

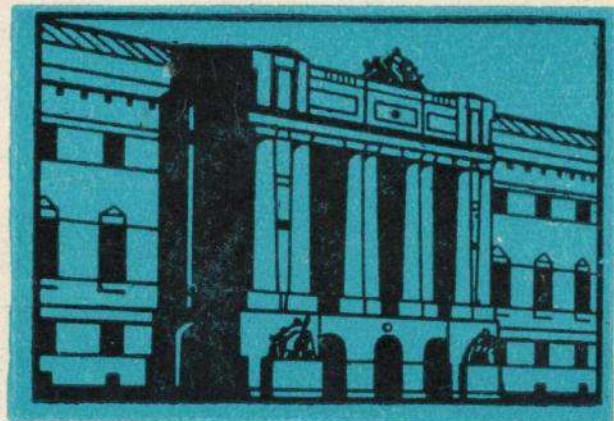
ПРИКЛАДНІ
ЗАДАЧІ
МАТЕМАТИКИ
І МЕХАНІКИ

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

В И П У С К

19

1982



МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК

ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

СЕРІЯ

МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК 19

ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ

Виходить з 1965 р.

ЛЬВІВ

ВИДАВНИЦТВО ПРИ ЛЬВІВСЬКОМУ

ДЕРЖАВНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

ВИДАВНИЧОГО ОБ'ЄДНАННЯ «ВИЩА ШКОЛА»

1982

ББК 22.19

518.

Л 89

УДК 518

Прикладные задачи математики и механики. Вестн. Львов. ун-та. Серия
мех.-мат. вып. 19. - Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те,
1982, 84 с. /на укр. яз./.

В Вестнике помещены статьи по численным методам решения уравнений
математической физики и задач оптимизации, статические и динамиче-
ские задачи механики сплошной среды.

Для научных работников, преподавателей, аспирантов и студен-
тов старших курсов. Библиогр. списки в конце статей.

Редакційна колегія: проф., д-р техн. наук
Д.В. Г р и л і ц ь к и й /відп. редактор/, доц., канд. фіз.-мат.
наук Ю.М. Щ е р б и н а /відп. секретар/, доц., канд. фіз.-мат.
наук М.Я. Б а р т і ш , доц., канд. фіз.-мат. наук А.І. К а р л а ш ,
проф., д-р техн. наук Н.П. Ф л е й ш м а н .

Адреса редакційної колегії:

Львів; Університетська, 1, кафедра прикладної математики

Редакція науково-технічної літератури

Зав. редакцією М.П. П а р ц е й

В20204-024
М225/04/-82

1702050000 Замовно

С Вydawnictwo ob'sługiwani
"Вища школа", 1982

П.В.Людкевич, А.Т.Дудикевич

РІЗНИЦЕВІ АПРОКСИМАЦІЇ ПІДВИЩЕНОГО ПОРЯДКУ

ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА В ПРОСТОРІ

Різницеві схеми підвищеного порядку точності для рівняння Пуассона розглядалися у працях [4, 5] для довільного ρ , де ρ - розмірність задачі. Для двовірної області побудована різницева апроксимація рівняння Пуассона для прямокутної нерівномірної сітки з похибкою $O(h^{\rho})$ [1].

Ми задачу Діріхле для рівняння Пуассона апроксимуємо різницевою схемою четвертого порядку точності на паралелепіпедальних сітках, а систему різницевих рівнянь розв'язуємо методом верхньої релаксації по лініях.

У прямокутному паралелепіпеді $\bar{G} = \{x = (x_1, x_2, x_3) : 0 \leq x_\alpha \leq \ell_\alpha, \alpha = 1, 2, 3\}$ з границею Γ шукаємо розв'язок задачі Діріхле для рівняння Пуассона

$$\Delta U = \sum_{\alpha=1}^3 L_\alpha U = -f(x), \quad \text{для } x \in G, \quad /1/$$

$$U|_\Gamma = \varphi(x), \quad /2/$$

де $L_\alpha U = \partial^2 U / \partial x_\alpha^2$, $\alpha = 1, 2, 3$, $f(x)$ і $\varphi(x)$ - задані неперервні функції $\bar{G}$ і Γ відповідно; $G = \bar{G} / \Gamma$.

