

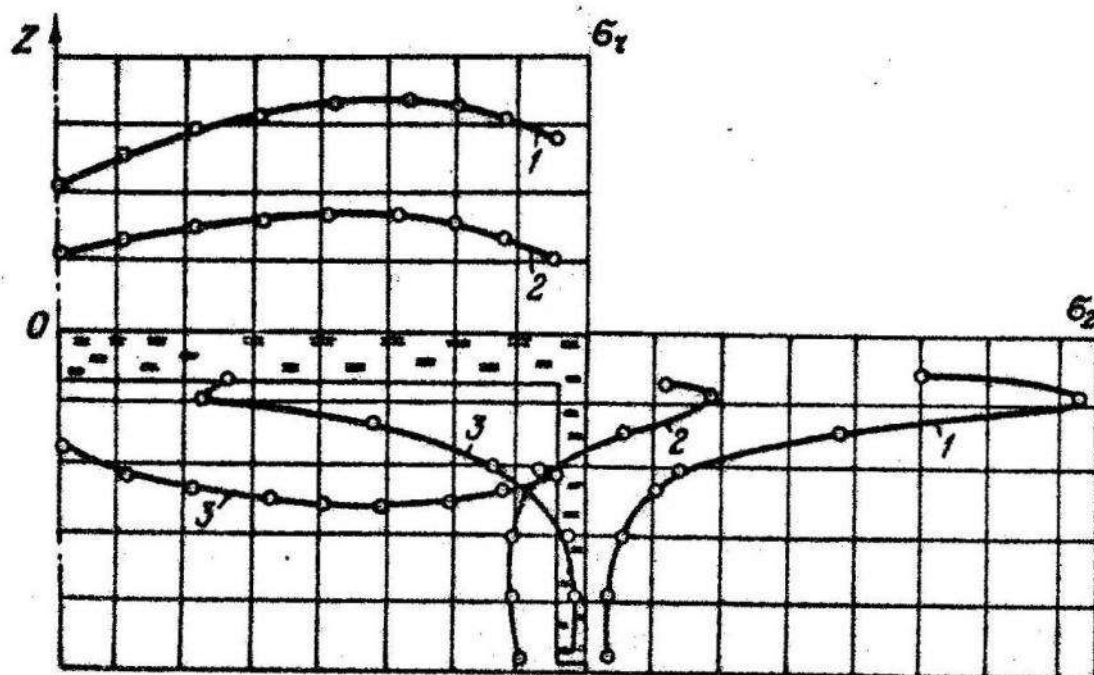


Рис. 2.

Список літератури: 1. К о в а л е н к о А.Д. Термоупругость. - К.: Вища школа, 1975. 2. М и х л и н С.Г. Вариационные методы в математической физике. - М.: Наука, 1970. 3. С т р е н г Г., Ф и к о Дж. Теория метода конечных элементов. - М.: Мир, 1977. 4. Ш и н к а р е н к о Г.А., Г р и г о р я н С.С., Д и я к І.І. Чисельні дослідження нестационарного конвективного теплообміну методом скінченних елементів. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1980, вип. 16.

Стаття надійшла в редакцію 10.02.81

УДК 517.958

І.І.Дияк

РЕАЛІЗАЦІЯ ВИСОКОТОЧНИХ СХЕМ МЕТОДУ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ЗАДАЧ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Описано алгоритм розв'язування задачі нестационарної теплопровідності для двовірних і осесиметричних тіл на основі методу скінченних елементів з використанням високоточних ізопараметричних елементів.

