УДК 539.3

І.А.Прокопішин, Д.Г.Хлебніков

ЦИЛІНДРИЧНИЙ ЗГИН ПЛАСТИНИ НАГРІТИМ ШТАМПОМ

Огляд плоских контактних задач термопружності наведено у працях [1, 3]. На основі наближених рівнянь, отриманих операторним методом [2,4,5], ми даємо розв"язок плоскої термоконтактної задачі згину пластини з врахуванням обтиску.

Нехай у вільно оперту по краях $x=\pm c$ ізотропну пластину товщиною $2h$ вдавлюється силою P центрально прикладений нагрітий гладкий штамп, основа якого описується рівнянням $y=f(x)$. Контакт штампа з пластиною відбувається в зоні $|x|\leq b$ $(b<c)$, де температура поверхні пластини $y=h$ вважається заданою неперервною і симетричною функцією $\theta(x)$, $\theta(\pm b)=0$, на іншій частині контуру пластини температура дорівнює нулю.

Ця термоконтактна задача зводиться до послідовного розв"язання задачі термопружності для пластини і контактної задачі згину пластини жорстким штампом з "основою" $y=f(x)-W_T(x,h)$, де $W_T(x,h)$ - вертикальне переміщення поверхні пластини $y=h$ викликане температурою.

Стаціонарне температурне поле $t(x,y)$ пластини знаходиться шляхом розв"язання крайової задачі для рівняння Лапласа в прямокутнику $\{(x,y)\,|\,|x|\leq c, |y|\leq h\}$ при умовах

$$t(x,h)=\theta(x),\ |x|\leq b;\quad t(x,h)=0,\ b<|x|\leq c; \qquad /1/$$

$$t(x,-h)=0,\ |x|\leq c;\ t(\pm c,y)=0,\ |y|\leq h.$$

Розв"язок цієї задачі легко одержати методом Фур"є. Він має вигляд

$$t(x,y)=\sum_{k=1,3,5}^{\infty}\left(\frac{sh\lambda_k y}{sh\lambda_k h}+\frac{ch\lambda_k y}{ch\lambda_k h}\right)\alpha_k\cos\lambda_k x, \qquad /2/$$

де

$$\alpha_k=\frac{1}{c}\int_0^b\theta(t)\cos\lambda_k t\,dt,\quad \lambda_k=\frac{k\pi}{2c}.$$

Вертикальне переміщення $W_T\ (x,h)$, зумовлене температурним полем, знаходимо, використовуючи метод А.І.Лур"є [2]

$$W_T(x,h)=\alpha(1+\nu)\sum_{k=1,3,5...}^{\infty}\frac{\alpha_k}{\lambda_k}(th\lambda_k h+cth\lambda_k h)\cos\lambda_k x, \qquad /3/$$

де α – коефіцієнт температурного розширення; ν – коефіцієнт Пуассона.

З умови контакту при $|x|\leqslant b$

$$W(x,h)=f(x)-W_T(x,h)-h\delta \qquad /4/$$

/ δ – безрозмірна осадка штампа/ отримуємо наближене рівняння для визначення контактного тиску [4]

$$\frac{d^4q}{d\xi^4}-\frac{\sqrt{21}}{4}\frac{d^2q}{d\xi^2}+q=f_0(\xi), \qquad /5/$$

де $f_0(\xi)=\frac{D}{a_0^4h^4}\frac{d^4}{d\xi^4}\left[f(a_0h\xi)-W_T(a_0h\xi,h)\right]$,

$$D=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)},\quad \xi=\frac{x}{a_0h},\quad a_0=\frac{4}{\sqrt{5}\,\sqrt[4]{21}}.$$

Розв"язок рівняння /5/ в області контакту $|\xi|<\beta$ має вигляд

$$q(\xi)=\frac{D}{h^3}\left[A_1 ch\lambda\xi\cos\mu\xi+A_2 sh\lambda\xi\sin\mu\xi+q^*(\xi)\right], \qquad /6/$$

де

$$\lambda=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{21}}{8}\right)},\qquad \mu=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{21}}{8}\right)},$$

$$q^*(\xi)=\frac{8}{\sqrt{43}}\frac{h^3}{D}\int_0^{\xi}\left[\lambda ch\lambda(\xi-t)\sin\mu(\xi-t)-\mu sh\lambda(\xi-t)\cos\mu(\xi-t)\right]f_0(t)dt.$$