Введемо в $\bar{G}$ сітку $\bar{\omega}_h$, рівномірну по кожному напрямку x_α з кроком h_α , $\omega_h = \{(ih_1, jh_2, kh_3), i, j, k = 0, N_\alpha\}$, $h_\alpha = \ell_\alpha / N_\alpha, \alpha = 1, 2, 3$, границею γ та множиною внутрішніх вузлів $\omega_h = \bar{\omega}_h / \gamma$.

Розглянемо відповідну різницеву задачу Діріхле

$$\lambda \bar{U} = -g(x), \quad x \in \omega_h,$$

/3/

$$U/\gamma = \varphi(x),$$

/4/

де $g(x) = f(x) + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^3 h_\alpha^2 \lambda_\alpha f$, $\lambda_\alpha f = f \bar{x}_\alpha x_\alpha$.

Оператор λ визначається на двадцятисемиточковому шаблоні, який складається з вузлів $(x_1 + ih_1, x_2 + jh_2, x_3 + kh_3)$, $i, j, k = -1, 0, 1$ і записується на рівномірній сітці в індексній формі так:

$$\begin{aligned} (\lambda \bar{U})_{i,j,k} = & \frac{1}{60} \{ 2(20\alpha - 5\beta - 5\gamma + 4)(U_{i+1,j,k} + U_{i-1,j,k}) + \\ & + 2(20\beta - 5\alpha - 5\gamma + 4)(U_{i,j+1,k} + U_{i,j-1,k}) + 2(20\gamma - 5\alpha - 5\beta + \\ & + 4)(U_{i,j,k+1} + U_{i,j,k-1}) + [5(\beta + \alpha) - 4](U_{i+1,j+1,k} + U_{i-1,j+1,k} + \\ & + U_{i+1,j-1,k} + U_{i-1,j-1,k}) + [5(\alpha + \gamma) - 4](U_{i+1,j,k+1} + U_{i-1,j,k+1} + \\ & + U_{i+1,j,k-1} + U_{i-1,j,k-1}) + [5(\beta + \gamma) - 4](U_{i,j+1,k+1} + U_{i,j+1,k-1} + U_{i,j-1,k+1} + \\ & + U_{i,j-1,k-1}) + 2(U_{i+1,j+1,k+1} + U_{i+1,j+1,k-1} + U_{i-1,j+1,k+1} + \\ & + U_{i+1,j-1,k+1} + U_{i-1,j-1,k+1} + U_{i+1,j-1,k-1} + U_{i-1,j-1,k-1} + \\ & + U_{i,j+1,k+1} + U_{i,j+1,k-1} + U_{i,j-1,k+1} + U_{i,j-1,k-1}) - 16[1 + 5(\alpha + \beta + \gamma)]U_{i,j,k} \} = g_{i,j,k}. \end{aligned}$$

/5/

де $\alpha = \frac{1}{h_1^2}$; $\beta = \frac{1}{h_2^2}$; $\gamma = \frac{1}{h_3^2}$.

На вибраній сітці різницєва апроксимація /5/ має порядок $O(h^4)$.
На кубічній сітці ця апроксимація переходить у відому апроксимацію [3] з похибкою $O(h^6)$.

Систему різницевих рівнянь /3/-/4/ розв'язуємо ітераційним методом верхньої релаксації по лініях, згідно з яким проміжкові величини $V_{i,j,k}^{(n+1/2)}$ визначаємо методом прогонки з рівняння