Використаємо схему методу скінченних елементів для задач тепло-
провідності, яка описана у праці [3]. На основі цієї схеми задача
знаходження температури у довільній точці тіла зводиться до інтегру-
вання задачі Коші виду

$$M\dot{q}(\tau) + Kq(\tau) = F(\tau),$$

$$q(0) = T_0,$$

/1/

де M, K - постійні додатно визначені матриці з елементами
 $M_{ij} = (c\chi\varphi_i, \varphi_j)$, $K_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$; $F(\tau)$ - вектор з компонентами
 $f_i = [T_c, \varphi_i] + [\delta, \varphi_i]$; T_0 - розподіл температури в початковий
момент часу; $q(\tau)$ - вектор вузлових значень температури в точках
дискретизації в момент часу τ ; T_c - температура зовнішнього середо-
вища; δ - функція внутрішніх джерел тепла; φ_i - координатні
функції; a - оператор [3], $\dot{q}(\tau) = \frac{dq(\tau)}{d\tau}$, $(\cdot, \cdot)$, $[\cdot, \cdot]$ - від-
повідно скалярні добутки в $L_2(\Omega)$ і $L_2(\Gamma)$.

При інтегруванні /1/, скориставшись методом зважених залишків,
одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$(M + \theta\Delta\tau K)q_{i+1} = [M - (1-\theta)\Delta\tau K]q_i +$$

$$+ \Delta\tau [(1-\theta)F_i + \theta F_{i+1}]$$

$$i = 0, 1, \dots, \frac{\tau^*}{\Delta\tau},$$

$$q_0 = T_0,$$

/2/

тут $\Delta\tau$ - крок інтегрування по часу,

$$q_i = q(i\Delta\tau), \quad F_i = F(i\Delta\tau), \quad \tau \in [0, \tau^*].$$

Якщо $0 < \theta < \frac{1}{2}$, то з /2/ одержуємо умовно стійкі схеми, при
 $\theta = \frac{1}{2}$ - схему Кранка-Ніколсона, якщо $\frac{1}{2} < \theta \leq 1$ - абсолютно стій-
кі неявні схеми.

Для послідовного розв'язування системи виду /2/ використовуємо
метод Холєцького, який дає змогу в процесі обчислень зберегти стріч-
кову структуру матриць і значно зменшити кількість арифметичних опе-
рацій [3].

На відміну від праці [3], область меридіального перетину Ω представляємо у вигляді набору чотирикутників, внутрішності яких взаємно не перетинаються.

Для апроксимації невідомої температури в межах чотирикутного елемента

$$T = \sum_i q_i(\tau) \varphi_i(\tau, z) \quad /3/$$

використовуємо поліноми $\varphi_i(\tau, z)$ різних порядків білінійний, біквадратичний, бікубічний. Дослідження проводили з елементами серендипового типу [1] з чотирма, вісьмома та дванадцятьма вузлами інтерполяції.

Елементи матриць системи /1/ обчислювали з використанням ізопараметричної апроксимації координат. Відображаючи кожен елемент розбиття на стандартний $\Omega_0 = \{(\xi, \eta) : |\xi| \leq 1, |\eta| \leq 1\}$, одержуємо вирази для коефіцієнтів матриць

$$\begin{aligned} K_{ij}^e &= \iint_{\Omega_e} \lambda x_i^T x_j \tau dz dz + \int_{\Gamma_e} \alpha \psi_i^T \psi_j \tau d\Gamma = \\ &= \iint_{-1}^1 \lambda y_i^T (\bar{A}^{-1}) \bar{A}^{-1} y_j \tau d\xi d\eta + \int_{-1}^1 \alpha \psi_i^T \psi_j \sqrt{\tau'^2 + z'^2} \tau dt, \\ M_{ij}^e &= \iint_{\Omega_e} c \tau \varphi_i \varphi_j \tau dz dz = \iint_{-1}^1 c \tau \varphi_i \varphi_j \tau \Delta d\xi d\eta, \\ F_i^e &= \int_{\Gamma_e} \alpha T_c \psi_i \tau d\Gamma + \iint_{\Omega_e} \delta \psi_i \tau d\Omega = \\ &= \int_{-1}^1 \alpha T_c \psi_i \sqrt{\tau'^2 + z'^2} \tau dt + \iint_{-1}^1 \delta \psi_i \tau \Delta d\xi d\eta, \end{aligned} \quad /4/$$

і, просумувавши по всіх елементах e , в які входять вузли i і j , запишемо

$$K_{ij} = \sum_e K_{ij}^e, \quad M_{ij} = \sum_e M_{ij}^e, \quad F_i = \sum_e F_i^e$$

