УДК 539.3

О.М.Горечко

ВЗАЄМОДІЯ СЛАБИХ УДАРНИХ ХВИЛЬ З ТОВСТОСТІННИМ ПРУЖНИМ ЦИЛІНДРОМ, ЯКИЙ ЗНАХОДИТЬСЯ В АКУСТИЧНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Відомі методи розв"язування нестаціонарних задач взаємодії слабих ударних хвиль з деформівними перешкодами [3, 4] ефективно застосовуються, якщо пружний об"єкт описується лінійними рівняннями теорії тонких пружних оболонок [2]. Методом поліномів Лагерра [I] розв"яжемо нестаціонарну задачу взаємодії слабих ударних хвиль з товстостінним пружним циліндром.

I. Розглянемо пружний циліндр безмежної довжини, заповнений ідеальною стисливою рідиною густини ρ_1 , зі швидкістю поширення звуку C_1 , який знаходиться в просторі ідеальної стисливої рідини з характеристиками ρ_2 і C_2 . Нехай із зовнішнього середовища на початково нерухомий циліндр падає плоска або циліндрична хвиля тиску $P_2 = \rho_2 c_2^2 Q_2(\vec{R},t)$, а в заповнювачі знаходиться джерело циліндричних хвиль $P_1 = \rho_1 c_1^2 Q_1(\vec{R},t)$, причому фронти хвиль P_i $(i=1,2)$ паралельні до твірної циліндра. Поведінка товстостінної циліндричної оболонки описується рівняннями Ламе, а рух зовнішнього середовища і заповнювача – хвильовим рівнянням на тиск.

Віднесемо циліндр до циліндричної системи координат (R, φ, z), вісь z якої збігається з віссю циліндра. У такій постановці задача плоска, тобто всі шукані величини не залежать від змінної z . Рівняння Ламе розділимо за допомогою функцій

$$\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}; \quad \chi = \frac{1}{2r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rv) - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right], \qquad (I.I)$$

де $r = R/R_2$ – безрозмірна радіальна координата; $\vec{u}(u, v, 0)$ – вектор зміщень, віднесений до зовнішнього радіуса циліндра R_2 . З допомогою функцій (I.I) у розглядуваному плоскому випадку розв"язування рівнянь Ламе еквівалентне розв"язуванню хвильових рівнянь

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2}=\frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2};$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\chi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial\varphi^2}=\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial\tau^2}, \qquad (\text{I}.2)$$

записаних у безрозмірних величинах $\tau=c_L t/R_2$, $b=c_T/c_L$, c_T і c_L – швидкості поширення поперечних і поздовжніх хвиль у циліндрі.

Тиск у заповнювачі $(i=1)$ та зовнішньому середовищі $(i=2)$ запишемо у вигляді суми падаючого P_i та збуреного $p_i=\rho_i c_i^2 q_i$ тисків. Збурені безрозмірні тиски q_i задовольняють хвильові рівняння

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial q_i}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 q_i}{\partial\varphi^2}=\frac{1}{a_i^2}\frac{\partial^2 q_i}{\partial\tau^2} \quad (i=1,2), \qquad (\text{I}.3)$$

де $a_i=c_i/c_L$, c_i – швидкості поширення звуку в заповнювачі та зовнішньому середовищі.

Рівняння (I.2), (I.3) необхідно розв"язати при нульових початкових і граничних умовах безвідривного контакту пружного й акустичного середовища, які в термінах функцій θ і χ запишемо у вигляді

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2}-2b^2\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r}+2b^2\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}\left(\frac{1}{r}\chi\right)\right]+$$
$$+\mu_i a_i^2\frac{\partial^2 q_i}{\partial\tau^2}=-\mu_i a_i^2\frac{\partial^2 Q_i}{\partial\tau^2},$$

$$2\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial\theta}{\partial r}-\frac{1}{r}\theta\right)+2b^2\left(\frac{r}{b^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial\tau^2}-\frac{2}{r}\frac{\partial^2\chi}{\partial\varphi^2}-2\frac{\partial\chi}{\partial r}\right)=0,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial r}-\frac{2b^2}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}+a_i^2\frac{\partial q_i}{\partial r}=-a_i^2\frac{\partial Q_i}{\partial r}, \qquad (\text{I}.4)$$

