

у нижній його частині

$$T_c^H = \begin{cases} 40 + 22\tau / 198, & \text{якщо } 0 \leq \tau \leq 1980\text{с}, \\ 260 - 11(\tau - 1980) / 342, & \text{якщо } 1980\text{с} \leq \tau \leq 5400\text{с}. \end{cases}$$

По осі Oz вздовж меридіонального перетину температура змінювалась за лінійним законом. Хоча й товщина балона кінескопа невелика, розподіл температур по товщині має характер складніший від лінійного. Було прораховано два варіанти задачі: T_c^H і T_c^H мінялись місцями. Криві 1, 3 – значення температури, якщо $T_c^H > T_c^H$, криві 2, 4 – температура, якщо $T_c^H < T_c^H$.

Автор вдячний Г.А.Шинкаренку за обговорення результатів роботи.

Список літератури: 1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. 2. Коваленко А.Л. Термоупругость. – К.: Вища школа, 1975. 3. Шинкаренко Г.А., Григорян С.С., Дияк І.І. Чисельне дослідження нестационарного конвективного теплообміну методом скінченних елементів. Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1980, вип. 16.

Стаття надійшла в редакцію 21.02.81

УДК 539.3

В.Д.Вовк, Г.А.Шинкаренко

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Нехай напружено-деформований стан тіла обертання, яке віднесе-
не до циліндричної системи координат (r, θ, z) не залежить від
змінної θ . Припустимо, що меридіанний перетин тіла $\theta = \text{const}$
займає обмежену зв'язну область Ω з кусково-гладкою границею $\partial\Omega$.
Тоді розв'язування задачі теорії пружності зводиться до знаходжен-
ня вектора зміщень $S = (u, v)^T$, який задовольняє рівняння рівнова-

гн [1]

$$\begin{cases} -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \phi_{rr}) + \frac{1}{r} \phi_{\theta\theta} - \frac{\partial}{\partial z} \phi_{rz} - F_z = 0, \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \phi_{rz}) - \frac{\partial}{\partial z} \phi_{zz} - F_z = 0 \end{cases} \quad /1/$$

в області Ω і крайові умови

$$u = \hat{u}, \quad v = \hat{v} \quad \text{на } \partial\Omega_1, \quad /2/$$

$$\begin{cases} \phi_{rz} \cos(n, r) + \phi_{zz} \cos(n, z) = \hat{f}_z, \\ \phi_{rz} \cos(n, r) + \phi_{zz} \cos(n, z) = \hat{f}_z \end{cases} \quad \text{на } \partial\Omega_2. \quad /3/$$

Тут $u = u(r, z)$, $v = v(r, z)$ - компоненти зміщення точки (r, z) вздовж осей відповідно Or, Oz ; $F = (F_r, F_z)^T$ - заданий вектор масових сил; $\hat{u}, \hat{v}$ - задані компоненти зміщень на $\partial\Omega_1$; $\hat{f} = (\hat{f}_r, \hat{f}_z)^T$ - задані поверхневі навантаження на $\partial\Omega_2$; n - напрям зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$. Ненульові компоненти тензора напружень, що фігурують у рівняннях /1/-/3/, пов'язані зі складовими зміщень наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \phi_{rr} &= \lambda \operatorname{div} S + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r}, & \phi_{\theta\theta} &= \lambda \operatorname{div} S + 2\mu \frac{u}{r}, \\ \phi_{zz} &= \lambda \operatorname{div} S + 2\mu \frac{\partial v}{\partial z}, & \phi_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad /4/$$

де λ, μ - коефіцієнти Ляме.

Крайову задачу /1/-/3/ в варіаційній постановці можна сформулювати таким чином: серед усіх векторів таких, що задовольняють умову /2/ і $u, v \in W_2^1(\Omega)$, знайти такий, який задовольняє варіаційне рівняння

$$a(S, t) = \langle F, t \rangle + [f, t] \quad \forall t \in H_A, \quad /5/$$

де H_A - енергетичний простір оператора крайової задачі /1/-/3/

$$H_A = \{t = (p, q): p = 0, q = 0 \text{ на } \partial\Omega_1, p, q \in W_2^1(\Omega)\} \quad /6/$$

зі скалярним добутком

$$\begin{aligned} a(S, t) &= \int_{\Omega} \left[2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{up}{r} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \frac{\partial}{\partial r} (rp) \right] + \\ &+ \left[2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial q}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \lambda \frac{1}{r} \left(\frac{\partial q}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} (rp) \right) \right] + \end{aligned}$$

$$+ \left[2\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial q}{\partial z} \right) + \lambda \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial q}{\partial z} \right] \} \omega dz; \quad /7/$$

$\langle \dots \rangle$ і $[\dots]$ - скалярні добутки в $L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$ і $L_2(\partial\Omega_1) \times L_2(\partial\Omega_2)$.