$$\begin{aligned} aV_{i+1,j,k}^{(n+1/2)} + bV_{i,j,k}^{(n+1/2)} + aV_{i-1,j,k}^{(n+1/2)} = & - \{ 2(20\beta - 5\alpha - \\ & - 5\gamma + 4)(V_{i+1,k}^{(n)} + V_{i,j-1,k}^{(n+1)}) + 2(20\gamma - 5\alpha - 5\beta + 4)(V_{i,j,k+1}^{(n)} + \\ & + V_{i,j,k-1}^{(n+1)}) + [5(\beta + \alpha) - 4](V_{i+1,j+1,k}^{(n)} + V_{i-1,j+1,k}^{(n)} + V_{i+1,j-1,k}^{(n+1)} + \\ & + V_{i-1,j-1,k}^{(n+1)}) + [5(\alpha + \gamma) - 4](V_{i+1,j,k+1}^{(n)} + V_{i+1,j,k-1}^{(n+1)} + V_{i-1,j,k+1}^{(n)} + \\ & + V_{i-1,j,k-1}^{(n+1)}) + [5(\beta + \gamma) - 4](V_{i,j+1,k+1}^{(n)} + V_{i,j+1,k-1}^{(n+1)} + V_{i,j-1,k+1}^{(n)} + \\ & + V_{i,j-1,k-1}^{(n+1)}) + 2(V_{i+1,j+1,k+1}^{(n)} + V_{i+1,j+1,k-1}^{(n+1)} + V_{i-1,j+1,k+1}^{(n)} + \\ & + V_{i+1,j-1,k+1}^{(n)} + V_{i-1,j-1,k+1}^{(n)} + V_{i+1,j-1,k-1}^{(n+1)} + V_{i-1,j-1,k-1}^{(n+1)} + \\ & + V_{i-1,j-1,k-1}^{(n+1)}) + 60g_{i,j,k} \}, \end{aligned} \quad 16/$$

$$V_{i,j,k}^{(n+1)} = \omega_{opt} V_{i,j,k}^{(n+1/2)} + (1 - \omega_{opt}) V_{i,j,k}^{(n)},$$

де $a = 2(20\alpha - 5\beta - 5\gamma + 4)$; $b = 16[1 + 5(\alpha + \beta + \gamma)]$,
а ω_{opt} визначається за відомою методикою [2].

Запропонована різницева схема /5/ придатна для розрахунків просторових електростатичних полів електронно-оптичних систем методом сіток. Її апробація засвідчила, що вона ефективніша порівняно зі схемами другого порядку точності.

Список літератури: І. Г о л у б ц о в Б.И., И л ь и н В.П. О разностной аппроксимации уравнения Пуассона на неравномерных прямоугольных сетках. - Сибирский математический журнал, 1978, 19, № 3. 2. Д у д ы к е в и ч А.Т., Л ю д к е в и ч И.В. Численное решение трехмерной задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом сеток. - Вычислительная и прикладная математика, 1977, вып. 32. 3. М и к е - л а д з е Ш.Е. О численном решении дифференциальных уравнений Лапласа и Пуассона. - Известия вузов АН СССР, сер. мат., 1938, № 2. 4. Н и к о л а е в Е.С., С а м а р с к и й А.А. Методы численного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона любого числа измерений. - ДАН СССР, 1972, 206, № 4. 5. С у л х а н и ш в и л и Г.И. О равномерной сходимости разностной схемы Самарского-Николаева. - Сообщения АН Груз. ССР, 1974, 73, № 3.

Стаття надійшла в редколегію 25.02.81

УДК 517.944:947

Марія Д.Мартиненко, Михайло Д.Мартиненко
ПРО ОДНУ ГРАНИЧНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ НЕСТАНДАРТНОГО
ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ

В області $D = \{0 \leq x < a, 0 < y < b\}$ шукаємо класичний розв'язок рівняння

$$M(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x, y), \quad /1/$$

яке задовольняє на межі $\mathcal{T}$ області D умовам

$$\begin{aligned} u|_{\mathcal{T}} &= \varphi, \\ \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} &= \varphi_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=b} = \varphi_2(x), \end{aligned} \quad /2/$$

де $\mathcal{T}: \{x=0, 0 \leq y \leq b; x=a, 0 \leq y \leq b; y=0, 0 \leq x \leq a; y=b, 0 \leq x \leq a\}$,
 φ, ψ, ψ_2 - неперервні функції своїх аргументів. Єдиність розв'язку задачі /1/-/2/ випливає з інтегральної тотожності

$$\iint_D \left\{ u M[v] + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\} dS =$$

$$= \int_{\mathcal{T}} \left\{ u \left[\frac{\partial v}{\partial x} \cos(nx) - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \cos(ny) \right] - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y^2} \cos(ny) \right\} d\ell, \quad /3/$$