при $r=R_1/R_2$, $i=1$ та $r=1$, $i=2$. У співвідношеннях (I.4) $\mu_i=\rho_i/\rho_0$, ρ_i $(i=1,2)$ – густини заповнювача і зовнішнього середовища; ρ_0 – густина циліндра; R_1 – внутрішній радіус циліндра. Всі шукані функції повинні бути обмеженими в областях, де вони визначені.

2. Згідно з методом поліномів Лагерра [I] у розглядуваному плоскому випадку запишемо шукані функції у вигляді рядів

$$\theta(r,\varphi,\tau)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\theta_{mn}(r)L_n(\tau)\cos m\varphi,$$

$$\chi(r,\varphi,\tau)=2b^2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\chi_{mn}(r)L_n(\tau)\sin m\varphi,$$

$$q_i(r,\varphi,\tau)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}q_{imn}(r)L_n(\tau)\cos m\varphi\quad(i=1,2). \qquad (2.I)$$

Тоді, зважаючи на нульові початкові умови задачі, коефіцієнти рядів (2.I) знаходять як розв"язки послідовностей рівнянь Бесселя

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\theta_{mn}}{dr}\right)-\left(1+\frac{m^2}{r^2}\right)\theta_{mn}=\sum_{j=0}^{n-1}(n+1-j)\theta_{mj},$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\chi_{mn}}{dr}\right)-\left(\frac{1}{b^2}+\frac{m^2}{r^2}\right)\chi_{mn}=\frac{1}{b^2}\sum_{j=0}^{n-1}(n+1-j)\chi_{mj},$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dq_{imn}}{dr}\right)-\left(\frac{1}{a_i^2}+\frac{m^2}{r^2}\right)q_{imn}=\frac{1}{a_i^2}\sum_{j=0}^{n-1}(n+1-j)q_{imj}, \qquad (2.2)$$

обмежені у відповідних областях при таких граничних умовах на поверхнях $r=R_1/R_2$ $(i=1)$ і $r=1$ $(i=2)$:

$$\theta_{mn}-2b^2\left[\frac{1}{r}\frac{d\theta_{mn}}{dr}-\frac{m^2}{r^2}\theta_{mn}+m\frac{d}{dr}\left(\frac{\chi_{mn}}{r}\right)\right]+\mu_i a_i^2 q_{imn}=$$

$$=-\mu_i a_i^2 Q_{imn}-\sum_{j=0}^{n-1}(n+1-j)\left[\theta_{mj}+\mu_i a_i^2(q_{imj}+Q_{imj})\right],$$

$$\left(\frac{1}{b^2}+2\frac{m^2}{r^2}\right)\chi_{mn}-\frac{d\chi_{mn}}{dr}-2\frac{d}{dr}\left(\frac{\theta_{mn}}{r}\right)=-\frac{1}{b^2}\sum_{j=0}^{n-1}(n+1-j)\chi_{mj}, \qquad (2.3)$$

$$\frac{d\theta_{mn}}{dr}-\frac{m}{r}\chi_{mn}+a_i^2\frac{dq_{imn}}{dr}=-a_i^2\frac{dQ_{imn}}{dr}.$$