де

$$x_i = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \tau}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right)^T; \quad y_i = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \right)^T;$$

A - матриця Якобі переходу від глобальної системи координат (τ, z) до локальної (ξ, η) ; $\Delta = \det A = \frac{\partial \tau}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial \tau}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi}$;

ψ_{i_1} - функції з компактним носієм, які використовують для апроксимації елемента дуги кривої. Для чотирикутника з чотирма вузлами інтерполяції вони мають вигляд:

$$\psi_{i_1} = \frac{1}{2} (1-t), \quad \psi_2 = \frac{1}{2} (1+t) \quad ;$$

з вісьмома вузлами

$$\psi_1 = \frac{1}{2} (1-t)t, \quad \psi_2 = (1-t)(1+t), \quad \psi_3 = \frac{1}{2} (1+t)t;$$

з дванадцятьма вузлами

$$\psi_1 = -\frac{9}{16} (t+\frac{1}{3})(t-\frac{1}{3})(t-1),$$

$$\psi_2 = \frac{9}{16} (t+1)(t+\frac{1}{3})(t-\frac{1}{3}),$$

$$\psi_3 = \frac{27}{16} (t+1)(t-\frac{1}{3})(t-1),$$

$$\psi_4 = -\frac{27}{16} (t+1)(t+\frac{1}{3})(t-1).$$

Таким чином, обчислення коефіцієнтів матриць системи зводиться до обчислення на стандартному чотирикутнику Ω_0 або відрізьку $|t| \leq 1$ інтегралів [4], які знаходили за допомогою квадратурної формули Гауса. Для білінійного, біквадратичного та бікубічного законів апроксимації використовували відповідно формули Гауса другого, третього й четвертого порядку.

Слід відмітити, що матриця M і вектор F аналогічні тим, які одержують при розв'язуванні задачі стаціонарної теплопровідності.

Описаний вище алгоритм для розв'язування задач стаціонарної і нестаціонарної теплопровідності реалізований у вигляді комплексу Фортран-програм для ЕОМ БЭСМ-6. Алгоритм розв'язування аналогічних задач зі застосуванням трикутних елементів і лінійної інтерполяції невідомих функцій на них описаний у праці [3].

Досвід використання трикутних скінченних елементів показав, що для одержання достатньо точних результатів необхідно: використовувати досить густі сітки скінченних елементів, що приводить до потреби у зовнішніх завантажувачих пристроях на магнітних бараба-

нах /МБ/ чи магнітних дисках /МД/; здійснювати серію розрахунків на різних сітках дискретизації; порівняно великий час роботи ЕОМ.

Використання ізопараметричних скінченних елементів має ряд переваг. Наявність криволінійних сторін в елементах дає змогу достатньо точно на досить грубих сітках наближати криволінійні ділянки досліджуваних областей. Високі порядки апроксимацій сприяють одержанню результатів з необхідною точністю на рідких сітках, використовуючи менший обсяг оперативної пам'яті /ОП/ і менший час роботи ЕОМ.

За допомогою цього комплексу можна досягати необхідної точності наближеного розв'язку за рахунок h - збіжності /зменшення величини діаметра розбиття/, а також p - збіжності /підвищення точності за рахунок збільшення порядку апроксимуючих функцій/.

ОП ЕОМ при роботі комплексу розподіляється динамічно, тобто програмні модулі завантажуються на одне і те ж місце ОП. Всі матриці системи зберігаються стрічковим способом і, враховуючи їх симетричність, лише наддіагональні члени. Процес розв'язання задачі нестационарної теплопровідності припиняється тоді, коли температурне поле стає стаціонарним або досягається верхня межа інтервалу зміни часу.

Нижче наведені результати деяких чисельних досліджень. Розв'язана задача наведена у праці [3] з використанням чотирикутних ізопараметричних елементів. Якщо з використанням трикутних скінченних елементів для досягнення похибки менше 2% необхідно було 32 елементи, та такої ж точності можна досягти використовуючи вісім чотирикутних елементів з білінійною або чотири елементи з біквадратичною чи три з бікубічною апроксимацією температури. При цьому значно зменшився порядок системи рівнянь, а також скоротився час рахунку на ЕОМ.