де n - зовнішня нормаль до $\mathcal{T}$. Справді, припускаючи існування двох розв'язків u_1 та u_2 задачі /1/-/2/ та позначаючи їх різницю через $v = u_1 - u_2$, одержуємо із /3/

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)^2 \right] dS = 0.$$

Звідки $v = C_1 + C_2 y$ в області D / $C_i = \text{const}$, $i = 1; 2$.

Але

$$v|_{\mathcal{T}} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0.$$

Тому $C_2 = 0$, $C_1 = 0$ і $v \equiv 0$ в D .

Для того, щоб одержати зображення розв'язку задачі /1/-/2/, побудуємо розв'язок такої задачі:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \delta(x-x_0, y-y_0), \quad /1'/$$

$$u|_{\mathcal{T}} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0. \quad /2'/$$

Позначимо розв'язок задачі /1'/-/2'/ через $G(x-x_0, y-y_0)$.

Шукаємо його у вигляді

$$G(x-x_0, y-y_0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kn} X_k(x) Y_n(y), \quad /4/$$

де

$$X_k = \sin \frac{\kappa \pi}{a} x$$

$$Y_n = - \frac{\text{ch } \tau_n - \cos \tau_n}{\text{sh } \tau_n - \sin \tau_n} \left(\text{sh } \frac{\tau_n y}{b} - \sin \frac{\tau_n y}{b} \right) + \text{ch } \frac{\tau_n y}{b} - \cos \frac{\tau_n y}{b}, \quad /5/$$

причому τ_n - корені рівняння

$$\text{ch } \tau \cos \tau = 1. \quad /6/$$

Очевидно, що при такому виборі z_n ряд /4/ задовольняє умовам /2'/.

Підставляючи /4/ в /1'/, одержуємо для a_{kn} наступний вираз

$$a_{kn} = \frac{\sin \frac{\kappa \pi}{a} x_0 \left[-(ch z_n - \cos z_n) \left(sh \frac{z_n y_0}{b} - \sin \frac{z_n y_0}{b} \right) + \left(ch \frac{z_n y_0}{b} - \cos \frac{z_n y_0}{b} \right) x \right]}{\frac{ab}{8} \left[\left(\frac{\kappa \pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{z_n}{b} \right)^4 \right] \left[-(ch z_n - \cos z_n) (sh z_n + \sin z_n) + (sh z_n - \sin z_n) (sh z_n - \sin z_n) + (ch z_n + \cos z_n) (sh z_n - \sin z_n) \right]^2}.$$

Із інтегральної тотожності

$$\iint_D [u M(v) - v M(u)] dS = \int_{\Gamma} \left\{ u \left[\frac{\partial v}{\partial x} \cos(n, x) - \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \cos(n, y) \right] - v \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \cos(n, y) \right] - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \cos(n, y) \right\} dl$$

випливає, що шуканий розв'язок задачі /1/-/2/ можна зобразити у вигляді:

$$u(x_0, y_0) = \iint_D G(x-x_0, y-y_0) f(x, y) dS + \\ + \int_{\Gamma} \left\{ \varphi(x, y) \left[\frac{\partial G(x-x_0, y-y_0)}{\partial x} \cos(n, x) - \frac{\partial^3 G(x-x_0, y-y_0)}{\partial y^3} \cos(n, y) \right] + \right. \\ \left. + \int_0^a \left[\varphi_1(x) \frac{\partial^2 G(x-x_0, y-y_0)}{\partial y^2} \right]_{y=0} - \varphi_2(x) \frac{\partial^2 G(x-x_0, y-y_0)}{\partial y^2} \right\} dx / 7 /$$

Зовсім аналогічно можна розглядати й інші граничні задачі для рівняння /1/ в області D . Формула /7/ дає змогу дослідити поведінку розв'язку задачі /1/-/2/ в кутах прямокутника D .

