Відзначимо, що коли ЕОМ може видавати процентні точки розподілу Фішера при заданих ступенях вільності, то зможе видати графіки медіанної емпіричної функції розподілу та меж інтерквантильної смуги довір"я.

Список літератури: І. Справочник по специальным функциям. - М.: Наука, 1979. 2. Smirnoff N. Über die Verteilung des allgemeinen Gliedes in der Variationsreihe. „Metron" 12(1935), 59-81.

Стаття надійшла в редколегію 25.II.80

УДК 536.24

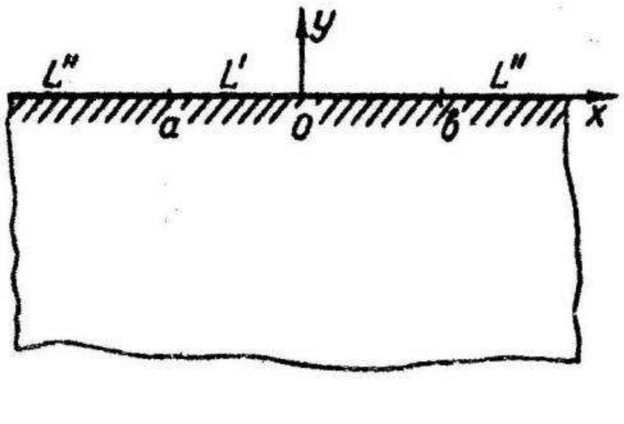
Д.В.Грилицький

ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ
У ПІВПЛОЩИНІ ПРИ МІШАНИХ ГРАНИЧНИХ УМОВАХ

Розглянемо нижню півплощину при допущенні, що її бічні грані теплоізольовані.

У цьому випадку для визначення температурного поля в області по заданих умовах на границі можна застосувати методи теорії функцій комплексного змінного.

Введемо позначення: всю границю півплощини позначимо через L відрізок ab границі - через L', частину границі поза L' - через L''. Так що $L=L'+L''$ /див. рисунок/.



Відомо, що температура визначається за формулою

$$T(x,y)=\frac{1}{2}\left[\mathcal{F}(z)+\overline{\mathcal{F}(z)}\right], \qquad /1/$$

де $\mathcal{F}(z)$ - аналітична функція змінного $z=x+iy$.

Задача знаходження температурного поля у півплощині $T(x,y)$ або, що те ж саме, функції розподілу температури $\mathcal{F}(z)$ легко розв"язуються у випадках, коли на границі L відома температура $T(t)$ або нормальна похідна від температури $\frac{\partial T}{\partial y}=\psi(t)$.

У першому випадку для визначення функції $\mathcal{F}(z)$ застосовують формулу

$$\mathcal{F}(z)=-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{T(t)dt}{t-z}. \qquad /2/$$

В другому - знаходимо функцію $\mathcal{F}'(z)$

$$\mathcal{F}'(z)=\frac{1}{\pi}\int_L\frac{\psi(t)dt}{t-z} \qquad /3/$$

при виконанні умови

$$\int_L\psi(t)dt=0. \qquad /4/$$

Вважаємо, що функції $T(t)$ і $\psi(t)$ такі, що інтеграли /2/ і /3/ існують.

Наведемо розв"язки задач теплопровідності для таких п"яти випадків граничних умов:

$$\frac{\partial T}{\partial y}+h(T-T_0)=0 \quad \text{на } L', \qquad T=\varphi(t) \quad \text{на } L''; \qquad /5/$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}+h(T-T_0)=0 \quad \text{на } L', \qquad \frac{\partial T}{\partial y}=\psi(t) \quad \text{на } L''; \qquad /6/$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}+h(T-T_0)=0 \quad \text{на } L', \qquad \frac{\partial T}{\partial y}=-kT \quad \text{на } L''; \qquad /7/$$

$$T=\varphi(x) \qquad \text{на } L',$$
$$\frac{\partial T}{\partial y}=\psi(x) \qquad \text{на } L''; \qquad /8/$$

$$T=\varphi(x) \qquad \text{на } L',$$
$$\frac{\partial T}{\partial y}=-\kappa T \qquad \text{на } L''. \qquad /9/$$

В умовах /5/–/9/ h і κ – сталі коефіцієнти; T_0 – відома температура; $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ – відомі функції.

Крім того вважаємо, що для всіх п"яти випадків виконується умова

$$\int_L \frac{\partial T}{\partial y}dt=0, \qquad /10/$$

і температура у всіх точках границі півплощини має бути неперервною функцією.

Враховуючи малий обсяг статті, опустимо аналітичні викладки і наведемо остаточні результати.

На основі формул /1/–/3/ та тих співвідношень, які можна з них одержати, знайдено, що:

А. При граничних умовах /5/ температура $T(t)$ на L' визначається із сингулярного інтегрального рівняння

$$\pi h T(x)-\int_{L'}\frac{T'(t)dt}{t-x}=f(x), \quad x\in L', \qquad /11/$$

де

$$f(x)=\pi h T_0(x)+\int_{L''}\frac{\varphi'(t)dt}{t-x}. \qquad /12/$$

Знайшовши температуру на L', маємо температуру на всій границі L. Функцію $\mathcal{F}(z)$ обчислюємо за формулою /2/.

