УДК 517.944:947

Марія Д.Мартиненко, Михайло Д.Мартиненко,

Л.Ф.Бойко

ЗАДАЧА БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Розглядаємо задачу про визначення обмеженого класичного розв"язку рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right) \qquad /1/$$

в області $\Pi = \{]-\infty, T] \times D\}$, де D – область у E_3, обмежена поверхнею Ляпунова S, що задовольняє на S умову Діріхле

$$u\Big|_S = f(x,t),\ x = (x_1, x_2, x_3); \qquad /2/$$

f – неперервна функція. Такі задачі виникають при вивченні процесів поширення тепла у час, достатньо віддалений від початкового, коли початкові умови практично не впливають на фізичний процес у момент спостереження. Перший строгий аналіз постановки та розв"язність таких задач зробив А.М.Тихонов у 1935 р. [3] для одновимірного рівняння теплопровідності за допомогою методу інтегральних зображень. Ми аналізуємо один з варіантів цього методу.

Розв"язок сформульованої задачі шукаємо у вигляді

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{t}\iint_S a^2 \frac{\partial}{\partial n(y)}\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\right]^3 \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\mu(y,\tau)\,d_yS\,d\tau, \qquad /3/$$

де $|x-y|^2 = \sum_{i=1}^{3}(x_i - y_i)^2$; $\mu(y,\tau)$ – невідома функція: $\vec{n}(y)$ – внутрішня нормаль до S у точці y. З граничних умов та формул стрибка [2] дістаємо інтегральне рівняння типу Вольтерра другого роду для визначення $\mu(y,\tau)$

$$\frac{1}{2}\mu(x,t) + \int_{-\infty}^{t}\iint_S a^2 \frac{\partial}{\partial n(y)}\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\right]^3 \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\mu(y,\tau)\,d_yS\,d\tau = f(x,t). \qquad /4/$$

Отже, розглядувана задача зведена до інтегрального рівняння /4/, з існування розв"язку якого випливатиме розв"язність задачі /I/-/2/. Ряд послідовних наближень для /4/ збіжний, коли

$$\int\limits_{-\infty}^{t}\iint\limits_{S} a^2\left|\frac{\partial}{\partial n(y)}\,\frac{\exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}}{\left[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right]^3}\right| d_yS\,d\tau<1. \qquad /5/$$

Оскільки

$$\int\limits_{-\infty}^{t}\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\right]^3\exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}d\tau=\frac{1}{4a^2\pi|x-y|},$$

то умова /5/ набуває вигляду

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\left|\frac{\partial}{\partial n(y)}\,\frac{1}{|x-y|}\right|d_yS<1,$$

або

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\frac{|\cos\varphi|}{|x-y|^2}\,d_yS<1, \qquad /6/$$

де φ - кут між вектором $\vec{x}-\vec{y}$ та $\vec{n}(y)$.

З означення поверхні Ляпунова випливає

$$|\cos\varphi|<A|x-y|^{\lambda},$$

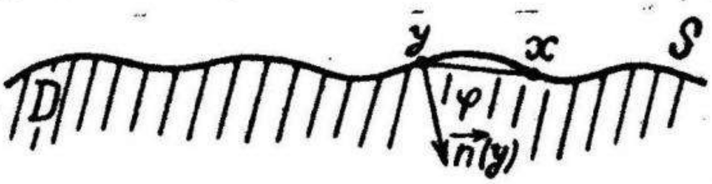
тому рівняння /4/, а з ним і задача /I/-/2/ має розв"язок, коли виконується умова

$$\frac{A}{4\pi}\iint\limits_{S}\frac{d_yS}{|x-y|^{2-\lambda}}<1. \qquad /7/$$

Константу A можна записати явно [I].

Умова /7/ виконується, коли функція f - фінітна, S - її носій є частиною площини $x_3=0$, тобто D - напівпростір $x_3<0$. У цьому випадку $A=0$ і задача /I/-/2/ розв"язна для будь-якої області S. Зауважимо, що в цьому випадку рівняння /4/ має явний розв"язок $\mu=2f$, а тому з формули /3/ випливає явний розв"язок вихідної задачі /I/-/2/.

Якщо $\varphi = \frac{\pi}{2} \pm \chi$, де χ мало змінюється, то $|\cos\varphi| = |\sin\chi| < \varepsilon$ і умова /6/ також виконується при малому χ. Отже, задача /I/-/2/ має розв"язок у випадку, коли D – напівнескінченна область у E_3, обмежена нескінченною поверхнею з слабо змінною кривиною /див. рисунок/, f – неперервна функція з компактним носієм S.



Разом з тим слід відзначити, що умова /6/ чи /7/ досить жорстка, вона не охоплює всіх випадків розв"язності сформульованої задачі без початкових умов.

Список літератури: I. В л а д и м и р о в В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1976. 2. П о л о ж и й Г.Н. Уравнения математической физики. – М.: Высшая школа, 1964. 3. Т и х о н о в А.Н. Теоремы единственности для уравнения теплопроводности. – Математический сборник, 1935, 42, № 2.

Стаття надійшла в редколегію 28.10.80

УДК 518:517.948

М.Я.Бартіш, С.М.Шахно

ПРО ДЕЯКІ МОДИФІКАЦІЇ МЕТОДУ НЬЮТОНА І ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ГАЗОДИНАМІКИ

У праці [I] досліджено метод Ньютона для розв"язування систем нелінійних рівнянь

$$\mathcal{P}(x) = 0, \qquad /I/$$

де $\mathcal{P}$ – векторна функція векторного аргументу x за умови, що всі необхідні обчислення виконуються точно. Проте при реалізації на ЕОМ ми оперуємо числами з обмеженою кількістю розрядів. Тому замість матриці похідних $\mathcal{P}'(x_n)$ і вектора $\mathcal{P}(x_n)$ отримуємо дещо змінені $\mathcal{P}'(x_n) + V_n$ і $\mathcal{P}(x_n) + \tilde{V}_n$, де $\{V_n\}$ – послідов-