УДК 518:517.944/947

Й.В.Людкевич, А.Т.Дудикевич

РІЗНИЦЕВІ АПРОКСИМАЦІЇ ПІДВИЩЕНОГО ПОРЯДКУ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА В ПРОСТОРІ

Різницеві схеми підвищеного порядку точності для рівняння Пуассона розглядалися у працях [4, 5] для довільного p, де p – розмірність задачі. Для двомірної області побудована різницева апроксимація рівняння Пуассона для прямокутної нерівномірної сітки з похибкою $O(h^3)$ [1].

Ми задачу Діріхле для рівняння Пуассона апроксимуємо різницево схемою четвертого порядку точності на паралелепіпедальних сітках, а систему різницевих рівнянь розв"язуємо методом верхньої релаксації по лініях.

У прямокутному паралелепіпеді $\bar{G}=\{x=(x_1,x_2,x_3): 0\le x_\alpha \le l_\alpha, \alpha=\overline{1,3}\}$ з границею Γ шукаємо розв"язок задачі Діріхле для рівняння Пуассона

$$LU=\sum_{\alpha=1}^{3} L_\alpha U=-f(x), \qquad \text{для } x\in G, \qquad /1/$$

$$U/\Gamma=\varphi(x), \qquad /2/$$

де $L_\alpha U=\partial^2 U/\partial x_\alpha^2$ $/\alpha = 1, 2, 3/$, $f(x)$ і $\varphi(x)$ – задані неперервні функції $\bar{G}$ і Γ відповідно; $G=\bar{G}/\Gamma$.

Введемо в $\bar{G}$ сітку $\bar{\omega}_h$, рівномірну по кожному напрямку x_α з кроком h_α, $\bar{\omega}_h=\{(ih_1, jh_2, kh_3), i,j,k=\overline{0,N_\alpha}, h_\alpha=l_\alpha/N_\alpha, \alpha=1,2,3\}$, границею γ та множиною внутрішніх вузлів $\omega_h=\bar{\omega}_h/\gamma$.

Розглянемо відповідну різницеву задачу Діріхле

$$\lambda' V = -g(x), \quad x \in \omega_h, \qquad /3/$$

$$V|_\gamma = \varphi(x), \qquad /4/$$

де $g(x) = f(x) + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^{3} h_\alpha^2 \lambda_\alpha f$, $\lambda_\alpha f = f_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$.

Оператор λ' визначається на двадцятисемиточковому шаблоні, який складається з вузлів $(x_1 + ih_1,\ x_2 + jh_2,\ x_3 + kh_3)$, $i, j, k = -1, 0, 1$ і записується на рівномірній сітці в індексній формі так:

$$
\begin{aligned}
(\lambda' V)_{i,j,k} = \frac{1}{60}\Big\{ & 2(20\alpha - 5\beta - 5\gamma + 4)(V_{i+1,j,k} + V_{i-1,j,k}) + \\
& + 2(20\beta - 5\alpha - 5\gamma + 4)(V_{i,j+1,k} + V_{i,j-1,k}) + 2(20\gamma - 5\alpha - 5\beta + \\
& + 4)(V_{i,j,k+1} + V_{i,j,k-1}) + [5(\beta + \alpha) - 4](V_{i+1,j+1,k} + V_{i-1,j+1,k} + \\
& + V_{i+1,j-1,k} + V_{i-1,j-1,k}) + [5(\alpha + \gamma) - 4](V_{i+1,j,k+1} + V_{i+1,j,k-1} + \\
& + V_{i-1,j,k+1} + V_{i-1,j,k-1}) + [5(\beta + \gamma) - 4](V_{i,j+1,k+1} + V_{i,j+1,k-1} + V_{i,j-1,k+1} + \\
& + V_{i,j-1,k-1}) + 2(V_{i+1,j+1,k+1} + V_{i+1,j+1,k-1} + V_{i-1,j+1,k+1} + \\
& + V_{i+1,j-1,k+1} + V_{i-1,j-1,k+1} + V_{i-1,j+1,k-1} + V_{i+1,j-1,k-1} + \\
& + V_{i-1,j-1,k-1}) - 16[1 + 5(\alpha + \beta + \gamma)]V_{i,j,k}\Big\} = g_{i,j,k}.
\end{aligned}
\qquad /5/
$$

де $\alpha = \frac{1}{h_1^2}$; $\beta = \frac{1}{h_2^2}$; $\gamma = \frac{1}{h_3^2}$.

