі для гіперболічного рівняння з параметром	14
Херновий Д.В., Костенко В.Г. Про асимптотичну поведінку розв'язків лінійних звичайних диференціальних рівнянь п'ятого порядку	18
Костенко К.С. Асимптотична поведінка розв'язків лінійних звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку	22
Костенко В.Г., Веселовська О.О. Розв'язування однієї крайової задачі для анізотропного отержня	24
Шипка Й.Г. Інтегральне зображення метагармонічних функцій в областях зі щільностями	31
Губаль Л.О., Іванчов М.І. Про одну задачу нелінійної теплопровідності	34
Парасюк Л.С., Парасюк Є.М. Задача Коші для гіперболічного диференціального рівняння з параметром, що вироджується на межі $X_n = 0$	38
Лянце В.Е., Сторож О.Г. Оператори, споріднені зі самоспряженим:	42
Микитюк Я.В. Про слабо регулярне збурення.....	45
Микитюк Я.В. Властивості деяких сингулярних інтегральних операторів	50

Федик М.М. Про розв'язок задачі Коші в гільбертовому просторі	54
Чуйко Г.І. Розклад за власними елементами одного несамоспряженого оператора	57
Фрідман О.Н. Оцінки знизу функцій, субгармонічних в $\mathbb{R}^m$ або в m -вимірній кулі	62
Гольдберг А.А. Зауваження про обмежені аналітичні функції	68
Галь Ю.М. Про максимальний член абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле	70
Шеремета М.М. Асимптотичні властивості цілих функцій повільного росту, заданих рядами Діріхле	74
Шеремета М.М. Про дійсні значення цілих функцій	75
Хом'як М.М. Теорема типу Вімана для цілих функцій нульового порядку за Ріттом, заданих рядами Діріхле ...	76
Кондратюк А.А. Дві властивості мероморфних функцій цілком регулярного росту	81
Кондратюк А.А. Про узагальнення класів цілих функцій цілком регулярного росту	85
Ковальчук Б.В., Фарион З.Д. Про збіжність рядів Фур'є деяких класів S^p - майже періодичних матриць	90
Лісевич Л.М. Деякі достатні умови існування обмеженого і майже періодичного розв'язку одного лінійного диференціального рівняння другого порядку	93
Квіт І.Д., Кооарчин В.М. Рівність Парсеваля для відбиття	98
Горбачук О.Л., Крочак О.В. Кручення над дуо-кільцями	100

Горбачук О.Л., Попович Р.Б. Про розшен- люваність J -радикалів	104
Михалюк М.Й., Парасяк Є.М. Про теорему існування розв'язку оберненої задачі логарифмічного потен- ціалу для змінної густини	108
Дениско С.В. Механізм для утворення прямої	III

Вестник Львовского университета

Выпуск 18

Серия механико-математическая

ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ

/На украинском языке/

Львов

Издательство при Львовском государственном университете
издательского объединения "Вища школа"

Редактор В.В.Войтович

Художній редактор В.В.Ковальчук

Технічний редактор А.А.Степанюк

Коректор Т.Т.Ковак

Підп. до друку 26.II.80 . БГ 10956 . Формат 60x84 1/16.

Папір друк. № 3. Офс. друк. 7,44 умовн. друк. арк. 5,62 обш.-вид. арк.

Тираж 600 прим. Вид. № 858 . Зам. 3207 . Ціна 70 коп.

Замовне.

Видавництво при Львівському державному університеті
видавничого об'єднання "Вища школа". 290000, Львів,
вул. Університетська, 1.

Обласне книжкова друкарня Львівського обласного управління
в справах видавництв, поліграфії та книжкової торгівлі.
290000, Львів, вул. Стефаника, II.

УДК 517.946

Устойчивость по Ляпунову нулевого решения уравнения колебания пластинки. Л а в р е н к о С.П. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 18. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 3-6 /на укр. яз./.

Рассмотрена одна смешанная задача для уравнения

$$u_{xxxx} + \beta u_{xx} + u_{tt} + \alpha u_t = -f(u).$$

Показано, что если $f(0)=0, zf(z) > 0$ при $z \neq 0, \beta < \pi^2, \alpha > 0$, то нулевое решение указанного уравнения асимптотически устойчиво в целом по отношению к мере

$$\rho(t) = \left(\int_0^1 (u_{xx}^2 + u_x^2 + u_t^2 + u^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Список лит.: 3 назв.

УДК 517.946

Существование и единственность решения нелинейного уравнения колебания пластинки. Л а в р е н к о С.П. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 18. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 6-11 /на укр. яз./.

