УДК 517.946

І.М.Дудзяний, В.М.Цимбал

АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗВ"ЯЗОК ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДЕЯКОГО РІВНЯННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Багато задач прикладних дисциплін вимагає розв"язувати рівняння у частинних похідних з малим параметром при старших похідних або, як кажуть, сингулярно збуреним рівнянням [1, 4, 5, 7, 8]. Розроблені асимптотичні методи, одним з яких є метод примежового шару [2, 3].

Методом примежового шару в області $D=\{(x,t): 0\le x\le \ell, 0<t<T\}$ розв"язуємо таку задачу:

$$L_\varepsilon u = \varepsilon^3\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+c(x,t)u=f(x,t), \quad /1/$$

$$u(0,t)=0,\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,\ \ u(\ell,t)=0,\ u(x,0)=0, \quad /2/$$

де $\varepsilon>0$ – малий параметр.

Умови однозначної розв"язності задачі /1/, /2/ встановлені у праці [9], там же вказуються задачі такого типу з конкретним фізичним змістом.

Надалі вважатимемо, що виконуються умови:

1/ $a(x,t)>0$, $c(x,t)>0$ в області D ;

2/ функції $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$ достатньо гладкі в області D, для проведення подальших викладок;

3/ $\dfrac{\partial^{i+j} f(0,0)}{\partial t^i \partial x^j}=\dfrac{\partial^{i+j} f(\ell,0)}{\partial t^i \partial x^j}=0$, де N – точність побудованої нижче асимптотики.

Асимптотичний розклад розв"язку задачі /1/, /2/ будуємо у вигляді:

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i \bar{u}_i(x,t)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i \Pi_i(x,\tau)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i Q_i(\xi,t)+$$
$$+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i P_i(\eta,t)+\varepsilon^{N+1}R_N(x,t,\varepsilon), \quad /3/$$

де $\tau = t/\varepsilon$, $\xi = x/\varepsilon$, $\eta = \ell - x/\varepsilon$. Усі функції, що входять у /3/, визначені нижче.

Рівняння для знаходження регулярної частини асимптотики $\sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \bar{u}_i(x,t)$ одержуємо застосуванням стандартної процедури методу збурень

$$c(x,t)\bar{u}_i = f_i(x,t) \quad (i = 0, \ldots, N), \qquad /4/$$

де $f_0(x,t) \equiv f(x,t)$, $f_i(x,t) = -\left(\frac{\partial \bar{u}_{i-3}}{\partial t} - \frac{\partial^3 \bar{u}_{i-3}}{\partial x^3} - a(x,t)\frac{\partial^2 \bar{u}_{i-3}}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial \bar{u}_{i-3}}{\partial x}\right)$ $(i = 1, \ldots, N)$. Тут і надалі функція з від"ємним індексом вважається тотожно рівній нулю. Функції $\bar{u}_i(x,t)$ є розв"язками скінченних рівнянь /4/ і, взагалі кажучи, не задовольняють початковим і граничним умовам /2/. Цій меті служать $\Pi-$, $Q-$, і P функції розкладу /3/.

Опишемо, як дістаємо рівняння для визначення $\Pi_i(x,\tau)$. У операторі L_ε проведемо регуляризуюче перетворення $\tau = t/\varepsilon^3$ і розкладемо усі коефіцієнти у скінченні стрічки Тейлора в околі $t = 0$. Одержаний таким чином оператор позначимо через M_ε. Зрівнюючи в $M_\varepsilon\left(\sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \Pi_i(x,\tau)\right) = 0$ коефіцієнти при однакових степенях ε, маємо рівняння для визначення $\Pi_i(x,\tau)$ $(i = 0, \ldots, N)$

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial \tau} + c(x,0)\Pi_i = \varphi_i(x,\tau), \qquad /5/$$

де $\varphi_0(x,\tau) \equiv 0$, $\varphi_i(x,\tau)$ $(i = 1, \ldots, N)$ легко можна явно описати і лінійно виразити через $\Pi_j(x,\tau)$ $(j < i)$ та їхні похідні.