Б. Для визначення температури $T(t)$ на L' при граничних умовах /6/ доходимо до такого рівняння

$$h\int_{L'}\frac{T(t)dt}{t-x}+\pi T'(x)=f(x), \quad x\in L', \qquad /13/$$

де

$$f(x)=h\int\limits_{L'}\frac{T_0(t)dt}{t-x}+\int\limits_{L''}\frac{\psi(t)dt}{t-x}. \qquad /14/$$

Розв"язавши рівняння /13/, дістанемо температуру на L', звідки стане відома похідна від температури по нормалі на всій границі півплощини L. Функція $\mathcal{F}'(z)$ визначиться за формулою /3/.

В. Для знаходження температури на L' при граничних умовах /7/ дістаємо рівняння

$$\frac{h-\kappa}{\pi}\int\limits_{L'}\frac{Tdt}{t-x}+\frac{h\kappa}{2}\int\limits_{L'}T(t)\,sign\,(x-t)dt+ \qquad /15/$$

$$+T'(x)=f(x), \quad x\in L',$$

де

$$f(x)=\frac{h}{\pi}\int\limits_{L'}\frac{T_0\,dt}{t-x}+\frac{\kappa h}{2}\int\limits_{L'}T_0\,sign\,(x-t)dt+a_0; \qquad /16/$$

a_0 - константа.

Якщо температура на L' знайдена, то функцію $\mathcal{F}(z)$ дістають із диференціального рівняння

$$\mathcal{F}'(z)-i\kappa\,\mathcal{F}(z)=\Phi(z), \qquad /17/$$

де

$$\Phi(z)=\frac{\kappa-h}{\pi}\int\limits_{L'}\frac{Tdt}{t-z}+\frac{h}{\pi}\int\limits_{L'}\frac{T_0\,dt}{t-z} \qquad /18/$$

Г. Для випадку граничних умов /8/ визначається функція

$$\mathcal{F}'(z)=-\frac{i}{\pi^2 x(z)}\int\limits_{L'}\frac{x^+(t)\omega(t)dt}{t-z}+$$

$$+\frac{1}{\pi x(z)}\int\limits_{L''}\psi(t)dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_{L''}\frac{\psi(t)dt}{t-z}. \qquad /19/$$

У формулі /І9/ введені позначення

$$x(z)=\sqrt{(z-a)(z-b)}\ ;$$

$$\omega(x)=\pi\varphi'(x)-\int_{L''}\frac{\psi(t)dt}{t-x},\ x\in L'. \qquad /20/$$

Д. Задачу теплопровідності при граничних умовах /9/ можна звести до сингулярного інтегрального рівняння

$$\frac{1}{\pi}\int_{L'}\frac{S'(t)dt}{t-x}+\kappa S(x)=f(x),\ x\in L', \qquad /2І/$$

де

$$f(x)=\frac{\kappa}{\pi}\int_{L'}\frac{\varphi(t)dt}{t-x}-\varphi'(x); \qquad /22/$$

$S(x)$ - значення уявної частини функції $\mathcal{F}(z)$ на L .

Якщо функція $S'(x)$ на L' знайдена, то для визначення $\mathcal{F}(z)$ служить диференціальне рівняння /І7/ з правою частиною

$$\Phi(z)=\frac{\kappa}{\pi}\int_{L'}\frac{\varphi(t)dt}{t-z}-\frac{1}{\pi}\int_{L'}\frac{S'(t)dt}{t-z}\ . \qquad /23/$$

Для наближеного розв"язання одержаних сингулярних інтегродиференціальних рівнянь ефективним є метод ортогональних поліномів. Покажемо це на прикладі рівняння /2І/, попередньо звівши його до проміжка $(-1,1)$.

Отже, побудуємо розв"язок такого рівняння

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{S'(t)dt}{t-x}+\kappa S(x)=f(x),\ x\in(1,-1). \qquad /24/$$

Шукаємо розв"язок у виді

$$S'(t)=(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}A_n T_n(t). \qquad /25/$$

Звідки

$$S(t)=-\sqrt{1-t^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}A_n U_{n-1}(t)+A_0\arcsin t+A, \qquad /26/$$

де $T_n(t)$ і $U_n(t)$ – поліноми Чебишева відповідно першого та другого роду; A – константа.

Підставляючи /25/ і /26/ в /24/ та користуючись співвідношеннями ортогональності для поліномів Чебишева першого та другого роду, одержуємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n U_{n-1}(x) - \kappa\sqrt{1-x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}A_n U_{n-1}(x) +$$

$$+ \kappa A_0 \arcsin x + \kappa A = f(x), \quad x \in (1,-1). \qquad /27/$$

Помножимо /27/ на $\sqrt{1-x^2}\, U_m(x)$ $(m = 0,1\ldots)$ і проінтегруємо по x в межах від –I до I. В результаті одержимо безмежну систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення шуканих коефіцієнтів A_n $(n = \overline{0,\infty})$

$$\frac{\pi}{2}A_{m+1} - \kappa\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}N_{n,m}A_n = H_m - \kappa B_m, \quad m = 0,1\ldots, \qquad /28/$$

де

$$N_{n,m} = \int_{-1}^{1}(1-x^2)U_{n-1}(x)\,U_m(x)\,dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & m+n \text{ – парне} \\ \dfrac{1}{(m+n)(m+n+2)} - \dfrac{1}{(m-n)(m-n+2)}, & m+n \text{ – непарне,} \end{cases}$$

$$H_m = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,U_m(x)f(x)\,dx,$$

$$B_m = \int_{-1}^{1}(A_0\arcsin x + A)\sqrt{1-x^2}\,U_m(x)\,dx.$$

При практичних розрахунках обмежуються, звичайно, скінченною системою лінійних алгебраїчних рівнянь.

Стаття надійшла в редколегію 05.01.81