Зобразимо область Ω у вигляді об'єднання криволінійних чотирикутників, внутрішності яких попарно не перетинаються, але їх границі можуть мати спільну сторону або вершину. Кожен чотирикутний елемент віднесемо до криволінійної системи координат (α, β) так, що $|\alpha| \leq 1$, $|\beta| \leq 1$. Якщо функція $q(\alpha, \beta)$ визначена на такому елементі, то апроксимуватимемо її одним з наступних інтерполяційних поліномів

$$g_m(\alpha, \beta) \quad m = 1, 2, 3/;$$

$$1/ \quad g_1(\alpha, \beta) = \sum_{i,j=-1}^1 \frac{1}{4} (1+i\alpha)(1+j\beta) g(i,j), \quad /8/$$

якщо інтерполювання здійснюється за значеннями функції у вершинах чотирикутника;

$$2/ \quad g_2(\alpha, \beta) = \sum_{i,j=-1}^1 \left\{ \frac{1}{4} (1+i\alpha)(1+j\beta)(\alpha+j\beta-1) g(i,j) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (1+\kappa\alpha + \eta\beta) (1-\eta^2\alpha^2 - \kappa^2\beta^2) g(\kappa, \eta) \right\}, \quad /9/$$

коли інтерполювання здійснюється за значеннями функції у вершинах чотирикутника та серединах його сторін;

$$3/ \quad g_3(\alpha, \beta) = \sum_{i,j=-1}^1 \left\{ \frac{1}{32} (1+i\alpha)(1+j\beta) [9(\alpha^2+\beta^2)-10] g(i,j) + \right. \\ \left. + \frac{9}{32} (1+\kappa\alpha + \eta\beta) (1-\eta^2\alpha^2 - \kappa^2\beta^2) (1+2\eta\alpha - 3\kappa\beta) g(i, j_1) + \right. \\ \left. + \frac{9}{32} (1+\kappa\alpha + \eta\beta) (1-\eta^2\alpha^2 - \kappa^2\beta^2) (1-3\eta\alpha + 3\kappa\beta) g(i_2, j_2), \right. \quad /10/$$

якщо вузлами інтерполювання служать вершини і точки поділу сторін елемента на три рівні частини.

У виразах /9/, /10/ прийнято

$$\kappa = \frac{i-j}{2}; \quad \eta = \frac{i+j}{2}; \quad i_1 = \frac{2i-j}{3}; \quad j_1 = \frac{i+2j}{3}; \quad i_2 = \frac{i-2j}{3}; \quad j_2 = \frac{2i+j}{3}.$$

Наведені поліноми лише формою запису відрізняються від інтерполяцій сепендіального типу і успішно використовуються як для апроксим.

мацій невідомих зміщень, так і основних координат u, z у межах кожного елемента [2].

На основі поліномів /8/-/10/ будуть скінченно-вимірні простори V_m кусково-поліноміальних функцій, які володіють наступною властивістю апроксимації: для кожної функції $v \in W_2^m(\Omega)$ існує $V \in V_m$ така, що

$$\sum_{i=0}^m h^i \|v - V\|_i \leq Ch^{m+1} \|v\|_{m+1}, \quad /11/$$

де $\|\cdot\|_k$ - норма у просторі Соболева $W_2^k(\Omega)$, $C > 0$;

h - максимальний з діаметрів серед всіх елементів розбиття;

m - порядок поліному. Відзначимо, що в межах кожного елемента можна наближено записати

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^N u^i \varphi_i(\alpha, \beta) = \varphi \bar{u} & v &= \sum_{i=1}^N v^i \varphi_i(\alpha, \beta) = \varphi \bar{v} \\ z &= \sum_{i=1}^N z^i \varphi_i(\alpha, \beta) = \varphi \bar{z} & \bar{z} &= \sum_{i=1}^N z^i \varphi_i(\alpha, \beta) = \varphi \bar{z}, \end{aligned} \quad (12)$$

де $u^i, v^i, z^i, \bar{z}^i$ - вузлові значення зміщень і координат;

$\varphi_i = \varphi_i(\alpha, \beta)$ - функції, що визначаються виразами /8/-/10/, $N=4, 8, 12$.