Після визначення $q(\xi)$ функції напружень у задачі стиску і згину смуги $\chi(\xi)$, $\psi(\xi)$ знаходиться з наближених рівнянь [4]

$$\frac{d^2\chi}{d\xi^2}=q_1(\xi),\quad \frac{d^4\psi}{d\xi^4}=q(\xi), \qquad /7/$$

де
$$g_1(\xi)=\frac{a_0^4 h}{2(1-\nu)}\left(1-\frac{1}{3a_0^2}\frac{d^2}{d\xi^2}\right)\bar{q}(\xi);$$
$$g(\xi)=\frac{a_0^4 h}{2(1-\nu)}\left(1+\frac{1}{5a_0}\frac{d^2}{d\xi^2}+\frac{11}{525a_0^4}\frac{d^4}{d\xi^4}\right)\bar{q}(\xi);$$
$\bar{q}=\frac{h^3}{D}q$ – безрозмірний тиск.

Розв"язки рівнянь /7/ з врахуванням симетрії по ξ записуємо
$$\chi(\xi)=B_0 h+\int_0^\beta(\xi-t)g_1(t)\,dt,$$
$$\psi(\xi)=\frac{C_0 h}{2(1-\ )}+\frac{Ch}{2(1-\ )}\xi^2+\int_0^\xi\frac{(\xi-t)^3}{6}g(t)\,dt. \qquad /8/$$

Для визначення невідомих сталих, крім граничних умов на краю пластини й умови рівноваги штампа
$$\int_{20}^{\beta}\bar{q}(\xi)\,d\xi=-\frac{\varkappa}{2a_0} \qquad /9/$$
/ $\varkappa=\frac{ph^{2}}{D}$ – безрозмірне зусилля/, використовуємо рівності, які забезпечують повне виконання умови безвідривного контакту /4/
$$C_0-\frac{2}{a_0^2}C+\frac{2}{3}A_1+\delta=\frac{1}{h}f_0(0),$$
$$C+\left[\frac{7}{30}(\lambda^2-\mu^2)-\frac{a_0^2}{2}\right]A_1+\frac{7}{15}\lambda\mu A_2=\frac{1}{2h}\frac{d^2 f_0}{d\xi^2}(0). \qquad /10/$$

Умови вільного опирання пластини при $X=C$ $(M(C)=0, W(C,h)=0)$ мають вигляд
$$\frac{2}{a_0^4}C-\int_0^\beta t\,\bar{q}(t)\,dt-\frac{\gamma}{2a_0}\varkappa-\frac{1}{5a_0^2}\bar{q}(0)-\frac{11}{525a_0^4}\frac{d^2\bar{q}}{d\xi^2}(0)=0,$$
$$C_0+\left(\gamma^2-\frac{2}{a_0^2}\right)C+\int_0^\beta\left[\frac{a_0^4}{6}(\gamma-t)^3-\frac{4a_0^2}{5}(\gamma-t)\right]\bar{q}(t)\,dt+$$
$$+\left(\frac{94}{525}-\frac{a_0^2}{10}\gamma^2\right)\bar{q}(0)-\frac{11}{1050}\gamma^2\frac{d^2\bar{q}}{d\xi^2}(0)=0,\ \gamma=\frac{c}{a_0 h}. \qquad /11/$$

Якщо величина зони контакту β наперед невідома, то додається умова рівності нулю контактного тиску на краю зони контакту
$$A_1\,ch\lambda\beta\cos\mu\beta+A_2\,sh\lambda\beta\sin\mu\beta+q^*(\beta)=0. \qquad /12/$$

Тоді, задаючись величиною β, маємо систему шести рівнянь /9/-/12/ для визначення невідомих $A_1, A_2, C_0, C, \delta, \varkappa$.