На закінчення відзначимо, що коректно поставлені задачі для рівняння /1/ у довільній області, що обмежена кривою Ляпунова, пов'язані в загальному випадку з неоднаковою кількістю граничних умов на різних ділянках границі.

Список літератури: 1. Б а б и ч В.М., К а п и л е в и ч М.Б., М и х л и н С.Г. и др. Линейные уравнения математической физики. - М.: Наука, 1964. 2. В л а д и м и р о в В.С. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1976. 3. П о л о ж и й Г.Н. Уравнения математической физики. - М.: Высшая школа, 1964.

Стаття надійшла в редколегію 02.10.80

Марія Д. Мартиненко, Михайло Д. Мартиненко,

Л.Ф. Бойко

ЗАДАЧА БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ РІВНЯННЯ

ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Розглядаємо задачу про визначення обмеженого класичного розв'язку рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) \quad /1/$$

в області $\Pi = \{]-\infty, T] \times D \}$, де D - область у E_3 , обмежена поверхнею Ляпунова S , що задовольняє на S умову Діріхле

$$u|_S = f(x, t), \quad x = (x_1, x_2, x_3); \quad /2/$$

f - неперервна функція. Такі задачі виникають при вивченні процесів поширення тепла у час, достатньо віддалений від початкового, коли початкові умови практично не впливають на фізичний процес у момент спостереження. Перший строгий аналіз постановки та розв'язність таких задач зробив А.М.Тихонов у 1935 р. [3] для одновимірного рівняння теплопровідності за допомогою методу інтегральних зображень. Ми аналізуємо один з варіантів цього методу.

Розв'язок сформульованої задачі шукаємо у вигляді

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^t \int_S a^2 \frac{\partial}{\partial n(y)} \left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \right] \exp \left\{ -\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} \mu(y, \tau) dy d\tau, \quad /3/$$

де $|x-y|^2 = \sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2$; $\mu(y, \tau)$ - невідома функція; $\vec{n}(y)$ - внутрішня нормаль до S у точці y . З граничних умов та формул стріба [2] дістаємо інтегральне рівняння типу Вольтерра другого роду для визначення $\mu(y, \tau)$

$$\frac{1}{2} \mu(x, t) + \int_{-\infty}^t \int_S a^2 \frac{\partial}{\partial n(y)} \left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \right] \exp \left\{ -\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} \mu(y, \tau) dy d\tau = f(x, t). \quad /4/$$

Отже, розглядувана задача зведена до інтегрального рівняння /4/, з існування розв'язку якого випливатиме розв'язаність задачі /I/-/2/.

Ряд послідовних наближень для /4/ збіжний, коли

$$\int_{-\infty}^t \int_S a^2 \left| \frac{\partial}{\partial n(y)} \frac{\exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^3} \right| d_y S d\tau < 1. \quad /5/$$

Оскільки

$$\int_{-\infty}^t \left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \right]^3 \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} d\tau = \frac{1}{4a^2\pi|x-y|},$$

то умова /5/ набуває вигляду

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \left| \frac{\partial}{\partial n(y)} \frac{1}{|x-y|} \right| d_y S < 1,$$

або

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{|\cos\varphi|}{|x-y|^2} d_y S < 1, \quad /6/$$

де φ - кут між вектором $\vec{x}-\vec{y}$ та $\vec{n}(y)$.

З означення поверхні Ляпунова випливає

$$|\cos\varphi| < A|x-y|,$$

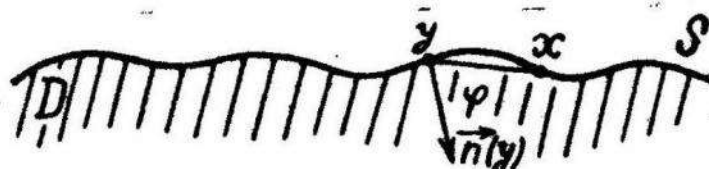
тому рівняння /4/, а з ним і задача /I/-/2/ має розв'язок, коли виконується умова

$$\frac{A}{4\pi} \int_S \frac{d_y S}{|x-y|^{2-\lambda}} < 1. \quad /7/$$

Константу A можна записати явно [1].

