

при $c/h=20$, $m=\infty$ для різних величин зони контакту:

$b/h=2$ - криві 1, $b/h=6$ - криві 2.

Залежність компонент зусилля, прикладеного до штамп, від відносної величини зони контакту при $m=\infty$ і $c/h=10, 20$ представлена на рис. 3 /криві 1-2/. Вона дає змогу знаходити зону контакту за заданим зовнішнім навантаженням і температурою штамп. У випадку чисто силової контактної задачі ($\theta(x)=0$) одержані криві майже не відрізняються від відповідальних кривих для точного розв'язку [6].

Список літератури: 1. Г р і л и ц ь к и й Д.В., П о п о - в и ч Б.І. Плоскі контактні задачі термопружності. - Львів: Вища школа, 1973. 2. Л у р ь е А.И. Пространственные задачи теории упругости. - М.: Гостехиздат, 1955. 3. Развитие теории контактных задач в СССР. - М.: Наука, 1976. 4. Х л е б н и к о в Д.Г. О контакте пластин при цилиндрическом изгибе. - В кн.: Статика сооружений. Киев, 1978. 5. Х л е б н и к о в Д.Г., П а р а щ а к А.Н. Контактная задача изгиба трансверсально-изотропной пластинки гладким штампом. - ДАН УССР, 1980, А, № 1. 6. *Keer L.M., Silva M.A.G. Bending of cantilever brought gradually into contact with cylindrical supporting surface - Int. J. mech. Sci. Pergam. Press, 1970, v. 12, n. 9.*

Стаття надійшла в редколегію 24.04.81

УДК 539.681.3.057

І.І.Дияк, Я.Г.Савула, Г.А.Шинкаренко

РОЗРАХУНОК ТЕРМОНАПРУЖЕНЬ В ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ТІЛАХ НА ОСНОВІ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Наша стаття присвячена побудові схем методу скінченних елементів /МСЕ/ і відповідного програмного забезпечення розв'язання квазістатичних задач термопружності для тіл обертання під дією силового і температурного полів. При цьому вважаємо, що температура зовнішнього середовища є функцією часу, а силові навантаження - постійне.

Задачу розглядаємо у квазістатичній постановці [1], тобто визначаємо температурне поле в даний момент часу і за відомим розподілом температур знаходимо деформації та напруження, викликані зовнішнім навантаженням і нерівномірним нагрівом. Задачу нестационарної теплопровідності розв'язуємо з використанням методу Гальоркіна [2], а розв'язування задачі пружної рівноваги знаходимо з умов мінімуму узагальненого функціоналу Лагранжа.

1. Побудуємо скінченновимірний підпростір допустимих полів зміщень $U = (u, v)^T$ і температур t .

Представимо меридіональний перетин Ω тіла як сукупність трикутних елементів, що попарно не перетинаються. Виберемо кусково-лінійну базу $\varphi_i(r, z)$ тестового підпростору $V_N^h \subset W_2^1(\Omega)$ таким чином: 1/ кожній функції φ_i поставимо у відповідність вершину P_i розбиття так, що $\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$, де δ_{ij} - символ Кронекера; 2/ всі функції φ_i за виключенням тих, які відповідають вершинам $P_i(r_i, z_i)$ елемента Ω_e , перетворюються в нуль всюди на Ω_e . Побудований простір V_N^h має наступну властивість апроксимації [3]: для кожної функції

$\omega \in W_2^1(\Omega)$ існує $\omega^h \in V_N^h$ така, що

$$\|\omega - \omega^h\|_0 + h \|\omega - \omega^h\|_1 \leq ch^2 \|\omega\|_2,$$

де $\|\cdot\|_k$ - норма простору Соболева $W_2^k(\Omega)$; h - параметр дискретизації. Після дискретизації по просторових змінних наближений розв'язок задачі шукаємо у вигляді

$$u = \sum_i u_i(\tau) \varphi_i(r, z), \quad /1.1/$$

$$v = \sum_i v_i(\tau) \varphi_i(r, z), \quad /1.2/$$

$$t = \sum_i q_i(\tau) \varphi_i(r, z). \quad /1.3/$$

2. Варіаційна постановка задачі нестационарного теплообміну при відсутності внутрішніх джерел тепла формується таким чином [2]:

знайти таку функцію $t(r, z, \tau) \in W_2'(\Omega)$, $\tau \geq 0$, яка задовільняє рівняння

$$(ct, \varphi_i) + a(t, \varphi_i) = [af, \varphi_i], \quad /2.1/$$

для $\forall \varphi_i \in V_i$. Тут $(\cdot, \cdot)$, $[\cdot, \cdot]$ - скалярні добутки в $L_2(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$,

$a(u, v) = \iint_{\Omega} \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) r dr dz + \int_{\Gamma} \alpha u v r dS$;
 Γ - частина границі області Ω , через яку здійснюється теплообмін з зовнішнім середовищем; c , λ , α - відповідно коефіцієнти теплоємності, теплопровідності, теплообміну; f - температура зовнішнього середовища. Підставляючи /1.3/ у рівняння /2.1/, приходимо до системи звичайних диференціальних рівнянь N -го порядку

$$M \dot{q}(\tau) + K q(\tau) = F(\tau), \quad /2.2/$$

де M, K - постійні, додатно визначені матриці з елементами $M_{ij} = (c\varphi_i, \varphi_j)$, $K_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$; $F(\tau)$ - вектор з компонентами $F_i(\tau) = [af, \varphi_i]$; $q = (q_1, q_2, \dots, q_N)$; явний вигляд коефіцієнтів матриць M, K і вектора F наведений у праці [4]. Початкові умови для системи /2.2/ визначаються як:

$$q_i(0) = t_0(r_i, z_i) \quad i=1, 2, \dots, N, \quad /2.3/$$

де $t_0(r, z)$ - початковий розподіл температури в тілі. Одержана задача Коші інтегрується з допомогою схеми Кранка-Ніколсона. Детальний опис алгоритму розв'язання системи /2.2/, /2.3/, а також приклади розв'язаних задач теплопровідності наведені у праці [4].

3. Шуканий вектор зміщень U у довільний момент часу $\tau > 0$ знаходимо з умови мінімуму узагальненого функціонала Лагранжа [1],

який має вигляд

$$F(u, v) = c_1 \iiint_{\Omega} \left\{ \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u^2}{r^2} + b \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{a}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] + \right. \\
+ \left[b \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right] + \left[\frac{a}{r} u \frac{\partial v}{\partial z} + a \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial z} + b \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial z} \right] + \left[\frac{a}{r} \frac{\partial v}{\partial z} u + a \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial r} + \right. \\
\left. \left. + b \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial z} \right] - 2\gamma t \left[\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right] \right\} r dr dz - 2 \int_{\Gamma} [\cos(n, r) \cos(n, z)] p r dS, \quad /3.1/$$

де D - границя області Ω , на якій задане нормальне навантаження інтенсивності P ;

$$a = \frac{\nu}{1-\nu} ; \quad b = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} ; \quad c_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} ;$$

ν - коефіцієнт Пуассона; E - модуль Юнга; $\gamma = \alpha_f(3\lambda + 2G)$,
 λ, G - коефіцієнти Ляме.

Умови мінімуму функціонала /3.1/ після підстановки формул /1.1/-/1.3/ приводять до системи алгебраїчних рівнянь для визначення вузлових значень зміщень

$$Qs = R, \quad /3.2/$$

де Q - матриця жорсткості; R - вектор навантаження;

$$s = (u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_N, v_N).$$

Явний вигляд коефіцієнтів матриці жорсткості Q_{ij} і вектора навантаження R_i легко визначити з формули /3.1/. Їх обчислення на кожному елементі після деякого лінійного перетворення координат зводиться до інтегрування на стандартному трикутнику

$\Omega_0 = \{x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$. Система рівнянь /3.2/ розв'язується з використанням методу Гауса.

Знайшовши таким чином розподіл температури та зміщень у кожному вузлі сітки дискретизації, визначаємо за відомими формулами напруження [1].

Цей алгоритм реалізований у вигляді комплексу Фортран-програм для ЕСМ БЕСМ-6.

Приклад I. Розв'язана тестова задача визначення теплових напружень у нескінченному циліндрі при конвективному обміні між його поверхнею і зовнішнім середовищем. Початкова температура циліндра $t_0 = 323^\circ\text{C}$, температура середовища f змінюється за законом

$$f(\tau_1) = 823(1 + 0.5473 \cdot e^{-53.6\tau_1}),$$

де $\tau_1 = \frac{a\tau}{r^2}$ - безрозмірний час; $r = 0.141$ - радіус циліндра;

$\alpha = 0,557 \cdot 10^{-7} \frac{M}{C}$ - коефіцієнт температуропровідності, критерій теплової подібності $B_L = 15$.