В работе рассмотрена одна смешанная задача для уравнения

$$u_{xxxx} + \beta u_{xx} + u_{tt} + 2\alpha u_t = f(t, x, u, u_t, u_x, u_{xx}).$$

Получены некоторые условия существования и единственности классического решения как на конечном так и на бесконечном интервалах времени.

УДК 517.946

Задача Коши для сингулярно возмущенного гиперболического уравнения. Ц и м б а л В.Н. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 18. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 11 - 14 /на укр. яз./.

Методом М.И.Вишика - Л.А.Дюстернака получено асимптотическое разложение решения задачи Коши для линейного гиперболического уравнения второго порядка, вырождающегося в алгебраическое. Пограничный слой состоит из двух типов пограничных функций. Список лит.: 4 назв.

УДК 517.946

Асимптотическое решение смешанной задачи для гиперболического уравнения с параметром. Ц и м б а л Е.Н. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 18. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с.14-18 /на укр. яз./.

Методом М.И.Вишика-Л.А.Лекстерника получено асимптотическое разложение решения смешанной задачи для линейного гиперболического многомерного уравнения второго порядка, вырождающегося в параболическое. Список лит.: 5 назв.

УДК 517.94

Об асимптотическом поведении решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений пятого порядка. Ж е р н о в и й Ю.В., К о с т е н к о В.Г. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.18. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 18-21 /на укр. яз./.

Найдены асимптотические представления при $X \rightarrow \infty$ фундаментальной системы решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения пятого порядка. Список лит.: 3 назв.

УДК 517.913

Асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. К о с т е н к о К.С. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 18. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 22 - 24 /на укр. яз./.

Определены достаточные условия, при которых найдены асимптотические формулы для фундаментальной системы решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. Список лит.: 2 назв.

УДК 517.94

Решение одной краевой задачи для анизотропного стержня.
К о с т е н к о В.Г., В е с е л о в с к а я А.А. - Вестн. Львов.
ун-та, сер. мех.-мат., вып. 18. Вопросы математического анализа
и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те,
1981, с. 24 - 31 /на укр. яз./.

Решена задача о кручении ортотропного стержня с сечением
в виде части эллиптического кольца, заключенного между дугами
софокусных гипербол. Используя групповые свойства дифференциальных
уравнений, найдены новые зависимости между модулями сдвига $G_1(u)$
и $G_2(u)$, при которых эта задача решается в явном виде. Список
лит.: 3 назв.

УДК 517.946

Интегральное представление метагармонических функций в областях
со щелями. Ш и п к а И.Г. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат.,
вып. 18. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов:
Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 31 - 34
/на укр. яз./.

Выводятся интегральные формулы для метагармонического опера-
тора четвертого порядка и метагармонических функций в областях
со щелями, где под щелью понимается разрез вдоль гладкой незамкну-
той поверхности, которая ограничена гладкой линией. Список лит.:
2 назв.

УДК 517.946

Об одной задаче нелинейной теплопроводности. Г у б а л ь Л.Е.,
И в а н ч о в Н.И. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 18.
Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа.
Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 34 - 38 /на укр. яз./.

Методом малого параметра решена задача о локальном поверхност-
ном интенсивном нагреве пространственного слоя в предположении,
что коэффициент теплопроводности является кусочно-линейной
функцией температуры.

УДК 517.946

Задача Коши для гиперболического дифференциального уравнения с параметром, вырождающегося на границе $\chi_n = 0$. Парасюк Л.С., Парасюк Е.Н. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 18. Вопросы математического анализа и его приложения. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов.ун-те, 1981, с. 38 - 42 /на укр. яз./.

В n -мерном пространстве рассмотрена задача Коши для гиперболического уравнения с параметром, вырождающегося на границе $\chi_n = 0$. Показано, что решение данной задачи существует в явном виде. Список лит.: 5 назв.

УДК 513.88

Операторы, родственные самосопряженному. Лянце В.Э., Сторож О.Г. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 18. Вопросы математического анализа и его приложения. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 42 - 45 /на укр. яз./.

Установлены условия взаимной сопряженности операторов, являющихся расширениями некоторого симметрического сужения заданного самосопряженного оператора. Список лит.: 3 назв.

УДК 513.88

О слабо регулярном возмущении. Микитюк Я.В. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 18. Вопросы математического анализа и его приложения. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 45 - 49 /на укр. яз./.