Використовуючи рівняння /5/ та апроксимації /12/ на основі методики [3], дістаємо основні співвідношення методу скінченних елементів. Якщо вузлові значення зміщень на елементі представлені вектором $(\bar{u}^T, \bar{v}^T)^T$, то матриця жорсткості елемента складається з блоків $K_{ij} / i, j = 1, 2 /$ розміру $N \times N$, кожен з яких визначається виразами

$$\begin{aligned} K_{11} &= \iint_{-1-1}^{1-1} \left[2\mu \left(\frac{\partial \varphi^T}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{1}{z^2} \varphi^T \varphi + \frac{\partial \varphi^T}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \lambda \frac{1}{z^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} (z \varphi^T) \frac{\partial}{\partial \alpha} (z \varphi) \right] z \Delta d\alpha d\beta, \\ K_{12} &= \iint_{-1-1}^{1-1} \left[2\mu \frac{\partial \varphi^T}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \lambda \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial \alpha} (z \varphi^T) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] z \Delta d\alpha d\beta = K_{21}^T, \\ K_{22} &= \iint_{-1-1}^{1-1} \left[2\mu \left(\frac{\partial \varphi^T}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi^T}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \lambda \frac{\partial \varphi^T}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] z \Delta d\alpha d\beta, \end{aligned} \quad /13/$$

де похідні по основних координатах обчислюються за формулами:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\partial z}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} = \frac{1}{\Delta} \left(-\frac{\partial z}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \right), \quad \Delta = \frac{\partial z}{\partial \alpha} \frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial z}{\partial \beta} \frac{\partial z}{\partial \alpha}.$$

Компоненти вектора навантаження $R = (R_1, R_2)^T$, що відповідають масовим силам, знаходять як

$$R_1 = \iint_{-1,-1}^1 F_z \psi^T z \Delta d\alpha d\beta, \quad R_2 = \iint_{-1,-1}^1 F_z \psi^T z \Delta d\alpha d\beta. \quad /14/$$

Якщо сторона елемента, скажімо $\beta = 1$, лежить на границі $\partial\Omega_2$,

на яку діє нормальне навантаження інтенсивності f , тоді

$f_z^A = f \cos(n, z)$, $f_z^B = f \sin(n, z)$ і до компонент R_1, R_2 вектора навантаження необхідно додати інтеграли

$$-f \int_{-1}^1 \psi^T \frac{\partial z}{\partial \alpha} z d\alpha, \quad f \int_{-1}^1 \psi^T \frac{\partial z}{\partial \alpha} z d\alpha. \quad /15/$$

Значення коефіцієнтів матриць жорсткості і векторів навантаження обчислюються за квадратурними формулами Гаусса. При цьому, оскільки вид базисних функцій ψ не залежить від геометрії конкретного елемента, один раз і назавжди ці функції разом зі своїми першими похідними табулюються у вузлах квадратурної формули. Відзначимо також, що при інтегруванні у виразах /14/, /15/ доцільно замінити масові сили та поверхневі навантаження інтерполяційними поліномами виду /8/-/10/. Цей прийом дає змогу виконати чисельне інтегрування.

Описаний алгоритм МСЕ реалізований у вигляді комплексу Фортран-програм для ЕОМ, за допомогою якого можна: 1/ автоматично будувати чотирикутні сітки скінченних елементів; 2/ нумерувати вузли таким чином, щоб мінімізувати ширину стрічки матриці системи рівнянь МСЕ; 3/ використовувати апроксимації виду /8/-/10/ і квадратурні формули Гаусса різних порядків; 4/ розв'язувати системи рівнянь МСЕ з використанням зовнішньої пам'яті; 5/ обчислювати головні напруження та їх напрямки у вузлах сітки та вузлах квадратурних формул і т.п.