Умова /7/ виконується, коли функція f - фінітна, S - її носій є частиною площини $x_3 = 0$, тобто D - напіпростір $x_3 < 0$. У цьому випадку $A = 0$ і задача /I/-/2/ розв'язна для будь-якої області S . Зауважимо, що в цьому випадку рівняння /4/ має явний розв'язок $\mu = 2f$, а тому з формули /3/ випливає явний розв'язок вихідної задачі /I/-/2/.

Якщо $\varphi = \frac{\pi}{2} \pm \chi$, де χ мало змінюється, то $|\cos \varphi| = |\sin \chi| < \varepsilon$ і умова /6/ також виконується при малому χ . Отже, задача /1/-/2/ має розв'язок у випадку, коли D - напівне-окінченна область у E_3 , обмежена нескінченною поверхнею з слабо змінною кривиною /див. рисунок/, f - неперервна функція з компактним носієм S .



Разом з тим слід відзначити, що умова /6/ чи /7/ досить жорстка, вона не охоплює всіх випадків розв'язності сформульованої задачі без початкових умов.

Список літератури: І. В л а д и м и р о в В.С. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1976. 2. П о л о ж и й Г.Н. Уравнения математической физики. - М.: Высшая школа, 1964. 3. Т и х о н о в А.Н. Теоремы единственности для уравнения теплопроводности. - Математический сборник, 1935, 42, № 2.

Стаття надійшла в редколегію 28.10.80

УДК 518:517.948

М.Я.Бартіш, С.М.Шахно

ПРО ДЕЯКІ МОДИФІКАЦІЇ МЕТОДУ НЬЮТОНА

І ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ГАЗОДИНАМІКИ

У праці [1] досліджено метод Ньютона для розв'язування систем нелінійних рівнянь

$$P(x) = 0, \quad /1/$$

де P - векторна функція векторного аргументу x за умови, що всі необхідні обчислення виконуються точно. Проте при реалізації на ЕОМ ми оперуємо числами з обмеженою кількістю розрядів. Тому замість матриці похідних $P'(x_n)$ і вектора $P(x_n)$ отримуємо децю змінені $P'(x_n) \cdot U_n$ і $P(x_n) \cdot \tilde{U}_n$, де $\{U_n\}$ - послідов-

ність матриць розміром $n \times n$; $\tilde{v}_n$ - послідовність векторів розмірності n таких, що $\|v_n\|$ і $\|\tilde{v}_n\|$ - достатньо малі.

Таким чином, фактично реалізовується процес

$$x_{n+1} = x_n - [P'(x_n) + v_n]^{-1} [P(x_n) + \tilde{v}_n], n=0,1,2,\dots \quad /2/$$

Достатні умови збіжності послідовності наближень $\{x_n\}$, отриманих за формулою /2/ до розв'язку x_* рівняння /1/, дає наступна теорема.

Т е о р е м а . Нехай виконуються умови: 1/ існує оператор $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ такий, що $\|\Gamma_0\| \leq B_0$;

2/ $\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leq \eta$;

3/ в області $\Omega_0 = \{x: \|x - x_0\| \leq \frac{\eta_0(1+\tilde{x}_0)}{(1-x_0)(1-\ell_0 h_0)}\}$ $\|P''(x)\| \leq M$;

4/ $\|v_n\| \leq C\eta$, $\|\tilde{v}_n\| \leq \tilde{C}\eta^2$;

5/ $x_0 = B_0 C\eta < 1$, $x_0 + h_0 + \tilde{x}_0 h_0 < 1$;

$h_0 = B_0 M\eta$, $\tilde{x}_0 = B_0 \tilde{C}\eta$;

6/ $S_0 = \ell_0 h_0 \frac{1-x_0}{1-(x_0+h_0+\tilde{x}_0 h_0)} < 1$,

де

$$\ell_0 = \frac{h_0(1-\tilde{x}_0)^2 + x_0(1+\tilde{x}_0)(1-x_0) + \tilde{x}_0(1-x_0)^2}{[1-(x_0+h_0+\tilde{x}_0 h_0)](1-x_0)h_0}.$$

