УДК 519.21

І.Д.Квіт

ЗВУЖЕНІ ДО КІНЦІВ ІНТЕРКВАНТИЛЬНІ СМУГИ ДОВІР"Я

Нехай

$$x_{(1)},\ x_{(2)}, \ldots, x_{(j)}, \ldots, x_{(n)} \qquad /1/$$

упорядкована за величиною вибірка з популяції, що має функцію розподілу $\mathcal{F}(x)$ та густину розподілу ймовірностей $f(x)=\mathcal{F}'(x)$. Тоді двоіндексна випадкова змінна

$$\nu_{jn} = \mathcal{F}(x_{(j)}), \quad (j=1,\ldots,n;\ n=2,3,\ldots), \qquad /2/$$

яку назвемо інформатором популяції, набуває значення між нулем та одиницею. Диференціал імовірності розподілу j -ї порядкової статистики $x_{(j)}$ за поліномним розподілом дорівнює

$$\frac{n!}{(j-1)!\,1!\,(n-j)!}\left[\mathcal{F}(x_{(j)})\right]^{j-1} f(x_{(j)})\,dx_{(j)}\left[1-\mathcal{F}(x_{(j)})\right]^{n-j}.$$

Звідси густина інформатора [2]

$$g(\nu_{jn}) = \frac{n!}{(j-1)!\,(n-j)!}\nu_{jn}^{j-1}(1-\nu_{jn})^{n-j}, \quad 0<\nu_{jn}<1, \quad (j=1,\ldots,n;\ n=2,3,\ldots).$$

Математичне сподівання та мода інформатора /2/ відповідно дорівнюють

$$E(\nu_{jn}) = \frac{j}{n+1}, \quad M_0(\nu_{jn}) = \frac{j-1}{n-1}, \quad (j=1,\ldots,n;\ n=2,3\ldots).$$

Квантилем порядку q інформатора /2/ з густиною /3/ називається число $L_q(\nu_{jn})$, що задовольняє співвідношення

$$\frac{n!}{(j-1)!\,(n-j)!}\int_0^{L_q(\nu_{jn})} x^{j-1}(1-x)^{n-j}dx = q, \quad 0<q<1, \quad (j=1,\ldots,n;\ n=2,3,\ldots). \qquad /4/$$

При q = 0,5 співвідношення /4/ визначає медіану інформатора,

$$Me(\nu_{jn}) = L_{0,5}(\nu_{jn}), \quad (j=1,\ldots,n;\ n=2,3,\ldots);$$

при q = 0 і q = 1 маємо відповідно $L_0(\nu_{jn})$ = 0 і $L_1(\nu_{jn})$ = 1.

Відомо [I], що

$$L_q(\nu_{jn}) = \frac{j}{j+(n+1-j)\,F_q(2(n+1-j),2j)}, \qquad /5/$$

де $F_q(\nu_1, \nu_2)$ – процентні точки розподілу Фішера з (ν_1, ν_2) ступенями вільності. Значення $F_q(\nu_1, \nu_2)$ табульовано [I] при q = 0,5; 0,25; 0,I; 0,05; 0,025; 0,0I; 0,005; 0,00I та різних (ν_1, ν_2). Для одержання значень $F_q(\nu_1, \nu_2)$ при q = 0,75; 0,9; 0,95; 0,975; 0,99; 0,995; 0,999 використовуємо рефлексивне рівняння $F_q(\nu_1, \nu_2) = \dfrac{1}{F_{1-q}(\nu_2, \nu_1)}$.

Лівий бік співвідношення /4/ виражає ймовірність нерівності $\mathcal{F}(x_{(j)}) \leq L_q(\nu_{jn})$. Тому рівність /4/ записується еквівалентно

$$\mathcal{P}\{\mathcal{F}(x_{(j)}) \leq L_q(\nu_{jn})\} = q,\ 0<q<1,\ (j=1,\dots,n;\ n=2,3,\dots).$$

Звідси дістаємо похідне співвідношення

$$\mathcal{P}\{L_{q_1}(\nu_{jn}) < \mathcal{F}(x_{(j)}) \leq L_{1-q_2}(\nu_{jn})\} = 1-q_1-q_2,$$