Наведемо деякі результати чисельних досліджень. Для в'яснення характеру збіжності наближених розв'язків залежно від густини сітки та порядку апроксимації на елементі розв'язували задачу про пружну рівновагу жорстко заземленої нетонкої пластини з радіусом $R=1$ і товщиною $h = 0,3$ під дією постійного тиску інтенсивності P . Коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини $\nu = 0,3$. У таблиці наведено деякі результати розрахунків. У першій графі поміщено розв'язок, одержаний з використанням апроксимації /8/ на сітці з /8x20/ елементів, другій – розв'язок з апроксимацією /9/ на сітці /4x10/ елементів, третій та четвертій – розв'язок з апроксимацією /10/ відповідно на сітках /2x5/ і /4x10/ елементів. Витрати машинного часу для кожного випадку становлять 70, 50, 30, 150 с.

Розрахункові зміщення і напруження в пластинці

(r, z)	$U_z \times 10^3 \frac{E}{P}$	$-U_r \times 10^3 \frac{E}{P}$	$-\phi_z \times 10^3 / \rho$	$-\phi_\theta \times 10^3 / \rho$	$-\phi_z \times 10^3 / \rho$
0.2, 0.3	736	7943	554	580	153
	739	8017	542	564	106
	735	7938	534	556	96
	739	8030	538	561	100
0.6, 0.3	1470	4083	81	311	139
	1488	4128	95	310	111
	1473	4068	98	292	104
	1490	4136	97	308	98

Результати, наведені у таблиці, ілюструють поведінку наближених розв'язків у характерних точках навантаженої поверхні з радіальними координатами $r/R = 0.2, 0.6$. Відзначимо, що у розглядуваних точках точне значення $\phi_z / \rho = -1$. Найбільш точні характеристики розв'язку дістають з використанням апроксимації /10/, але вона вимагає дещо більших затрат машинного часу на реалізацію.

На рис. 1, 2 показано епюру розподілу меридіанних ϕ_1 і кільцевих ϕ_2 напружень у точках зовнішньої поверхні балона кільця 51 ЛЛ. Балон навантажено зовнішнім тиском інтенсивності P .

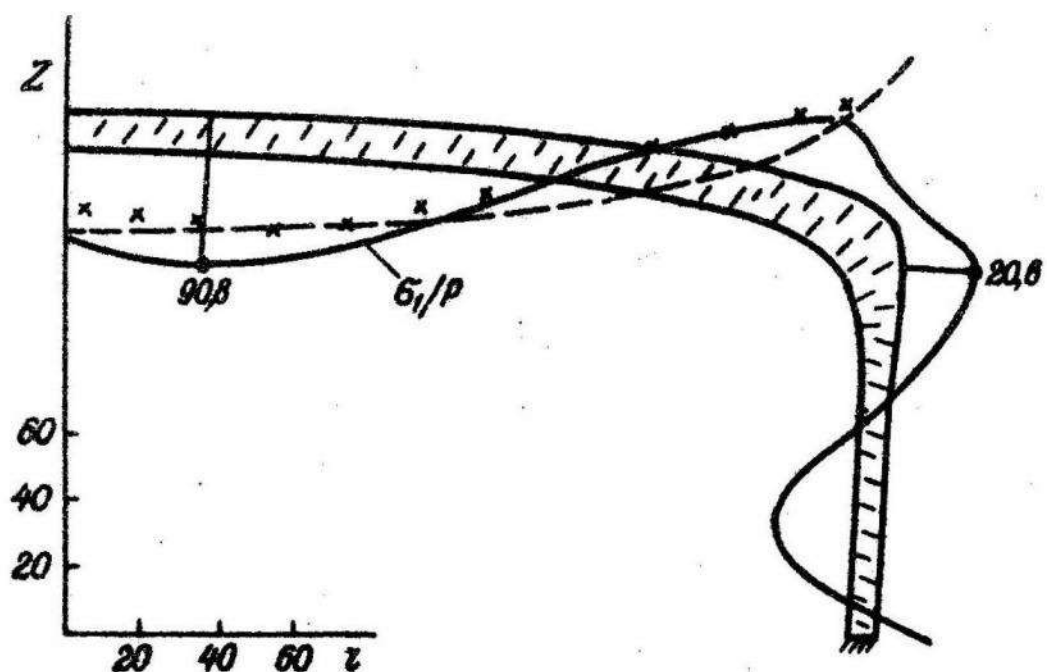


Рис. I.

