Як видно з рис. 3-5 статична втрата стійкості /крива I/ не залежить від зосередженої маси, а лише від параметрів конусності α і неконсервативності γ.

Для циліндричного стержня $(\alpha = 0)$ статична втрата стійкості може наступити тільки при параметрі неконсервативності $\gamma \leq 0,5$, для конічного $(\alpha = 0,2)$ при $\gamma \leq 0,42$, при $\alpha = 0,5$ – при $\gamma \leq 0,3$. Криві 2-7 відповідають флатеру. Флатерні криві залежать як від параметрів конусності, неконсервативності, так і від точки розміщення маси. Точці прикладення маси $x_1 = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1$ відповідають криві 2-7.

Список літератури: I. Г а й в а с ь Б.И. К исследованию малых колебаний и устойчивости многопараметрических стержневых систем. – Рукопись деп. ВИНИТИ 1980, № 2743-80. 2. Л е о н о в М.Я. Основы механики упругого тела.-Фрунзе, Изд-во АН Кирг. ССР, 1963.

Стаття надійшла в редколегію 16.04.81

УДК 533.6.013.42

О.В.Блажиєвська, Г.І.Ткачук

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЗАЄМОДІЇ ОБОЛОНКИ ОБЕРТАННЯ З ОТОЧУЮЧОЮ РІДИНОЮ ПРИ НАЯВНОСТІ ВНУТРІШНЬОГО ДЖЕРЕЛА ХВИЛЬ

Розглянемо тонку пружну оболонку обертання, заповнену й оточену рідкими середовищами, густини та швидкості звуку в яких рівні відповідно ρ_1, c_1 та ρ_2, c_2. Серединна поверхня оболонки утворена обертанням дуги кола навколо хорди. Нехай у внутрішньому середовищі на осі симетрії розміщене джерело збурень, що генерує акустичну хвилю, тиск у якій змінюється за законом

$$p_0 = \frac{p_*}{\ell} g(\tau-\ell)\left[H(\tau-\ell)-H(\tau-\ell-\tau_0)\right], \qquad /1/$$

де p_* – постійна, яка має розмірність тиску; ℓ – безмірна /віднесена до півдовжини R хорди/ відстань від джерела; g – функція, яка визначає профіль хвилі; $\tau = c_1 t R^{-1}$, t – час, який відлічується з моменту включення джерела; $\tau_0 = c_1 t_0 R^{-1}$, t_0 – тривалість збурюючого імпульсу; H – одинична функція Хевісайда.

Падаючий імпульс зумовлює нестаціонарний рух оболонки й акустичних середовищ. Необхідно визначити збурення поля тиску в оточуючому оболонку середовищі.

Припустимо, що рідини нев"язкі та баротропні, а їх рух – безвихровий. В акустичному наближенні такий рух рідин описується хвильовими рівняннями [2]

$$\Delta p_i = \frac{c_1^2}{c_i^2} \frac{\partial^2 p_i}{\partial \tau^2}, \quad (i=1,2), \qquad /2/$$

де p_1, p_2 – збурення тиску відповідно у внутрішньому та зовнішньому середовищах; Δ – оператор Лапласа у безрозмірних координатах.

Для описання руху оболонки використаємо лінійні рівняння теорії типу Тимошенка [3]. Враховуючи осьову симетрію задачі, одержуємо що рух оболонки визначається трьома величинами u_j,
де $u_1 = \bar{u}_1 R^{-1}$, $u_2 = \gamma$, $u_3 = \bar{u}_3 R^{-1}$, $\bar{u}_1$, $\bar{u}_3$ – тангенціальне та нормальне зміщення точок серединної поверхні; γ – кут повороту нормалі у площині меридіана.

Оберемо біофферичну систему координат α_1, α_2, α_3, координатною поверхнею $\alpha_3 = const \equiv \alpha_{30} \leqslant \frac{\pi}{2}$ якої є серединна поверхня оболонки.