Розв"язок задачі (2.2), (2.3) записуємо у вигляді

$$\theta_{mn}(r)=\sum_{i=0}^{n} X^{1}_{n-i}\, GI_{mi}(r)+X^{2}_{n-i}\, GK_{mi}(r),$$

$$X_{mn}(r)=\sum_{i=0}^{n} X^{3}_{n-i}\, GI_{mi}\left(\frac{r}{b}\right)+X^{4}_{n-i}\, GK_{mi}\left(\frac{r}{b}\right),$$

$$q_{1mn}(r)=\sum_{i=0}^{n} X^{5}_{n-i}\, GI_{mi}\left(\frac{r}{a_1}\right);\; q_{2mn}(r)=\sum_{i=0}^{n} X^{6}_{n-i}\, GK_{mi}\left(\frac{r}{a_2}\right). \quad (2.4)$$

де $GI_{mn}(x)$ і $GK_{mn}(x)$ – фундаментальні розв"язки систем виду (2.2), означені в [I]. Вектор $\overline{X_n}$ з компонентами X^{j}_{n} $(j=\overline{1,6})$ знаходимо як розв"язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$A_{m0}\overline{X}_n=\overline{f}_{mn}-\sum_{j=1}^{n} A_{mi}\overline{X}_{n-i}\,, \quad (2.5)$$

де $\overline{f}_{mn}$ – вектор з компонентами f^{j}_{mn} $(j=\overline{1,6})$, які дорівнюють правим частинам умов (2.3), а коефіцієнти a^{ij}_{mn} $(i,j=\overline{1,6})$ матриць A_{mn} виражаються через функції $GI_{mn}(x)$ і $GK_{mn}(x)$ з допомогою підстановки розв"язків (2.4) в умови (2.3). Відзначимо, що основна матриця системи (2.5) є трикутною блочно-теплицевою матрицею з блоками A_{mn}. Тому розв"язування системи (2.5) можна звести до послідовного розв"язування систем шостого порядку. Саме в такому вигляді і записана система (2.5).

За знайденими функціями θ і X з допомогою співвідношень (I.I) знаходимо компоненти u і v вектора пружного переміщення в циліндрі, а отже, і всі інші характеристики напружено-деформованого стану циліндра.

3. На рис. I показані графіки зміщень у трьох характерних точках зовнішньої поверхні суцільного пружного циліндра під дією плоскої хвилі тиску типу сходинки $(Q_2(r,\varphi,\tau)=H(\tau+ra_2^{-1}\cos\varphi-a_2^{-1}))$ при таких значеннях безрозмірних параметрів: $b=0{,}541$; $a_2=0{,}246$; $\mu_2=0{,}13$. Суцільними кривими на рисунках зображені графіки нормальних зміщень, штриховими – тангенціальних в точці $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

При розрахунках у розкладах по Фур"є та Лагерру враховували по 16 членів.