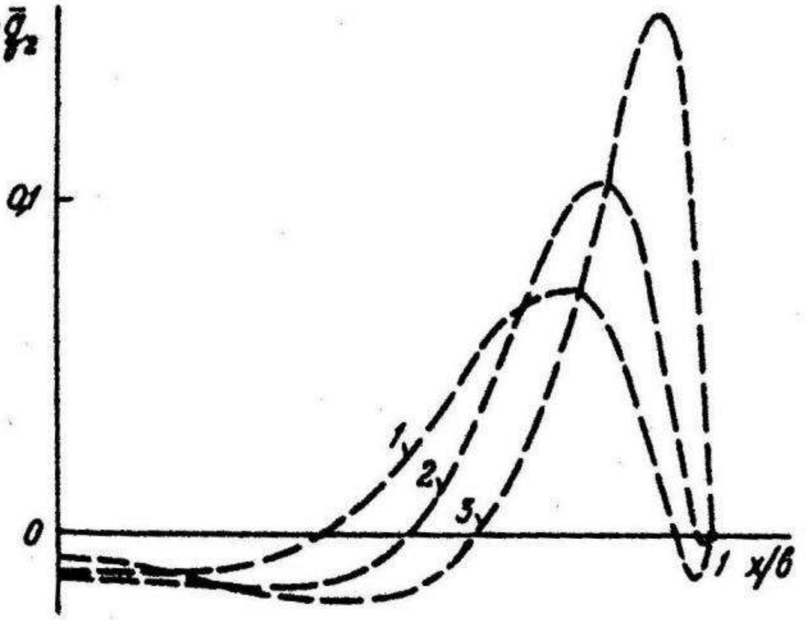

Рис. I.

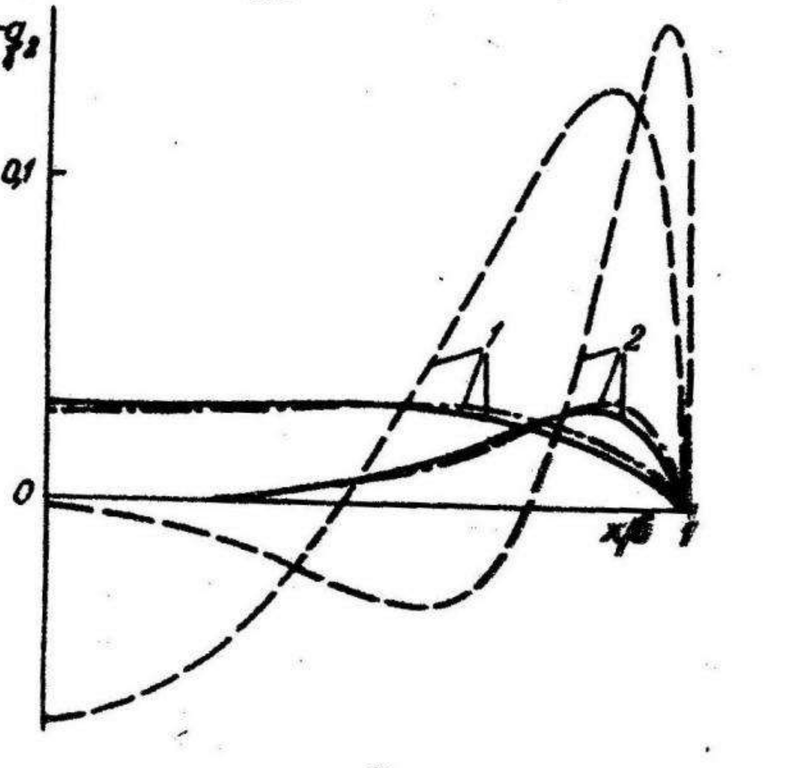

Рис. 2.