Рівняння руху оболонки мають вигляд:

$$L_{kj} u_j = q^* \delta_{k3}, \quad (k=1,2,3), \qquad /3/$$

де
$$L_{11} = \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} - sh^2\alpha_1 - \varkappa^2 \sin^2\alpha_{30} - \nu\left[\frac{1}{A_1} ch\alpha_1 - sh^2\alpha_1\right] - \frac{1}{\beta^2}\left[1 + a^2\left(\frac{ch\alpha_1}{A_1} - sh^2\alpha_1\right)\right]\frac{\partial^2}{\partial \tau^2};$$
$$L_{12} = L_{21} = \varkappa^2 \sin\alpha_{30} - \frac{a^2}{\beta^2}\left[2\sin\alpha_{30} + \frac{1}{A_1}\cos\alpha_{30}\right]\frac{\partial^2}{\partial \tau^2};$$
$$L_{13} = \frac{1}{A_1}\left[\sin\alpha_{30}(1+\nu+\varkappa^2) + \frac{\nu}{A_1}\cos\alpha_{30}\right]\frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1} sh\alpha_1 \cos\alpha_{30};$$

$$L_{22} = a^2\left[\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2} - sh^2\alpha_1 - \nu\left(\frac{1}{A_1}ch\alpha_1 - sh^2\alpha_1\right) - \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right] - \varkappa^2;$$

$$L_{23} = -\frac{\varkappa^2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}; \quad L_{32} = -\frac{\varkappa^2}{\sin\alpha_{30}}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1} - sh\alpha_1\right);$$

$$L_{31} = \frac{1}{A_1}\left[1+\nu+\varkappa^2+\frac{\nu}{A_2}ctg\alpha_{30}\right]\frac{\partial}{\partial\alpha_1} - sh\alpha_1\left[1+\nu+\varkappa^2+\frac{1}{A_2}ctg\alpha_{30}\right];$$

$$L_{33} = \frac{1}{A_1^2}\frac{1}{\sin\alpha_{30}}\left[-\varkappa^2\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2} + \cos^2\alpha_{30}\right] + 2(1+\nu)\left(\sin\alpha_{30} + \frac{1}{A_2}\cos\alpha_{30}\right) +$$
$$+ \frac{1}{\beta^2\sin\alpha_{30}}\left[1+a^2\left(\frac{1}{A_1}ch\alpha_1 - sh^2\alpha_1\right)\right]\frac{\partial^2}{\partial\tau^2};$$

$$A_1 = (ch\alpha_1 + \cos\alpha_{30})^{-1}; \quad A_2 = A_1\sin\alpha_{30}; \quad a^2 = \frac{(2h)^2}{12R^2};$$

$$\varkappa^2 = \frac{1}{2}K'(1-\nu); \quad \beta^2 = E\rho^{-1}c_1^{-2}(1-\nu^2)^{-1}; \quad q^* = \frac{1}{2}(p_0+p_1-p_2)\,R(1-\nu^2)(Eh\sin\alpha_{30})^{-1};$$

$K' = \frac{5}{6}$ – коефіцієнт зсуву; ν , E , ρ – відповідно коефіцієнт Пуассона, модуль Юнга і густина матеріалу оболонки; $2h$ – товщина оболонки; δ_{K3} – символ Кронекера.

Задача полягає в знаходженні розв"язків системи рівнянь /2/ та /3/ при початкових

$$p_i = \frac{\partial p_i}{\partial\tau} = u_j = \frac{\partial u_j}{\partial\tau} = 0 \qquad \text{при} \quad \tau = 0, \qquad /4/$$

граничних

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial p_2}{\partial\alpha_3}\bigg|_{\alpha_3=\alpha_{30}} = -\rho_2 c_1^2\frac{\partial^2 u_3}{\partial\tau^2}; \quad \frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_3}(p_0+p_1)\bigg|_{\alpha_3=\alpha_{30}} = -\rho_1 c_1^2\frac{\partial^2 u_3}{\partial\tau^2} \qquad /5/$$

та умовах випромінювання у безмежно віддаленій точці.

При розв"язуванні поставленої задачі скористаємось інтегральним перетворенням Лапласа по безрозмірному часу τ . Нехай $f^L(\alpha_1,\alpha_3,s)$ – перетворення Лапласа функції $f(\alpha_1,\alpha_3,\tau)$. Функції p_i^L та u_j^L задовольняють рівняння та граничні умови, які отримують з /2/, /3/, /5/ заміною $\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}$ на s^2 .

Розглянемо так звану прифронтову асимптотику розв"язку задачі, коли параметр перетворення Лапласа $s \to \infty$.

Представимо шукані функції у вигляді:

$$\rho_i^L(\alpha_1,\alpha_3,s)=\rho_* g^L(s)\exp[-s\ell_0(\alpha_1)]\ \mathcal{P}_i^L(\alpha_1,\alpha_3,s),$$

$$U_j^L(\alpha_1,s)=\rho_*\rho_1^{-1}c_1^{-2}g^L(s)\exp[-s\ell_0(\alpha_1)\ U_j^L(\alpha_3,s), \qquad /6/$$

де $\ell_0(\alpha_1)=\ell(\alpha_1,\alpha_{30})$.

