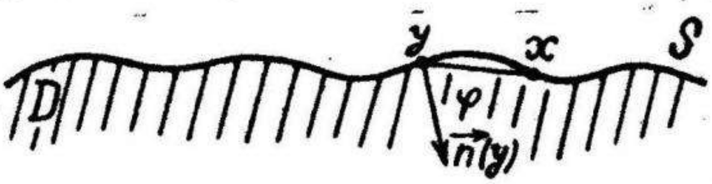
Якщо $\varphi = \frac{\pi}{2} \pm \chi$, де χ мало змінюється, то $|\cos\varphi| = |\sin\chi| < \varepsilon$ і умова /6/ також виконується при малому χ. Отже, задача /1/–/2/ має розв"язок у випадку, коли D – напівнескінченна область у E_3, обмежена нескінченною поверхнею з слабо змінною кривиною /див. рисунок/, f – неперервна функція з компактним носієм S.



Разом з тим слід відзначити, що умова /6/ чи /7/ досить жорстка, вона не охоплює всіх випадків розв"язності сформульованої задачі без початкових умов.

Список літератури: 1. В л а д и м и р о в В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1976. 2. П о л о ж и й Г.Н. Уравнения математической физики. – М.: Высшая школа, 1964. 3. Т и х о н о в А.Н. Теоремы единственности для уравнения теплопроводности. – Математический сборник, 1935, 42, № 2.

Стаття надійшла в редколегію 28.10.80

УДК 518:517.948

М.Я.Бартіш, С.М.Шахно

ПРО ДЕЯКІ МОДИФІКАЦІЇ МЕТОДУ НЬЮТОНА І ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ГАЗОДИНАМІКИ

У праці [1] досліджено метод Ньютона для розв"язування систем нелінійних рівнянь

$$\mathcal{P}(x) = 0, \qquad /1/$$

де $\mathcal{P}$ – векторна функція векторного аргументу x за умови, що всі необхідні обчислення виконуються точно. Проте при реалізації на ЕОМ ми оперуємо числами з обмеженою кількістю розрядів. Тому замість матриці похідних $\mathcal{P}'(x_n)$ і вектора $\mathcal{P}(x_n)$ отримуємо дещо змінені $\mathcal{P}'(x_n) + V_n$ і $\mathcal{P}(x_n) + \tilde{V}_n$, де $\{V_n\}$ – послідовність матриць розміром $n \times n$; $\widetilde{V}_n$ – послідовність векторів розмірності n таких, що $\| V_n \|$ і $\| \widetilde{V}_n \|$ – достатньо малі. Таким чином, фактично реалізовується процес

$$x_{n+1} = x_n - \left[\mathcal{P}'(x_n) + V_n \right]^{-1} \left[\mathcal{P}(x_n) + \widetilde{V}_n \right], \; n = 0, 1, 2, \ldots \qquad /2/$$

Достатні умови збіжності послідовності наближень $\{x_n\}$, отриманих за формулою /2/ до розв"язку x_* рівняння /I/, дає наступна теорема.

Т е о р е м а . Нехай виконуються умови: I/ існує оператор $\Gamma_0 = [\mathcal{P}'(x_0)]^{-1}$ такий, що $\| \Gamma_0 \| \leq B_0$;

2/ $\| \Gamma_0 \mathcal{P}(x_0) \| \leq \eta_0$;

3/ в області $\Omega_0 = \left\{ x : \| x - x_0 \| \leq \dfrac{\eta_0 (1 + \widetilde{\varkappa}_0)}{(1 - \varkappa_0)(1 - l_0 h_0)} \right\}$ $\| \mathcal{P}''(x) \| \leq M$;

4/ $\| V_n \| \leq C \eta_n$, $\| \widetilde{V}_n \| \leq \widetilde{C} \eta_n^2$;

5/ $\varkappa_0 = B_0 C \eta_0 < 1$, $\varkappa_0 + h_0 + \widetilde{\varkappa}_0 h_0 < 1$;

$h_0 = B_0 M \eta_0$, $\widetilde{\varkappa}_0 = B_0 \widetilde{C} \eta_0$;