Теплові напруження у суцільному
нескінченному циліндрі

		τ, c	0,0	0,2	R/r	0,4	0,6	0,8	1,0
σ_r	180		95	90	82	78	54	-8	
			71	70	68	60	44	0,6	
			71	69	66	59	39	0	
	540		128	117	99	70	35	1	
			103	98	85	63	33	0	
			98	90	78	58	32	0	
σ_θ	180		91	88	74	20	-88	-240	
			72	70	58	13	-65	-240	
			71	69	74	28	-51	-239	
	540		119	110	71	9	-68	-152	
			103	90	54	-5	-81	-159	
			100	88	52	-10	-82	-160	

Результати розв'язування цієї задачі наведені у таблиці. Перше число кожної графі - розв'язок, одержаний з використанням 10 елементів по радіусу циліндра, друге - 20 елементів, третє - точний розв'язок [1]. Як видно, у другому випадку одержано достатньо добре наближення до точного розв'язку. Відносна похибка у цьому випадку не перевищує 5%.

Приклад 2. За наведеною методикою визначені термонапруження в балоні мінескопа ІЗ-АН-5.

Температура мінескопа змінювалась внаслідок конвективного теплообміну з зовнішнім середовищем, температура якого змінювалась по закону

$$f(\tau) = \begin{cases} 40 + 1360\tau, & \text{якщо } 0 \leq \tau \leq 0,25, \\ 640 + 1040\tau, & \text{якщо } 0,25 \leq \tau \leq 0,5. \end{cases}$$

На внутрішній поверхні і торцях балона задані умови теплоізоляції. Початкова температура балона $t_0 = 40^\circ\text{C}$, теплофізичні та механічні характеристики скла

$$E = 6,4 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}, \quad \nu = 0,22, \quad \alpha_b = 9,4 \cdot 10^{-6} \text{град}^{-1},$$

$$C = 4,864 \cdot 10^{-4} \frac{\text{ккал}}{\text{град}}, \quad \alpha = 4,073 \cdot 10^3 \frac{\text{ккал}}{\text{мм} \cdot \text{град}}, \quad \lambda = 1,404 \frac{\text{ккал}}{\text{мм} \cdot \text{град}}.$$

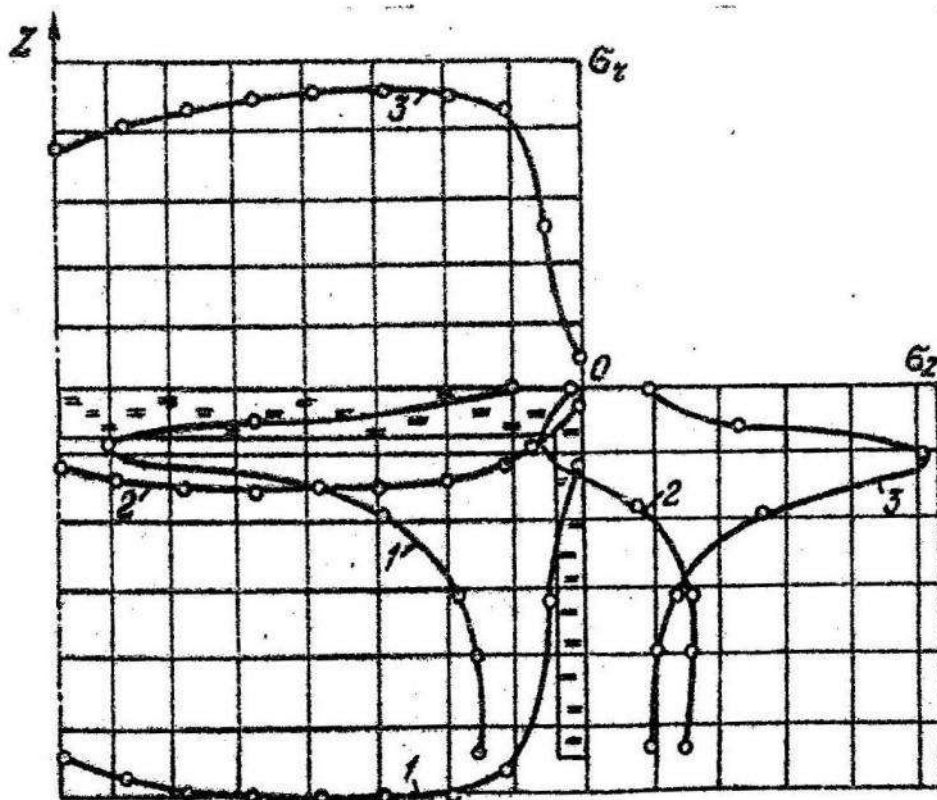


Рис. 1.