Для визначення функції $\mathcal{P}_i^L(\alpha_1,\alpha_3,s)$ отримуємо диференціальні рівняння з малим параметром $\varepsilon=\frac{1}{S}$ при старших похідних. Розв"язок цих рівнянь шукаємо методом Вішика та **Люстерника** [I]. Використовуючи перше розщеплення оператора, одержуємо розв"язок, який тотожно дорівнює нулеві. Для визначення функцій типу примежового шару вводимо змінну $\gamma=\frac{1}{\varepsilon}(\alpha_3-\alpha_{30})$. Нехай

$$\mathcal{P}_i^L(\alpha_1,\gamma,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{P}_{in}^L(\alpha_1,\gamma)\varepsilon^n;\quad U_j^L(\alpha_1,\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}U_{jn}^L(\alpha_1)\varepsilon^n \qquad /7/$$

На основі другого розщеплення оператора L_6 отримуємо для визначення функцій $\mathcal{P}_{in}^L\ (n\geq 0)$ звичайні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами, в яких α_1 – параметр. Зокрема, для визначення $\mathcal{P}_{i0}^L(\alpha_1,\gamma)$ маємо рівняння

$$\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial^2\mathcal{P}_{i0}^L}{\partial\gamma^2}-\left[\frac{c_1^2}{c_i^2}-\frac{1}{A_1^2}\left(\frac{\partial\ell_0}{\partial\alpha_1}\right)^2\right]\mathcal{P}_{i0}^L=0 \qquad /8/$$

та граничні умови

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial\mathcal{P}_{10}^L}{\partial\gamma}\bigg|_{\gamma=0}=\frac{1}{A_1}\frac{1}{\ell_0}\frac{\partial\ell}{\partial\alpha_3}\bigg|_{\alpha_3=\alpha_{30}}-U_{31}^L,$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial\mathcal{P}_{20}^L}{\partial\gamma}\bigg|_{\gamma=0}=-\frac{\rho_2}{\rho_1}U_{31}^L;\quad \lim_{\gamma\to\infty}\mathcal{P}_{20}^L=0. \qquad /9/$$

Нехай джерело збурень знаходиться на осі обертання і віддалене від початку координат на $bR\ (0\leq b<1)$. Добре видно, що при $C_1\geq C_2$ маємо

$$K_i^2=A_1^2\left[\frac{c_1^2}{c_i^2}-\frac{1}{A_1^2}\left(\frac{\partial\ell_0}{\partial\alpha_1}\right)^2\right]>0.$$

Розв"язки рівнянь /8/ типу функцій примежового шару, які задовольняють умови /9/, мають вигляд

$$\mathcal{P}_{i0}^L=\mathcal{B}_{i0}(\alpha_1)\exp\left[(-1)^{i+1}|K_i|\gamma\right], \qquad /10/$$

де $\mathcal{B}_{20}(\alpha_1)=\frac{\rho_2}{\rho}\frac{A_1}{|K|}U_{31}^L;\quad \mathcal{B}_{10}(\alpha_1)=\frac{1}{\ell_0}-\left|\frac{K_2}{K_1}\right|\frac{\rho_1}{\rho}\mathcal{B}_{20}(\alpha_1).$

Рівняння руху оболонки /3/ розглядаємо як узагальнені граничні умови для рівнянь /2/. Після підстановки у рівняння /3/ співвідношень /6/, /7/, /10/ та першого розщеплення цих рівнянь за методом Вішіка та Люстерника отримуємо

$$U_{31}^{L}(\alpha_1)\equiv 0 \Rightarrow \mathcal{B}_{20}(\alpha_1)=0;\quad \mathcal{B}_{10}(\alpha_1)=\frac{1}{\ell_0};$$

$$U_{32}^{L}(\alpha_1)=\frac{R}{h}\frac{\rho_1}{\rho}\frac{1}{\ell_0}\left[1+a^2(1+ch\alpha_1\cos\alpha_{30})-\varkappa^2\beta^2\left(\frac{c_1^2}{c_2^2}-\frac{K_2^2}{A_1^2}\right)\right]^{-1}. \qquad /11/$$

Таким чином,

$$\mathcal{P}_{20}^{L}\equiv 0;\quad \mathcal{P}_{21}^{L}=\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{A_1}{|K_2|}U_{32}^{L}(\alpha_1)\exp[-|K_2|\gamma]. \qquad /12/$$