Тоді рівняння /1/ має в області Ω_0 розв'язок x_* , до якого збігається послідовність $\{x_n\}$, отримана за формулою /2/, причому

$$\|x_n - x_*\| \leq S_0^{2^n} \left[\frac{1-(x_0+h_0+\tilde{x}_0 h_0)}{1-x_0} \right]^{2^n} \frac{1+\tilde{x}_0}{(1-x_0)(1-\ell_0 h_0)} \eta_0. \quad /3/$$

Доведення здійснюється за схемою Л.В. Канторовича.

З теореми випливає, що коли похибки невеликі, а саме: послідовності $\{v_n\}$ і $\{\tilde{v}_n\}$ задовольняють умову 4/ теореми, то збіжність процесу не порушиться. Зауважимо, що зберігається навіть порядок збіжності. З умови 4/ видно, що компоненти матриці $P'(x_n)$ можна обчислювати з точністю, на порядок меншою, ніж при обчисленні компонент вектора $P(x_n)$.

Використаємо цю ідею при розв'язуванні різницевих рівнянь газової динаміки ітераційним методом Ньютона. Розглядаємо задачу про поршень, який всувається в газ з постійною швидкістю. Для наскрізного розрахунку в різницеву схему вводимо псевдов'язкість.

Як відомо [2], сіткові функції різко змінюються лише близько від фронту ударної хвилі, залишаючись майже постійними на інших точках масової сітки. Тому доцільно, очевидно, обчислювати на кожній ітерації коефіцієнти A_i, B_i, C_i триточкового рівняння, яке виникає при застосуванні методу Ньютона до різницевої схеми газової динаміки в ізотермічному випадку [2], лише в області різкої зміни сіткових функцій. Кількість точок, в яких необхідно обчислювати всі коефіцієнти, залежить від кроку по часу τ .

Ми обчислювали всі коефіцієнти поки не сформувався фронт ударної хвилі і на першій ітерації кожного шару по часу. Далі A_i, B_i, C_i знаходили лише у точках, близьких до фронту ударної хвилі, центр якої визначали за максимумом псевдов'язкості. Отримано експериментально, що для $\tau = 0,01$ не потрібно зовсім, для $\tau = 0,05$ достатньо однієї, для $\tau = 0,1$ - чотирьох, для $\tau = 0,2$ - семи точок по обидві сторони від центру ударної хвилі, щоб кількість ітерацій порівняно з обчисленнями по всій сітці не збільшувалася. Щоб уникнути випадку розбіжності процесу Ньютона, використовували варіант методу з регулюванням кроку α_k .

Для розв'язування цієї задачі застосували також модифікацію методу Ньютона, в якій коефіцієнти A_i, B_i, C_i обчислювали лише через кілька ітерацій. Отримано, що кількість ітерацій на шарі також не зростає, якщо ці коефіцієнти знаходити через 1-2 ітерації.

Отже, в обох розглянутих вище модифікаціях методу Ньютона для знаходження розв'язку задачі потрібна менша кількість обчислень, ніж у звичайному методі Ньютона.

Список літератури: І. К а н т о р о в и ч Л.В. О методе Ньютона. - Тр. мат. ин-та АН СССР, 1949, 28. 2. С а м а р с к и й А.А., П о п о в Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. - М.: Наука, 1975.

Стаття надійшла в редакцію 26.09.80

І.М.Дудзяний, В.М.Цимбал

АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ
ДЛЯ ДЕЯКОГО РІВНЯННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Багато задач прикладних дисциплін вимагає розв'язувати рівняння у частинних похідних з малим параметром при старших похідних або, як кажуть, сингулярно збуреним рівнянням [1, 4, 5, 7, 8]. Розроблені асимптотичні методи, одним з яких є метод примежового шару [2, 3].