У таблиці наведені результати розв'язування задачі про нагрів суцільного циліндра [2]. Температура циліндра в початковий момент

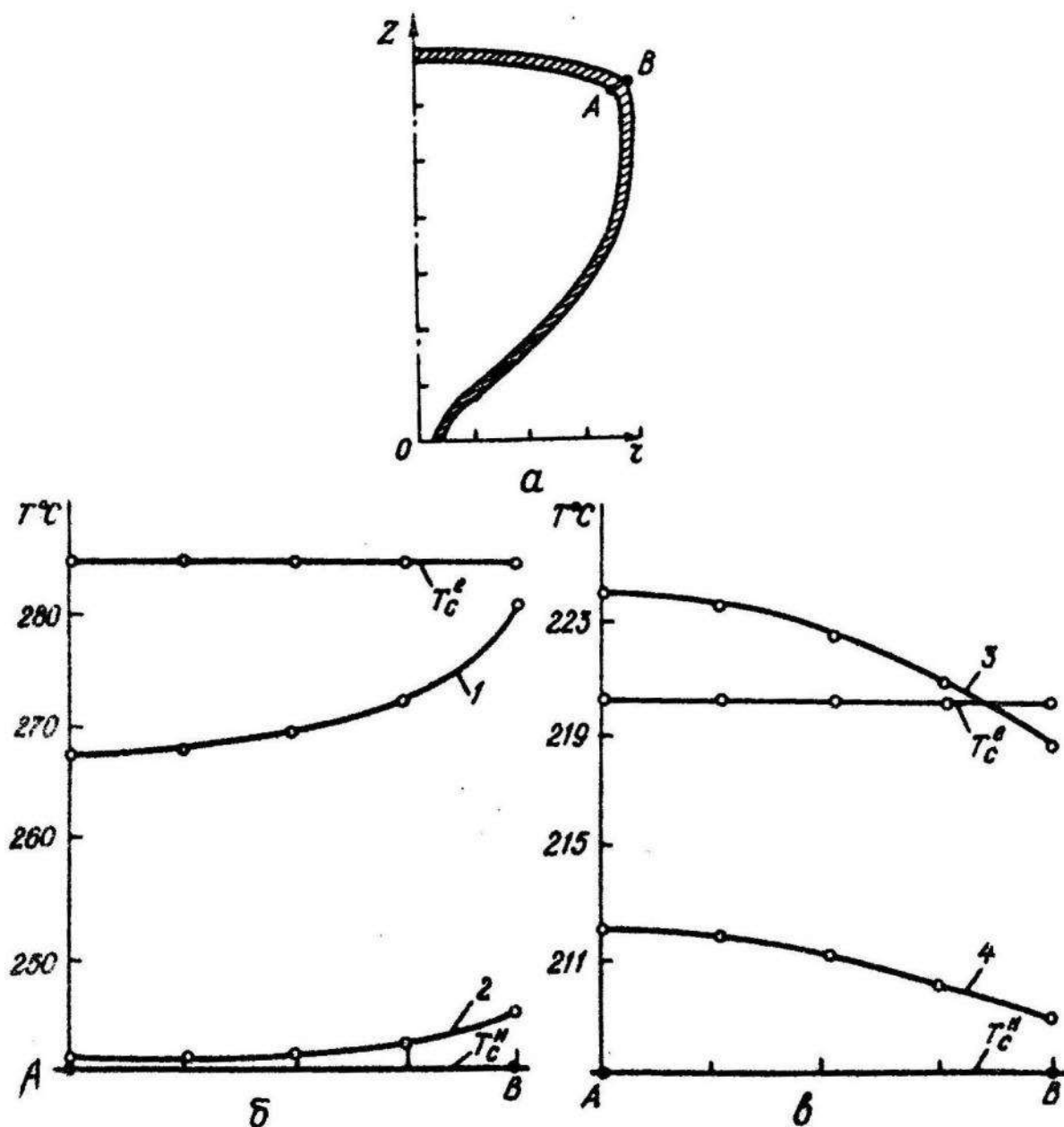
часу $T_0 = 323 \text{ K}$. Температура зовнішнього середовища змінюється за законом

$$T_c = 823 (1 + 0,5473 e^{-53,6t}).$$

Нагрів судільного циліндра

τ, c	τ		
	0,0	0,5	I
180	328	337	737
	327	351	712
	328	358	708
	316	365	709
	324	355	709
360	314	462	682
	358	449	769
	365	452	770
	373	455	769
	361	452	770
540	583	487	1056
	434	535	788
	438	536	487
	442	537	487
	436	537	487