Формула /12/ визначає одночленне асимптотичне наближення трансформанти Лапласа від шуканого тиску в оточуючому оболонку середовищі у змінних (α_1,γ). У вихідних змінних α_1,α_3 розв"язок визначений лише у вузькій смузі поблизу поверхні оболонки. Тому на основі /12/ визначаємо p_2^L на поверхні оболонки, а значення p_2^L в усіх інших точках середовища знаходимо з допомогою інтегралу Кірхгофа

$$p_2^L(\alpha_1,\alpha_3,s)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\sigma}\left\{p_2^L\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{L}\exp\left[-s\frac{c_1}{c_2}L\right]\right)-\frac{1}{L}\exp\left[-s\frac{c_1}{c_2}L\right]\frac{\partial p_2^L}{\partial n}\right\}A_1(\alpha_{10})A_2(\alpha_{10})d\alpha_{10}d\alpha_{20}, \qquad /13/$$

де σ – поверхня оболонки; n – її зовнішня безрозмірна нормаль; L – безрозмірна відстань від точки спостереження $(\alpha_1, 0, \alpha_3)$ до біжучої точки на поверхні інтегрування $(\alpha_{10},\alpha_{20},\alpha_{30})$. Оскільки шукаємо асимптотичний розв"язок, то інтеграл /13/ обчислюємо методом Лапласа [4].

В одночленному асимптотичному наближенні інтеграл /13/ визначається наступною формулою:

$$p_2^L(\alpha_1,\alpha_3,s)=\frac{1}{s}p_* g^L(s)\exp\left[-s\left(\frac{c_1}{c_2}L_*+\ell_*\right)\right]\frac{R}{h}\frac{\rho_2}{\rho}F(\alpha_1,\alpha_3), \qquad /14/$$

де $L_*=L\big|_{\alpha_{10}=\beta,\,\alpha_{20}=0}$; $\ell_*=\ell_0(\beta)$;

$$F(\alpha_1,\alpha_3)=\frac{1}{2}\frac{h}{R}\frac{\rho}{\rho}U_{32}^{L}(\beta)\frac{1}{L_*}A_1(\beta)A_2(\beta)\left[1-\frac{c_1}{c_2}\frac{1}{|K_2|}\frac{\partial L_*}{\partial\alpha_{30}}\right]\times$$
$$\left[\left\{\frac{\partial^2}{\partial\alpha_{10}^2}\left(\frac{c_1}{c_2}L+\ell_0\right)\frac{c_1}{c_2}\frac{\partial^2 L}{\partial\alpha_{20}^2}\right\}_{\alpha_{10}=\beta,\,\alpha_{20}=0}\right]^{-1/2}.$$

Координата β критичної точки є коренем рівняння

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha_{10}}\left[\frac{c_1}{c_2}L+\ell_0\right]\right\}_{\alpha_{10}=\beta,\ \alpha_{20}=0}=0.$$

На основі теореми обернення перетворення Лапласа знаходимо

$$\frac{p_2}{p_*}=\frac{R}{h}\frac{\rho_2}{\rho}F(\alpha_1,\alpha_3)H(\tau_1)\int_0^{\tau_1}g(x)\left[H(x)-H(x-\tau_1)\right]dx;\ \tau_1=\tau-\frac{c_1}{c_2}L_*-\ell_*. \qquad /I5/$$

У частковому випадку сферичної оболонки, коли $\alpha_{30}=\frac{\pi}{2}$, і при умові $c_1=c_2$ одержуємо

$$\frac{p_2}{p_*}=\frac{R}{h}\frac{\rho_2}{\rho}\frac{1}{L_*+\ell_*}\frac{1}{\cos\psi}\left[1+a^2-\varkappa^2\beta^2\sin^2\psi\right]^{-1}\int_0^{\tau_1}g(x)\left[H(x)-H(x-\tau_1)\right]dx. \qquad /I6/$$

Тут ψ визначається з рівняння

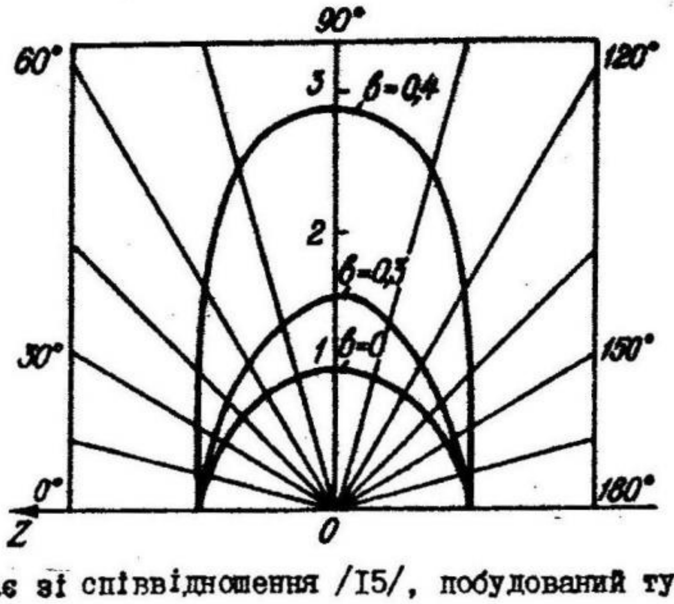
$$\sin\psi=br\sin\theta\,(L_*+\ell_*)^{-1};$$