Характер поведінки у часі розтягуючих теплових напружень σ_x , σ_z на зовнішній і внутрішній поверхнях балона показаний на рис. 1, 2.

Розподіл напружень у момент часу $\tau_1 = 0,15$, $\tau_2 = 0,3$, $\tau_3 = 0,45$ показаний на рисунках відповідно кривими 1-3.

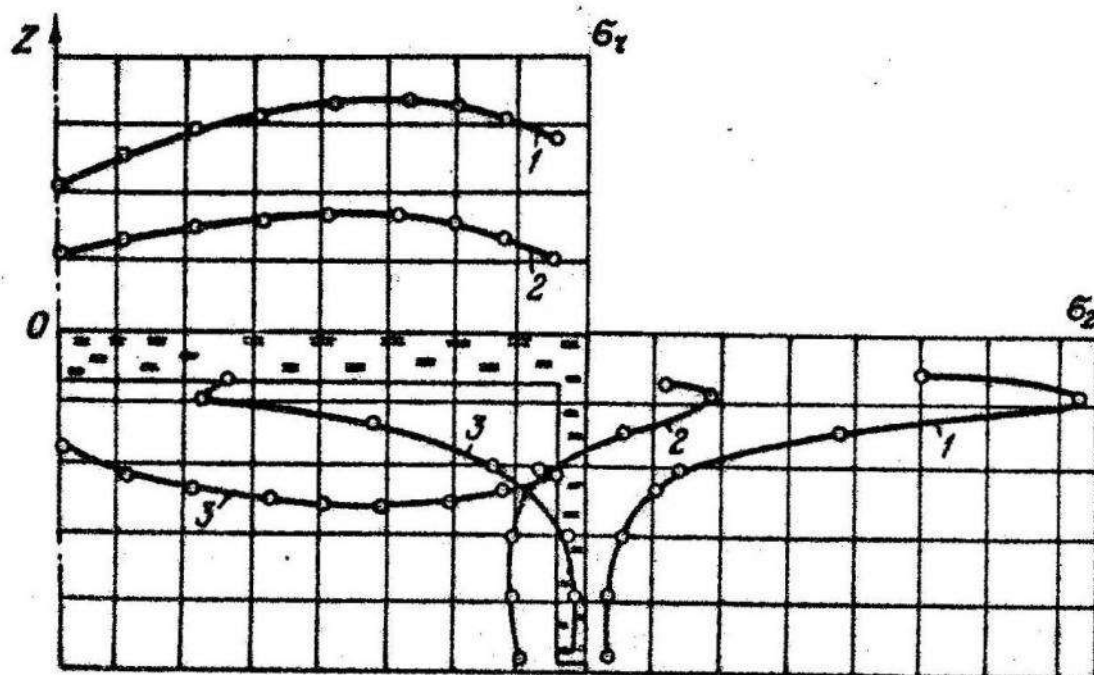


Рис. 2.

Список літератури: 1. К о в а л е н к о А.Д. Термоупругость. - К.: Вища школа, 1975. 2. М и х л и н С.Г. Вариационные методы в математической физике. - М.: Наука, 1970. 3. С т р е н г Г., Ф и к о Дж. Теория метода конечных элементов. - М.: Мир, 1977. 4. Ш и н к а р е н к о Г.А., Г р и г о р я н С.С., Д и я к І.І. Чисельні дослідження нестационарного конвективного теплообміну методом скінчених елементів. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1980, вип. 16.

Стаття надійшла в редакцію 10.02.81

УДК 517.958

І.І.Дияк

РЕАЛІЗАЦІЯ ВИСОКОТОЧНИХ СХЕМ МЕТОДУ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ЗАДАЧ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Описано алгоритм розв'язування задачі нестационарної теплопровідності для двовірних і осесиметричних тіл на основі методу скінчених елементів з використанням високоточних ізопараметричних елементів.