Исследуется спектр, резольвента, собственные и присоединенные элементы возмущенного оператора умножения на n -я степень независимой переменной в пространстве $L_2(R)$. Получено равенство Парсеваля, выражающееся посредством регуляризованного интеграла. Список лит.: 3 назв.

УДК 513.88

Свойства некоторых сингулярных интегральных операторов. М и -
к и т ю к Я.В. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 18.
Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища шко-
ла. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 50 - 53 /на укр. яз./.

Изучаются предельные значения "обобщенных интегралов типа
Коши". Доказано, что эти предельные значения определяют операторы,
непрерывные в пространстве $L_2(R)$. Список лит.: 2 назв.

УДК 517.948

О решении задачи Коши в гильбертовом пространстве. Ф е -
д и к М.Н. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 18. Вопросы
математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во
при Львов. ун-те, 1981, с. 54 - 57 /на укр. яз./.

Рассматривается задача Коши $\frac{dy}{dt} = Ty, y(0) = y_0, y_0 \in D(T)$,
где T - оператор, родственник генератору сильно непрерывной
полугруппы класса C_0 , в произвольном гильбертовом пространстве.
Показано, что эта задача сводится к некоторому уравнению в конечно-
мерном пространстве. Список лит.: 4 назв.

УДК 517.9

Разложение по собственным элементам одного несамосопряженного
оператора. Ч у й к о Г.І. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат.,
вып. 18. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов:
Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 57 - 61
/на укр. яз./.

Приводится описание спектральных свойств оператора Шредингера
с комплексным потенциалом, допускающим разделение переменных,
построено разложение по собственным и присоединенным функциям этого
оператора, включая равенство Парсеваля. Список лит.: 3 назв.

УДК 517.53

Оценки снизу функций, субгармонических в R^m или в m -мерном шаре. Фридман А.Н. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 18. Вопросы математического анализа и его приложения. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 62 - 67 /на укр. яз./

Получены новые оценки снизу функций, субгармонических в R^m , $m \geq 2$, или в m -мерном шаре. При $m=2$ приводятся примеры, показывающие неулучшаемость некоторых оценок. Список лит.: 11 назв.

УДК 517.549

Замечание об ограниченных аналитических функциях. Гольдберг А.А. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 18. Вопросы математического анализа и его приложения. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 68 - 70 /на укр. яз./

Показано, что существуют две ограниченные аналитические в единичном круге функции f_1 и f_2 без общих нулей, такие, что из $|f| \leq |f_1| + |f_2|$ следует наличие бесконечного множества нулей у аналитической функции f . Отсюда вытекает отрицательный ответ на вопросы Дж.Эрла и Б.Тейлора. Список лит.: 2 назв.

УДК 517.5

О максимальном члене абсолютно сходящегося в полуплоскости ряда Дирихле. Галь Д.М. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 18. Вопросы математического анализа и его приложения. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 70 - 73 /на укр. яз./

При помощи обобщенных порядков роста изучается связь между ростом аналитической в полуплоскости функции и ростом максимального члена абсолютно сходящегося в этой полуплоскости ряда Дирихле с неотрицательными показателями, представляющего данную функцию. Список лит.: 3 назв.

УДК 517.53

Асимптотические свойства целых функций медленного роста, представленных рядами Дирихле. Ш е р е м е т а М.Н. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 18. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 74-75 /на укр. яз./.

Для целых функций, представленных рядами Дирихле с неотрицательными показателями, устанавливается связь между поведением этой функции на вертикальных прямых и ростом максимального члена и центрального индекса. Список лит.: 2 назв.

УДК 517.535.4

О действительных значениях целых функций. Ш е р е м е т а М.Н. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 18. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 75 - 76 /на укр. яз./.

Известная теорема А.А.Гельфонда о количестве точек на окружности, в которых целая функция принимает действительные значения, обобщается на случай обобщенных порядков. Список лит.: 3 назв.

УДК 517.537.6

Теорема типа Вимана для целых функций нулевого порядка по Ритту, заданных рядами Дирихле. Х о м я к М.М. - Вестник Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 18. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 76 - 81 /на укр. яз./.

Для целой функции f нулевого порядка по Ритту, заданной рядом Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{\lambda_n}$, $a_1 = 1$, даются оценки $M(x) = \sup\{|f(x+iy)| : |y| < \infty\}$ через максимальный член и центральный индекс этого ряда. Список лит.: 3 назв.

УДК 517.535.4

Два свойства мероморфных функций вполне регулярного роста.
К о н д р а т ю к А.А. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 18. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 81 - 85 /на укр. яз./.