Рівняння для визначення $Q_i(\xi,t)$ $(i = 0, \ldots, N)$, що покликані ліквідувати нев"язку у виконанні граничних умов в околі границі $x = 0$, одержуємо процедурою, аналогічною наведеній вище для визначення $\Pi_i(x,\tau)$ (регуляризуюче перетворення $\xi = x/\varepsilon$). У результаті отримуємо

$$\frac{\partial^3 Q_i}{\partial \xi^3} - c(0,t)Q_i = \psi_i(\xi,t), \qquad /6/$$

де $\psi_0(\xi,t)\equiv 0$, $\psi_i(\xi,t)\ (i=1,\ldots,N)$ легко можна описати у явному вигляді і лінійно виразити через $Q_j(\xi,t)\ (j<1)$ та їхні похідні.

Аналогічно функції примежового шару в околі границі $x=\ell$ $P_i(\eta,t)\ (i=0,\ldots,N)$ визначають з рівнянь

$$\frac{\partial^3 P_i}{\partial \eta^3}+C(\ell,t)P_i=\chi_i(\eta,t), \qquad /7/$$

де $\chi_0(\eta,t)\equiv 0,\ \chi_i(\eta,t)\ \ (i=1,\ldots,N)$ легко можна виписати в явному вигляді і лінійно виразити через $P_j(\eta,t)\ \ (j<i)$ та їхні похідні.

Умови, при яких слід розв"язувати рівняння /5/, /6/, /7/, знаходимо за допомогою стандартної процедури з використанням /3/ і умов /2/, а також міркувань про те, що ці функції повинні бути функціями типу примежового шару [6].

У результаті одержимо

$$\Pi_i(x,0)=-\bar{u}_i(x,0)\quad (i=0,\ldots,N), \qquad /8/$$

$$Q_i(0,t)=-\bar{u}_i(0,t),\ \frac{\partial Q_i(0,t)}{\partial \xi}=-\frac{\partial \bar{u}_{i-1}(0,t)}{\partial x},\ Q_i(\xi,t)\underset{\xi\to\infty}{\longrightarrow}0\ (i=0,\ldots,N) \qquad /9/$$

$$P_i(0,t)=-\bar{u}_i(\ell,t),\ P_i(\eta,t)\underset{\eta\to\infty}{\longrightarrow}0\quad (i=0,\ldots,N). \qquad /10/$$

Отже, функції $\Pi_i(x,\tau),\ Q_i(\xi,t),\ P_i(\eta,t)$ – це розв"язки відповідно задач /5/, /8/; /6/; /9/; /7/, /10/, що є задачами для звичайних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами. Легко бачити, що усі функції, які входять в /3/, можна визначити рекурентно у такій послідовності: $\bar{u}_0(x,t)$, $\Pi_0(x,\tau)$, $Q_0(\xi,t)$, $P_0(\eta,t)$ і т.д. Більш того, функції $\Pi_i(x,\tau)$, $Q_i(\xi,t)$, $P_i(\eta,t)$ є функціями звичайного примежового шару в околі відповідно $t=0$, $x=0$, $x=\ell$ /доведення аналогічне [3]/.

Методом інтегралів енергії [9] одержана оцінка

$$\| R_N (x,t,\varepsilon) \|_{L_2(D)} < C,$$

де константа C не залежить від ε. Що і доводить асимптотичну коректність розкладу /3/.

Результат роботи сформулюємо у вигляді теореми.

Т е о р е м а . При виконанні умов I/-3/ розв"язок задачі /I/, /2/ допускає асимптотичний розклад /3/, де $\bar{u}_i(x,t)$ визначаються рекурентно зі скінченних рівнянь /4/; функції звичайних примежових шарів $\Pi_i(x,\tau)$, $Q_i(\xi,t)$, $R_i(\eta,t)$ рекурентно визначаються як розв"язки відповідно задач /5/, /8/; /6/, /9/; /7/, /I0/.

Список літератури: I. В а н - Д а й к М. Методы возмущений в механике жидкости. - М.: Мир, I967. 2. В а с и л ь е в а А.Б., Б у т у з о в В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. - М.: Наука, I973. 3. В и ш и к М.И., Л ю с т е р н и к Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. - Успехи матем. наук, I957, № 5. 4. З и н о И.Е., Т р о п п Э.А. Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Изд-во Ленинград. ун-та, I978. 5. К о у л Дж. Методы возмущений в прикладной математике. - М.: Мир, I972. 6. К у р а н т Р. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, I964. 7. Н а й ф е А. Методы возмущений. - М.: Мир, I976. 8. Т р е н о г и н В.А. Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника-Вишика. - Успехи мат. наук, I970, № 4. 9. Kattabriga L. Un problema al kontorno per una equazione parabolica di ordine dispari.— Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat., 1959, N 2.

Стаття надійшла в редколегію 02.I2.80