6/ $S_0 = l_0 h_0 \dfrac{1 - \varkappa_0}{1 - (\varkappa_0 + h_0 + \widetilde{\varkappa}_0 h_0)} < 1$,

де

$$l_0 = \frac{h_0 (1 - \widetilde{\varkappa}_0)^2 + \varkappa_0 (1 + \widetilde{\varkappa}_0)(1 - \varkappa_0) + \widetilde{\varkappa}_0 (1 - \varkappa_0)^2}{[1 - (\varkappa_0 + h_0 + \widetilde{\varkappa}_0 h_0)](1 - \varkappa_0) h_0} .$$

Тоді рівняння /I/ має в області Ω_0 розв"язок x_* , до якого збігається послідовність $\{x_n\}$, отримана за формулою /2/, причому

$$\| x_n - x_* \| \leq S_0^{2^n - 1} \left[\frac{1 - (\varkappa_0 + h_0 + \widetilde{\varkappa}_0 h_0)}{1 - \varkappa_0} \right]^n \frac{1 + \widetilde{\varkappa}_0}{(1 - \varkappa_0)(1 - l_0 h_0)} \eta_0 . \qquad /3/$$

Доведення здійснюється за схемою Л.В.Канторовича.

З теореми випливає, що коли похибки невеликі, а саме: послідовності $\{V_n\}$ і $\{\widetilde{V}_n\}$ задовольняють умову 4/ теореми, то збіжність процесу не порушиться. Зауважимо, що зберігається навіть порядок збіжності. З умови 4/ видно, що компоненти матриці $\mathcal{P}'(x_n)$ можна обчислювати з точністю, на порядок меншою, ніж при обчисленні компонент вектора $\mathcal{P}(x_n)$.

Використаємо цю ідею при розв"язуванні різницевих рівнянь газової динаміки ітераційним методом Ньютона. Розглядаємо задачу про поршень, який всувається в газ з постійною швидкістю. Для наскрізного розрахунку в різницеву схему вводимо псевдов"язкість.

Як відомо [2], сіткові функції різко змінюються лише близько від фронту ударної хвилі, залишаючись майже постійними на інших точках масової сітки. Тому доцільно, очевидно, обчислювати на кожній ітерації коефіцієнти A_i, B_i, C_i триточкового рівняння, яке виникає при застосуванні методу Ньютона до різницевої схеми газової динаміки в ізотермічному випадку [2], лише в області різкої зміни сіткових функцій. Кількість точок, в яких необхідно обчислювати всі коефіцієнти, залежить від кроку по часу τ.

Ми обчислювали всі коефіцієнти поки не сформувався фронт ударної хвилі і на першій ітерації кожного шару по часу. Далі A_i, B_i, C_i знаходили лише у точках, близьких до фронту ударної хвилі, центр якої визначали за максимумом псевдов"язкості. Отримано експериментально, що для τ = 0,0I не потрібно зовсім, для τ = 0,05 достатньо однієї, для τ = 0,I – чотирьох, для τ = 0,2 – семи точок по обидві сторони від центру ударної хвилі, щоб кількість ітерацій порівняно з обчисленнями по всій сітці не збільшувалася. Щоб уникнути випадку розбіжності процесу Ньютона, використовували варіант методу з регулюванням кроку α_k.

Для розв"язування цієї задачі застосували також модифікацію методу Ньютона, в якій коефіцієнти A_i, B_i, C_i обчислювали лише через кілька ітерацій. Отримано, що кількість ітерацій на шарі також не зростає, якщо ці коефіцієнти знаходити через I–2 ітерації.

Отже, в обох розглянутих вище модифікаціях методу Ньютона для знаходження розв"язку задачі потрібна менша кількість обчислень, ніж у звичайному методі Ньютона.

Список літератури: I. К а н т о р о в и ч Л.В. О методе Ньютона. – Тр. мат. ин-та АН СССР, 1949, 28. 2. С а м а р с к и й А.А., П о п о в Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. – М.: Наука, I975.

Стаття надійшла в редколегію 26.09.80