Устанавливается: 1/ если функция роста λ имеет вид $\lambda(z) = z^{\rho(z)}$, где $\rho(z)$ - уточненный порядок, $\rho(z) \rightarrow \rho > 0$, то необходимым и достаточным условием принадлежности функции f к классу L^0 мероморфных функций вполне регулярного роста является существование усредненной /в некотором смысле/ угловой плотности пары последовательностей ее нулей и полюсов и выполнения одного дополнительного условия в случае целого ρ ; 2/ критерием нетривиальности класса мероморфных функций вполне регулярного роста с положительными нулями и полюсами является условие $\lambda(z) = z^{\rho(z)}$, где $\rho(z)$ - некоторый уточненный порядок. Список лит.: 8 назв.

УДК 517.574

Об обобщении классов целых функций вполне регулярного роста.
К о н д р а т ю к А.А. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 18. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 85 - 89 /на укр. яз./.

Даются обобщения классов целых функций вполне регулярного роста, введенных ранее автором /РЖ Мат., 1978, IIБ 131/. А именно, рассматриваются классы L^0 субгармонических в S функций вполне регулярного роста, измеряемого теперь уже относительно произвольной функции роста. Получены необходимые условия на распределения масс таких функций, а также критерий нетривиальности классов L^0 .
Список лит.: 6 назв.

УДК 517.512.2

О сходимости рядов Фурье некоторых классов S^0 -почти периодических матриц. К о в а л ь ч у к Б.В., Ф а р и о н З.Д. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 18. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 90 - 92 /на укр. яз./.

Изучены условия сходимости рядов Фурье S -почти периодических матриц в точке непрерывности и в точке Лебега, а также лакунарных рядов Фурье S^2 -почти периодических матриц, спектр которых при определенной разреженности имеет единственную точку сгущения на бесконечности. Список лит.: 4 назв.

УДК 517.917

Некоторые достаточные условия существования ограниченного и почти периодического решения одного линейного дифференциального уравнения второго порядка. Л и с е в и ч Л.М. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 18. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 90 - 97 /на укр. яз./.

Найдены некоторые достаточные условия существования ограниченного и почти периодического решения одного линейного дифференциального уравнения второго порядка с ζ^p - почти периодическим свободным членом. Список лит.: 2 назв.

УДК 519.21

Равенство Парсевала для отражения. К в и т И.Д., К о с а р - ч и н В.Н. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 18. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 98 - 100 /на укр. яз./.

Дано вывод обобщенного равенства Парсевала, выражающего функцию распределения произведения независимых положительных случайных величин в терминах функций распределения и отражений множителей. Список лит.: 2 назв.

УДК 512.553

О расщепляемости $\mathcal{J}$ -радикалов. Г о р б а ч у х Е.Л., П о - п о в и ч Р.Б. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 18. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 104 - 107 /на укр. яз./.

С каждым правым идеалом кольца R связываются некоторые специальные радикалы. Рассматриваются условия расщепляемости этих радикалов над кольцом R . Список лит.: 6 назв.

УДК 512.553

Кручения над дуо-кольцами, Горбачук Е.Л., Кро-
чак О.В. — Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 18. Вопрос-
ы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа.
Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 100 — 104 /на укр. яз./.

Описываются дуо-кольца, над которыми все кручения расщепляемы.
Список лит.: 4 назв.

УДК 517.948

О теореме существования решения обратной задачи логарифмическо-
го потенциала для переменной плотности, Михалюк М.И., Па-
расюк Е.Н. — Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 18.
Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища шко-
ла. Изд-во при Львов. ун-те, 1981, с. 108 — 111 /на укр. яз./.

Рассмотрен функционал, критические точки которого являются
решениями обратной задачи логарифмического потенциала для перемен-
ной плотности. При некоторых условиях доказана теорема существо-
вания в "малом" в классе звездных областей. Список лит.: 2 назв.

УДК 513

Механизм для образования прямой. Денисюк С.В. — Вестн.
Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 18. Вопросы математического
анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов.
ун-те, 1981, с. 111 — 115 /на укр. яз./.

Рассматривается механизм, состоящий из шести ползунов, двух
кривошипов и сложного зубчатого механизма. Четыре ползуна переме-
щаются сложным зубчатым механизмом вдоль неподвижных направляющих.
Два из них образуют вращательные пары с ползунами, которые переме-
щаются вдоль кривошипов, присоединенных к двум другим ползунам.
Исследуются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы
точка пересечения кривошипов описывала прямую. Ил. 1.

70 коп.



Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1981, вип. 18. 1—128.