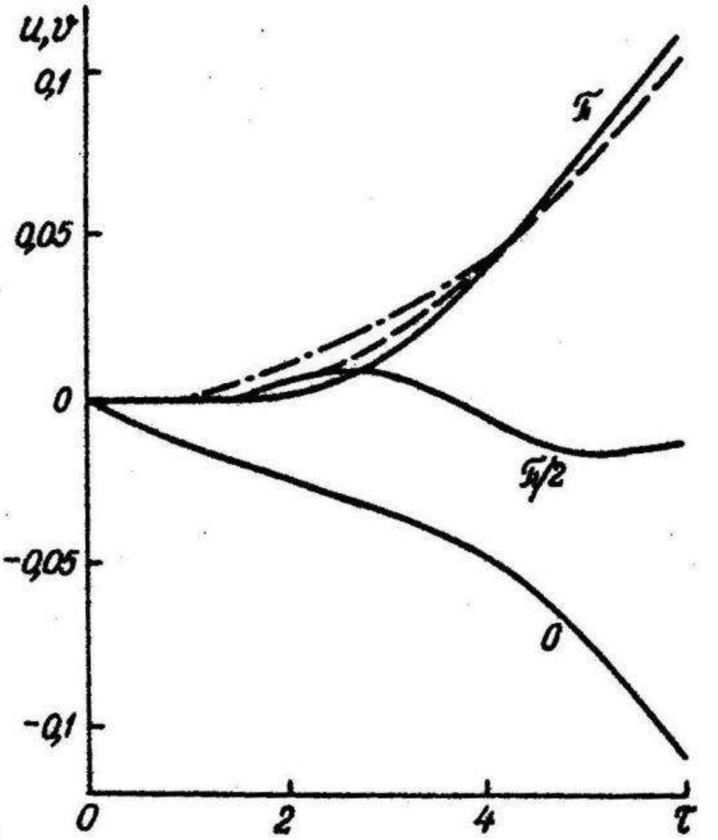

Рис. I.

Як видно з рис. I, початок зростання зміщень збігається з моментами приходу у відповідні точки пружної поздовжної хвилі по циліндру. Монотонна зміна нормального зміщення u при $\varphi = 0, \pi$ і тангенціального зміщення v при $\varphi = \pi/2$ вказує на наявність зміщення циліндра як жорсткого цілого. Зміщення центра циліндра показано на рис. I штрих-пунктирною лінією. Цікаво відзначити, що для суцільного пружного циліндра зміщення його як жорсткого цілого вже не описується першим членом розкладу нормального зміщення в ряд Фур"є, як це робиться у задачах гідропружності для циліндричних оболонок [4] . На рис.2 зображені графіки прогинів зовнішньої поверхні суцільного циліндра, тобто графіки величини $u - u_0 \cos\varphi$, де u_0 – зміщення центра циліндра, залежно від безрозмірного часу τ .

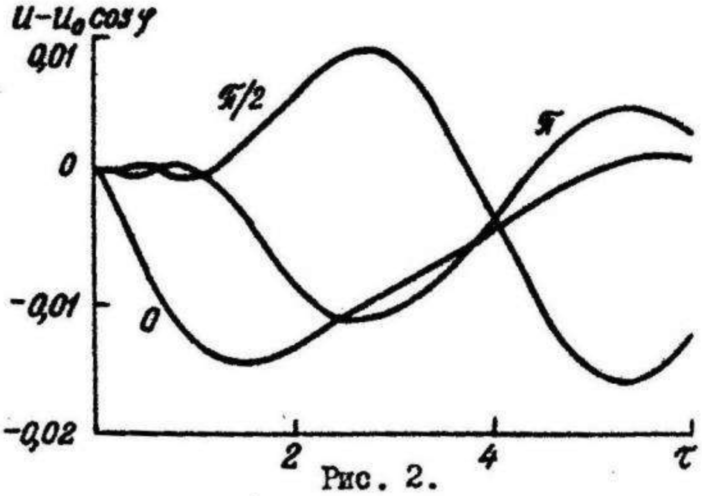

Рис. 2.

Аналіз деформації зовнішньої поверхні циліндра показує, що найбільших значень досягають прогини в точці зустрічі хвилі з циліндром. Суцільний пружний циліндр в перехідному процесі лишається стиснутим вздовж напрямку падіння хвилі тільки до моменту часу, поки акустична хвиля не досягне точки $\varphi = \pi/2$ на поверхні циліндра, після чого циліндр витягується в цьому напрямку.

Список літератури: І. Г а л а з ю к В.А., Г о р е ч к о А.М. Про один метод розв"язування динамічних задач теорії пружності в сферичних та циліндричних координатах. - ДАН УРСР. Сер. А, 1980, № 6. 2. Г о р ш к о в А.Г. Взаимодействие ударных волн с деформируемыми преградами. - Итоги науки и техники. Сер. Мех. деформ. тверд. тела, 1979, № 13. 3. Г р и г о л ю к Э.И., Г о р ш к о в А.Г. Нестационарная гидроупругость оболочек. - Л.: Судостроение, 1974. 4. К у б е н к о В.Д. Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой. - Киев: Наукова думка, 1979.

Стаття надійшла в редколегію 13.01.81