Коефіцієнт температуропровідності $a = \frac{\lambda}{c\tau} = 0,557 \cdot 10^{-5} \frac{M^2}{c}$, критерій теплової подібності $Bi = 15$, радіус циліндра $r = 0,141 \text{ м}$. Величина кроку за часом $\Delta\tau = 60c$. При розв'язуванні /2/ верхнє число кожної графі відповідає $\theta = \frac{1}{3}$, друге - $\theta = \frac{1}{2}$ /схема Кранка-Ніколсона/, третє - $\theta = \frac{2}{3}$; четверте - $\theta = 0,875$, останнє - значенню точного розв'язку із праці [2]. Як видно із таблиці, для такого великого кроку за часом схема при $\theta = \frac{1}{3}$ розбіжна. Найкращі наближення дає схема при $\theta = \frac{2}{3}$. При кроці за часом $\Delta\tau = 1c$ на основі всіх схем одержуємо розв'язок, який відрізняється від точного менше, ніж на 2%.



На рисунку показаний розподіл температури в перерізі АВ балона кінескопа 6І ЛКЗЦ /рисунк, а/ в момент часу $\tau = 1800\text{с}$ /рисунк, б/ і $\tau = 3600\text{с}$ /рисунк, в/. Коефіцієнт температуропровідності $a = 0,802 \frac{\text{мм}^2}{\text{с}}$. Температура зовнішнього середовища змінювалась за законом:

на екрані балона

$$T_c^e = \begin{cases} 40 + 27\tau / 198, \\ 310 - 19(\tau - 1980) / 342, \end{cases}$$

якщо $0 \leq \tau \leq 1980\text{с}$,

якщо $1980\text{с} \leq \tau \leq 5400\text{с}$;

у нижній його частині

$$T_c^H = \begin{cases} 40 + 22\tau / 198, & \text{якщо } 0 \leq \tau \leq 1980\text{с}, \\ 260 - 11(\tau - 1980) / 342, & \text{якщо } 1980\text{с} \leq \tau \leq 5400\text{с}. \end{cases}$$

По осі Oz вздовж меридіонального перетину температура змінювалась за лінійним законом. Хоча й товщина балона кінескопа невелика, розподіл температур по товщині має характер складніший від лінійного. Було прораховано два варіанти задачі: T_c^H і T_c^H мінялись місцями. Криві 1, 3 – значення температури, якщо $T_c^H > T_c^H$, криві 2, 4 – температура, якщо $T_c^H < T_c^H$.

Автор вдячний Г.А.Шинкаренку за обговорення результатів роботи.

Список літератури: 1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. 2. Коваленко А.Л. Термоупругость. – К.: Вища школа, 1975. 3. Шинкаренко Г.А., Григорян С.С., Дияк І.І. Чисельне дослідження нестационарного конвективного теплообміну методом скінченних елементів. Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1980, вип. 16.

Стаття надійшла в редакцію 21.02.81

УДК 539.3

В.Д.Вовк, Г.А.Шинкаренко

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Нехай напружено-деформований стан тіла обертання, яке віднесе-
не до циліндричної системи координат (r, θ, z) не залежить від
змінної θ . Припустимо, що меридіанний перетин тіла $\theta = \text{const}$
займає обмежену зв'язну область Ω з кусково-гладкою границею $\partial\Omega$.
Тоді розв'язування задачі теорії пружності зводиться до знаходжен-
ня вектора зміщень $S = (u, v)^T$, який задовольняє рівняння рівнова-