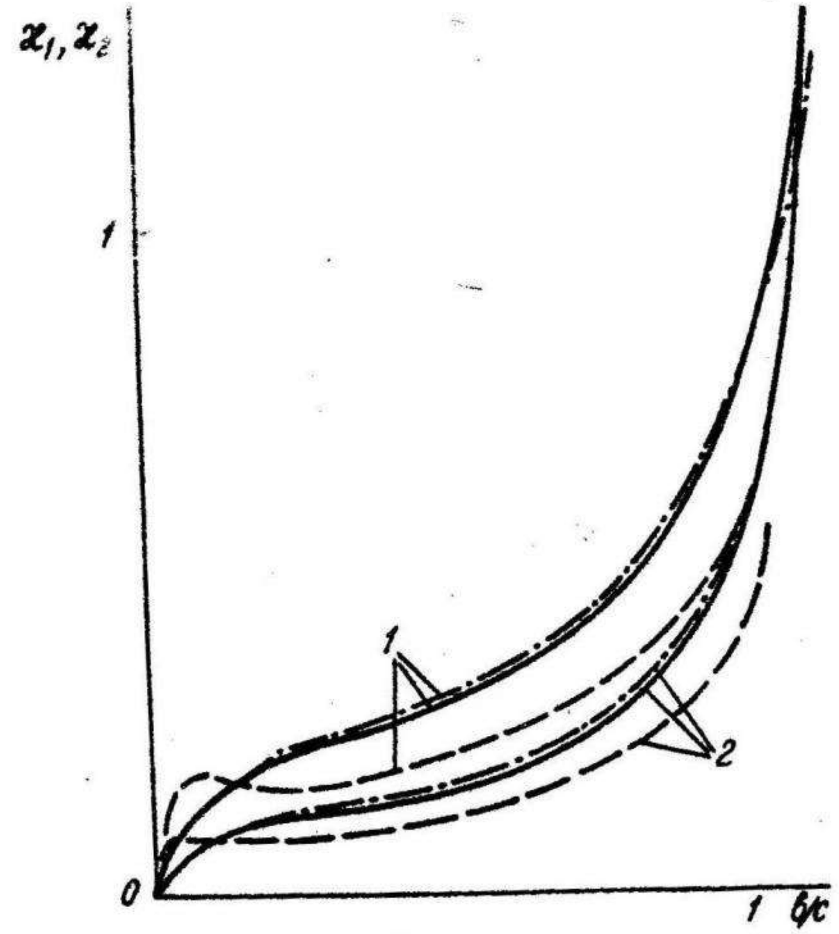

Рис. 3.

На рис. I–3 показані результати розрахунків для параболічного штампа $f(x)=\frac{x^2}{2R}$ / R – радіус кривини/, при $\theta_m(x)=\theta[1-(\frac{x}{b})^m]$, $m \in N$, $\theta_\infty(x)=\theta=const$. У цьому випадку контактний тиск $\bar{q}$ і зусилля $\varkappa$, як добре видно з розрахункових формул, можна записати у вигляді

$$\bar{q}=h\bar{q}_1/R+\alpha(1+\nu)\theta\bar{q}_2,\quad \varkappa=h\varkappa_1/R+\alpha(1+\nu)\theta\varkappa_2.$$

На рис. I–3 величини з індексом I нанесені суцільними лініями, а величини з індексом 2 – пунктирними. Штрих-пунктирною лінією нанесено точний розв"язок чисто силової контактної задачі [6].

На рис. I показано розподіл температурної компоненти контактного тиску $\bar{q}_{\nu_2}$ для $c/h=10$, $b/h=5$ і $m=8,12,\infty$ /криві I–3/. На рис. 2 наведено розподіл компонент контактного тиску $\bar{q}_{\nu_1}, \bar{q}_{\nu_2}$

при $c/h=20$, $m=\infty$ для різних величин зони контакту: $b/h=2$ - криві I, $b/h=6$ - криві 2.

Залежність компонент зусилля, прикладеного до штампа, від відносної величини зони контакту при $m=\infty$ і $c/h = 10, 20$ представлена на рис. 3 /криві I-2/. Вона дає змогу знаходити зону контакту за заданим зовнішнім навантаженням і температурою штампа. У випадку чисто силової контактної задачі $(\theta(x)=0)$ одержані криві майже не відрізняються від відповідальних кривих для точного розв"язку [6].

Список літератури: I. Г р і л и ц ь к и й Д.В., П о п о в и ч Б.І. Плоскі контактні задачі термопружності. - Львів: Вища школа, 1973. 2. Л у р ь е А.И. Пространственные задачи теории упругости. - М.: Гостехиздат, 1955. 3. Развитие теории контактных задач в СССР. - М.: Наука, 1976. 4. Х л е б н и к о в Д.Г. О контакте пластин при цилиндрическом изгибе. - В кн.: Статика сооружений. Киев, 1978. 5. Х л е б н и к о в Д.Г., П а р а щ а к А.Н. Контактная задача изгиба трансверсально-изотропной пластинки гладким штампом. - ДАН УССР, 1980, А, № I. 6. Keer L.M., Silva M.A.G. Bending of contilever brought gradually into contact with cylindrical supporting surface - Int. J. mech. Sci. Pergam. Press, 1970, v. 12, N 9.

Стаття надійшла в редколегію 24.04.81

УДК 539.681.3.057

І.І.Дияк, Я.Г.Савула, Г.А.Шинкаренко

РОЗРАХУНОК ТЕРМОНАПРУЖЕНЬ В ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ТІЛАХ НА ОСНОВІ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Наша стаття присвячена побудові схем методу скінченних елементів /МСЕ/ і відповідного програмного забезпечення розв"язання квазістатичних задач термопружності для тіл обертання під дією силового і температурного полів. При цьому вважаємо, що температура зовнішнього середовища є функцією часу, а силове навантаження - постійне.