На вибраній сітці різницева апроксимація /5/ має порядок $O(h^4)$. На кубічній сітці ця апроксимація переходить у відому апроксимацію [3] з похибкою $O(h^6)$.

Систему різницевих рівнянь /3/–/4/ розв"язуємо ітераційним методом верхньої релаксації по лініях, згідно з яким проміжкові величини $V^{(n+1/2)}_{i,j,k}$ визначаємо методом прогонки з рівняння

$$aV^{(n+1/2)}_{i+1,j,k} + bV^{(n+1/2)}_{i,j,k} + aV^{(n+1/2)}_{i-1,j,k} = -\Big\{2(20\beta-5\alpha-5\gamma+4)\big(V^{(n)}_{i,j+1,k}+V^{(n+1)}_{i,j-1,k}\big) + 2(20\gamma-5\alpha-5\beta+4)\big(V^{(n)}_{i,j,k+1}+V^{(n+1)}_{i,j,k-1}\big) + [5(\beta+\alpha)-4]\big(V^{(n)}_{i+1,j+1,k}+V^{(n)}_{i-1,j+1,k}+V^{(n+1)}_{i+1,j-1,k}+V^{(n+1)}_{i-1,j-1,k}\big) + [5(\alpha+\gamma)-4]\big(V^{(n)}_{i+1,j,k+1}+V^{(n+1)}_{i+1,j,k-1}+V^{(n)}_{i-1,j,k+1}+V^{(n+1)}_{i-1,j,k-1}\big) + [5(\beta+\gamma)-4]\big(V_{i,j+1,k+1}+V_{i,j+1,k-1}+V^{(n)}_{i,j-1,k+1}+V^{(n+1)}_{i,j-1,k-1}\big) + 2\big(V^{(n)}_{i+1,j+1,k+1}+V^{(n+1)}_{i+1,j+1,k-1}+V^{(n)}_{i-1,j+1,k+1}+V^{(n)}_{i+1,j-1,k+1}+V^{(n)}_{i-1,j-1,k+1}+V^{(n+1)}_{i-1,j+1,k-1}+V^{(n+1)}_{i+1,j-1,k-1}+V^{(n+1)}_{i-1,j-1,k-1}\big) + 60g_{i,j,k}\Big\}, \qquad /5/$$

$$V^{(n+1)}_{i,j,k} = \omega_{опт} V^{(n+1/2)}_{i,j,k} + (1-\omega_{опт})V^{(n)}_{i,j,k},$$

де $a = 2(20\alpha-5\beta-5\gamma+4)$; $b = 16[1+5(\alpha+\beta+\gamma)]$,
а $\omega_{опт}$ визначається за відомою методикою [2].

Запропонована різницева схема /5/ придатна для розрахунків просторових електростатичних полів електронно-оптичних систем методом сіток. Її апробація засвідчила, що вона ефективніша порівняно зі схемами другого порядку точності.

Список літератури: I. Голубцов Б.И., Ильин В.П. О разностной аппроксимации уравнения Пуассона на неравномерных прямоугольных сетках. - Сибирский математический журнал, 1978, 19, № 3. 2. Дудыкевич А.Т., Людкевич И.В. Численное решение трехмерной задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом сеток. - Вычислительная и прикладная математика, 1977, вып. 32. 3. Микеладзе Ш.Е. О численном решении дифференциальных уравнений Лапласа и Пуассона. - Известия вузов АН СССР, сер. мат., 1938, № 2. 4. Николаев Е.С., Самарский А.А. Методы численного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона любого числа измерений. - ДАН СССР, 1972, 206, № 4. 5. Сулханишвили Г.И. О равномерной сходимости разностной схемы Самарского-Николаева. - Сообщения АН Груз. ССР, 1974, 73, № 3.

Стаття надійшла в редколегію 25.02.81

УДК 517.944:947

Марія Д.Мартиненко, Михайло Д.Мартиненко

ПРО ОДНУ ГРАНИЧНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ НЕСТАНДАРТНОГО ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ

В області $D=\{0\le x\le a,\ 0<y<b\}$ шукаємо класичний розв"язок рівняння

$$M(u)\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=f(x,y), \qquad /1/$$

яке задовольняє на межі Γ області D умовам

$$u\Big|_{\Gamma}=\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=\psi_1(x),\quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=b}=\psi_2(x), \qquad /2/$$