r,θ – сферичні координати з початком у центрі сфери,

$$L_*+\ell_*=\sqrt{r^2+b^2-2br\cos\theta}.$$

Відзначимо, що при певних значеннях b, $\varkappa\beta$ функція U_{32}^{ι} приймає безмежні значення. У цьому випадку до одержаного тут розв"язку /II/ слід додати функцію внутрішнього примежового шару. Побудова цієї функції вимагає додаткового аналізу.

Рис.I.



Як випливає зі співвідношення /I5/, побудований тут розв"язок визначає тиск у хвилі, яка приходить у точку спостереження в момент $\tau=\frac{c_1}{c_2}L_*+\ell_*$. При $c_1=c_2$ час приходу хвилі у точку спостереження рівний відстані до джерела збурень. Врахування функції внутрішнього примежового шару дає додатковий доданок у формулі для p_2, який можна інтерпретувати як тиск у периферійній хвилі.

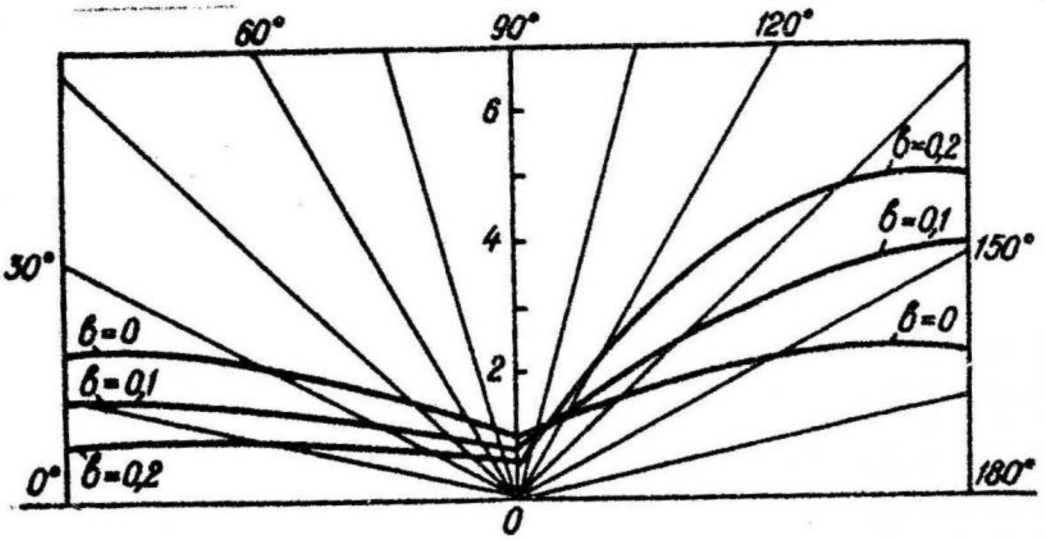


Рис.2.

Ми визначаємо лише тиск у заломленій хвилі. На рис. I, 2 зображена функція $F_1(\alpha_1,\alpha_3)(L_*+\ell_*)$ відповідно для сферичної $\left(\alpha_{30}=\frac{\pi}{2}\right)$ і веретеноподібної оболонки $\left(\alpha_{30}=\frac{\pi}{3}\right)$ при $C_1=C_2$, $\varkappa\beta=1,97$ та декількох значеннях параметра $б$. Точка спостереження знаходиться на сфері, центр якої збігається з джерелом, а радіус дорівнює $10R$.

Список літератури: I. В и ш и к М.И., Л ю с т е р н и к Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.-Усп. мат. наук,I957,I2,№5. 2.М е т с а в э э р Я.А., В е к с л е р Н.Д., С т у л о в А.С. Дифракция акустических импульсов на упругих телах. - М.: Наука, I979. 3. П е л е х Б.Л. Обобщенная теория оболочек. - Львов: Вища школа, I978. 4. Ф е д о р ю к М.В. Метод перевала. - М.: Наука, I977.

Стаття надійшла в редколегію 07.04.8I