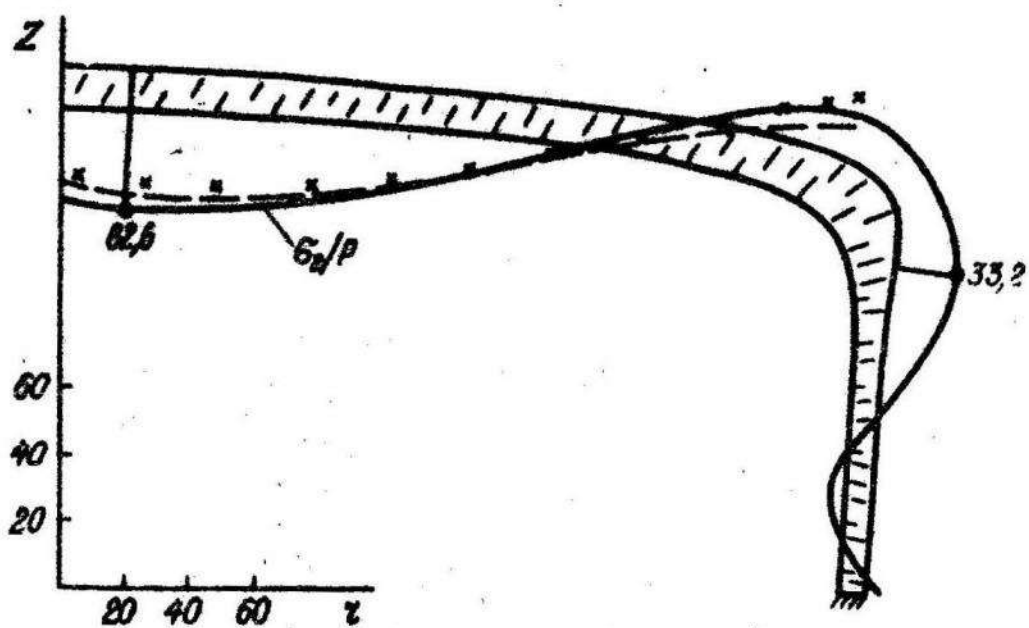


Рис. 2.

$\nu = 0,2$, нижній край оболонки жорстко закріплений. Суцільною лінією показані результати цієї методики, одержані на сітці з двома елементами по товщині і шістнадцятьма по меридіану. Зірочками відзначено дані тензометрування, а пунктирною лінією – результати,

одержані С.С.Григориним в використанні теорії оболонок Кірхгофа-Лява.

Список літератури: 1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. - М.: Мир, 1975. 2. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, 1975. 3. Шинкаренко Г.А., Марчук М.В. Розрахунок тривимірних температурних полів методом скінченних елементів. - Львів: Вища школа, 1979.

Стаття надійшла в редколегію 21.02.81

УДК 518:517.948

М.Я.Бартін, Л.Л.Роман

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ТИПУ НЬЮТОНА-КАНТОРОВИЧА
У НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧАХ МЕХАНІКИ

У праці [2] розглянута задача визначення у циліндричній оболонці з залежними від температури характеристиками матеріалу осесиметричних температурних полів, що забезпечують максимально низький рівень температурних напруг. У праці [3] аналізується така ж задача при умові, що характеристики матеріалу не змінюються при нагріванні. Її розв'язок можна одержати як частинний випадок задачі [2] при $\lambda(x) = 0$. Для розв'язування задачі застосовують метод, який полягає в апроксимації нелінійної системи диференціальних рівнянь високого порядку нелінійною системою алгебраїчних рівнянь, знаходження розв'язку одержаної системи градієнтними методами. При цьому внаслідок апроксимації виникає неусуєнна похибка обчислень.

Більш доцільно використовувати зведення нелінійної крайової задачі до нелінійної системи алгебраїчних рівнянь наступним чином.

Введенням нових змінних

$$\begin{aligned} z_1 &= W_1 - \varepsilon_T dT_1, \quad z_2 = \frac{dW_1}{dx}, \quad z_3 = \frac{d^2W_1}{dx^2}, \quad z_4 = \frac{d}{dx} \left(E_1 \frac{d^2W_1}{dx^2} \right), \quad z_5 = T_1, \\ z_6 &= \lambda_1, \quad z_7 = \frac{d\lambda_1}{dx}, \quad z_8 = \frac{d^2\lambda_1}{dx^2}, \quad z_9 = \frac{d^3\lambda_1}{dx^3} \end{aligned}$$

/1/