Запропонована різницева схема /5/ придатна для розрахунків просторових електростатичних полів електронно-оптичних систем методом сіток. Її апробація засвідчила, що вона ефективніша порівняно зі схемами другого порядку точності.

Список літератури: I. Голубцов Б.И., Ильин В.П. О разностной аппроксимации уравнения Пуассона на неравномерных прямоугольных сетках. - Сибирский математический журнал, 1978, 19, № 3. 2. Дудыкевич А.Т., Людкевич И.В. Численное решение трехмерной задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом сеток. - Вычислительная и прикладная математика, 1977, вып. 32. 3. Микеладзе Ш.Е. О численном решении дифференциальных уравнений Лапласа и Пуассона. - Известия вузов АН СССР, сер. мат., 1938, № 2. 4. Николаев Е.С., Самарский А.А. Методы численного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона любого числа измерений. - ДАН СССР, 1972, 206, № 4. 5. Сулханишвили Г.И. О равномерной сходимости разностной схемы Самарского-Николаева. - Сообщения АН Груз. ССР, 1974, 73, № 3.

Стаття надійшла в редколегію 25.02.81

УДК 517.944:947

Марія Д.Мартиненко, Михайло Д.Мартиненко

ПРО ОДНУ ГРАНИЧНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ НЕСТАНДАРТНОГО ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ

В області $D=\{0\leq x\leq a,\ 0<y<b\}$ шукаємо класичний розв"язок рівняння

$$M(u)\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=f(x,y), \qquad /1/$$

яке задовольняє на межі Γ області D умовам

$$u\Big|_{\Gamma}=\varphi,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=\psi_1(x),\qquad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=b}=\psi_2(x), \qquad /2/$$

де $\Gamma:\{x=0,\ 0<y<b;\ x=a,\ 0<y<b;\ y=0,\ 0<x<a;\ y=b,\ 0<x<a\}$, φ, ψ_1, ψ_2 – неперервні функції своїх аргументів. Єдиність розв"язку задачі /1/–/2/ випливає з інтегральної тотожності

$$\iint_D \left\{ u M[v] + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\} dS =$$

$$= \int_\Gamma \left\{ u \left[\frac{\partial v}{\partial x}\cos(n,x) - \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}\cos(n,y) \right] - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\cos(n,y) \right\} dl, \qquad /3/$$

де n – зовнішня нормаль до Γ. Справді, припускаючи існування двох розв"язків u_1 та u_2 задачі /1/–/2/ та позначаючи їх різницю через $v = u_1 - u_2$, одержуємо із /3/

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)^2 \right] dS = 0.$$

Звідки $v = C_1 + C_2 y$ в області D / $C_i = const$, $i = 1; 2$/.

Але

$$v\Big|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{y=b} = 0.$$

Тому $C_2 = 0$, $C_1 = 0$ і $v \equiv 0$ в D.

Для того, щоб одержати зображення розв"язку задачі /1/–/2/, побудуємо розв"язок такої задачі:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \delta(x - x_0, y - y_0), \qquad /1'/$$

$$u\Big|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=b} = 0. \qquad /2'/$$

Позначимо розв"язок задачі /1'/–/2'/ через $G(x-x_0, y-y_0)$.

Шукаємо його у вигляді

$$G(x-x_0, y-y_0) = \sum_{k,n=1}^{\infty} a_{kn} X_k(x) Y_n(y), \qquad /4/$$

де

$$X_k = \sin\frac{k\pi}{a}x$$

$$Y_n = -\frac{ch\,z_n - \cos z_n}{sh\,z_n - \sin z_n}\left(sh\frac{z_n y}{b} - \sin\frac{z_n y}{b}\right) + ch\frac{z_n y}{b} - \cos\frac{z_n y}{b}, \qquad /5/$$

причому z_n – корені рівняння

$$ch\,z \cos z = 1. \qquad /6/$$

Очевидно, що при такому виборі τ_n ряд /4/ задовольняє умовам /2'/. Підставляючи /4/ в /I'/, одержуємо для a_{kn} наступний вираз

$$a_{kn}=\frac{\sin\frac{k\pi}{a}x_0\left[-(\operatorname{ch}\tau_n-\cos\tau_n)\left(\operatorname{sh}\frac{\tau_n y_0}{b}-\sin\frac{\tau_n y_0}{b}\right)+\left(\operatorname{ch}\frac{\tau_n y_0}{b}-\cos\frac{\tau_n y_0}{b}\right)\times(\operatorname{sh}\tau_n-\sin\tau_n)\right](\operatorname{sh}\tau_n-\sin\tau_n)}{\frac{ab}{8}\left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\tau_n}{b}\right)^4\right]\left[-(\operatorname{ch}\tau_n-\cos\tau_n)(\operatorname{sh}\tau_n+\sin\tau_n)+(\operatorname{ch}\tau_n+\cos\tau_n)(\operatorname{sh}\tau_n-\sin\tau_n)\right]^2}.$$

Із інтегральної тотожності

$$\iint\limits_D\left[uM(v)-vM(u)\right]dS=\int\limits_\Gamma\left\{u\left[\frac{\partial v}{\partial x}\cos(n,x)-\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}\cos(n,y)\right]-v\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x)-\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\cos(n,y)\right]-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\cos(n,y)\right\}dl$$

випливає, що шуканий розв"язок задачі /I/-/2/ можна зобразити у вигляді:

$$u(x_0,y_0)=\iint\limits_D G(x-x_0,y-y_0)f(x,y)\,dS+$$

$$+\int\limits_\Gamma\left\{\varphi(x,y)\left[\frac{\partial G(x-x_0,y-y_0)}{\partial x}\cos(n,x)-\frac{\partial^3 G(x-x_0,y-y_0)}{\partial y^3}\cos(n,y)\right]dl+\right.$$

$$+\int\limits_0^a\left[\psi_1(x)\left.\frac{\partial^2 G(x-x_0,y-y_0)}{\partial y^2}\right|_{y=0}-\psi_2(x)\left.\frac{\partial^2 G(x-x_0,y-y_0)}{\partial y^2}\right|_{y=b}\right]dx, \quad /7/$$

Зовсім аналогічно можна розглядати й інші граничні задачі для рівняння /I/ в області D. Формула /7/ дає змогу дослідити поведінку розв"язку задачі /I/-/2/ в кутах прямокутника D.

На закінчення відзначимо, що коректно поставлені задачі для рівняння /I/ у довільній області, що обмежена кривою Ляпунова, пов"язані в загальному випадку з неоднаковою кількістю граничних умов на різних ділянках границі.

Список літератури: I. Бабич В.М., Капилевич М.Б., Михлин С.Г. и др. Линейные уравнения математической физики. - М.: Наука, 1964. 2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1976. 3. Положий Г.Н. Уравнения математической физики.-М.: Высшая школа, 1964.

Стаття надійшла в редколегію 02.10.80