$$q_1>0,\ q_2>0,\ 0<q_1+q_2<1,\ (j=1,\dots,n;\ n=2,3,\dots). \qquad /6/$$

Співвідношення /6/ вказує $(1-q_1-q_2)$. 100%-ні межі допуску для інформатора /2/. Сусідні точки $(x_{(j)};\ L_{q_1}(\nu_{jn}))$, з"єднані відрізками, утворюють нижню межу двобічної інтерквантильної смуги довір"я; точки $(x_{(j)};\ L_{1-q_2}(\nu_{jn}))$ – верхню межу. Оскільки різниця $L_{1-q_2}(\nu_{jn}) - L_{q_1}(\nu_{jn})$ з ростом індекса j спершу зростає, а згодом спадає, то інтерквантильна смуга довір"я звужується до кінців. При $q_1 = q_2 = q,\ 0<q<\frac{1}{2},\ (1-2q)$. 100%-на смуга довір"я – симетрична. При q_1 = 0 маємо однобічну нижню смугу довір"я з верхньою межею через точки $(x_{(j)};\ L_{1-q_2}(\nu_{jn}))$. Зокрема, ламана через точки $(x_{(j)};\ L_{0,5}(\nu_{jn}))$ представляє графік медіанної емпіричної функції розподілу. При q_2 = 0 дістаємо однобічну верхню смугу довір"я з нижньою межею через точки $(x_{(j)};\ L_{q_1}(\nu_{jn}))$. При q_1 = 0,5 нижньою межею смуги довір"я є графік медіанної емпіричної функції розподілу.

У симетричному випадку співвідношення /6/ набуває вигляду

$$\mathcal{P}\left\{L_q(\nu_{jn}) < \mathcal{F}(x_{(j)}) < L_{1-q}(\nu_{jn})\right\} = 1-2q,\ 0<q<\tfrac{1}{2}, \qquad /7/$$
$$(j=1,\ldots,n;\ n=2,3,\ldots).$$

Симетрична інтерквантильна смуга довір"я, визначена точками $(x_{(j)};\ L_q(\nu_{jn}))$ та $(x_{(j)};\ L_{1-q}(\nu_{jn}))$, при q = 0,25; 0,1; 0,01; ... відповідно називається інтерквартильною, інтердецильною, інтерцентильною тощо.

Для ілюстрації використання формули /7/ розглянемо числовий приклад. Нехай 54, 79, 97, 114, 130, 146, 164, 186, 220 упорядкована вибірка з абсолютно неперервної популяції. Знайти вузлові точки для меж інтердецильної смуги довір"я, а також вузлові точки для медіанної емпіричної функції розподілу.

За формулою /5/ і відповідною таблицею [1] знаходимо значення $L_{0,1}(\nu_{j9})$, $L_{0,9}(\nu_{j9})$ та $L_{0,5}(\nu_{j9})$. Одержані результати запишемо в таблицю.

j	$x_{(j)}$	$L_{0,5}(\nu_{j9})$	$L_{0,1}(\nu_{j9})$	$L_{0,9}(\nu_{j9})$	$L_{0,9}(\nu_{j9})-L_{0,1}(\nu_{j9})$
1	54	0,074	0,012	0,225	0,213
2	79	0,180	0,061	0,368	0,307
3	97	0,286	0,130	0,490	0,360
4	114	0,393	0,211	0,599	0,388
5	130	0,500	0,300	0,700	0,400
6	146	0,607	0,401	0,789	0,388
7	164	0,714	0,510	0,870	0,360
8	186	0,820	0,632	0,939	0,307
9	220	0,926	0,775	0,988	0,213

Сусідні точки $(x_{(j)};\ L_{0,5}(\nu_{j9}))$, з"єднані відрізками, утворюють графік медіанної емпіричної функції розподілу; точки $(x_{(j)};\ L_{0,1}(\nu_{j9}))$ – нижню, а точки $(x_{(j)};\ L_{0,9}(\nu_{j9}))$ – верхню межу інтердецильної смуги довір"я. Різниця $L_{0,9}(\nu_{j9})-L_{0,1}(\nu_{j9})$ спершу зростає, а згодом спадає; інтердецильна смуга довір"я звужена до кінців.

Відзначимо, що коли ЕОМ може видавати процентні точки розподілу Фішера при заданих ступенях вільності, то зможе видати графіки медіанної емпіричної функції розподілу та меж інтерквантильної смуги довір"я.

Список літератури: I. Справочник по специальным функциям. - М.: Наука, 1979. 2. Smirnoff N. Über die Verteilung des allgemeinen Gliedes in der Variationsreihe. „Metron" 12(1935), 59-81.

Стаття надійшла в редколегію 25.II.80

УДК 536.24

Д.В.Грилицький

ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ У ПІВПЛОЩИНІ ПРИ МІШАНИХ ГРАНИЧНИХ УМОВАХ

Розглянемо нижню півплощину при допущенні, що її бічні грані теплоізольовані.

У цьому випадку для визначення температурного поля в області по заданих умовах на границі можна застосувати методи теорії функцій комплексного змінного.

Введемо позначення: всю границю півплощини позначимо через L відрізок ab границі - через L', частину границі поза L' - через L''. Так що $L = L' + L''$ /див. рисунок/.