Методом примежового шару в області $D = \{(x, t) : 0 \leq x \leq \ell, 0 \leq t \leq T\}$ розв'язуємо таку задачу:

$$L_\varepsilon u = \varepsilon^3 \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + c(x, t) u = f(x, t) / \varepsilon$$

$$u(0, t) = 0, \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, u(\ell, t) = 0, u'(x, 0) = 0, \quad /2/$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр.

Умови однозначної розв'язності задачі /1/, /2/ встановлені у праці [9], там же вказуються задачі такого типу з конкретним фізичним змістом.

Надалі вважатимемо, що виконуються умови:

- 1/ $a(x, t) \geq 0$, $c(x, t) > 0$ в області D ;
- 2/ функції $a(x, t)$, $b(x, t)$, $c(x, t)$ достатньо гладкі в області D , для проведення подальших викладок;
- 3/ $\frac{\partial^{N+1} f(0, 0)}{\partial t^N \partial x^N} = \frac{\partial^{N+1} f(\ell, 0)}{\partial t^N \partial x^N} = 0$, де N – точність побудованої нижче асимптотики.

Асимптотичний розклад розв'язку задачі /1/, /2/ будемо у вигляді:

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \bar{u}_i(x, t) + \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \Pi_i(x, t) + \sum_{i=0}^N \varepsilon^i Q_i(\xi, t) + \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \rho_i(\eta, t) + \varepsilon^{N+1} R_N(x, t, \varepsilon),$$

/3/

де $\tau = t/\varepsilon$, $\xi = x/\varepsilon$, $\eta = l - x/\varepsilon$. Усі функції, що входять у /3/, визначені нижче.

Рівняння для знаходження регулярної частини асимптотики $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \bar{u}_i(x, t)$ одержуємо застосуванням стандартної процедури методу збурень

$$c(x, t) \bar{u}_i = f_i(x, t) \quad (i = 0, \dots, N),$$

де $f_0(x, t) = f(x, t)$, $f_i(x, t) = -\left(\frac{\partial \bar{u}_{i-1}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \bar{u}_{i-1}}{\partial x^2} - a(x, t) \frac{\partial \bar{u}_{i-1}}{\partial x} + b(x, t) \frac{\partial \bar{u}_{i-1}}{\partial x}\right)$ ($i = 1, \dots, N$). Тут і надалі функція з від'ємним індексом вважається тотожно рівній нулю. Функції $\bar{u}_i(x, t)$ є розв'язками скінченних рівнянь /4/ і, взагалі кажучи, не задовольняють початковим і граничним умовам /2/. Цій меті слугать P -, Q -, і R -функції розкладу /3/.

Опишемо, як дістаємо рівняння для визначення $P_i(x, \tau)$ у операторі L_ε проведемо регуляризуюче перетворення $\tau = t/\varepsilon^3$ і розкладемо усі коефіцієнти у скінченні стрічки Тейлора в околі $t = 0$. Одержаний таким чином оператор позначимо через M_ε . Зрівнюючи в $M_\varepsilon \left(\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i P_i(x, \tau)\right) = 0$ коефіцієнти при однакових степенях ε , маємо рівняння для визначення $P_i(x, \tau)$ ($i = 0, \dots, N$)

$$\frac{\partial P_i}{\partial \tau} + c(x, 0) P_i = \varphi_i(x, \tau), \quad /5/$$

де $\varphi_0(x, \tau) = 0$, $\varphi_i(x, \tau)$ ($i = 1, \dots, N$) легко можна явно описати і лінійно виразити через $P_j(x, \tau)$ ($j < i$) та їхні похідні.

Рівняння для визначення $Q_i(\xi, t)$ ($i = 0, \dots, N$), що покликані ліквідувати нев'язку у виконанні граничних умов в околі границі $x = 0$, одержуємо процедурою, аналогічною наведеній вище для визначення $P_i(x, \tau)$ (регуляризуюче перетворення $\xi = x/\varepsilon$). У результаті отримуємо

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \xi} - c(0, t) Q_i = \psi_i(\xi, t), \quad /6/$$

де $\psi_0(\xi, t) \equiv 0$, $\psi_i(\xi, t)$ ($i = 1, \dots, N$) легко можна описати у явному вигляді і лінійно виразити через $Q_j(\xi, t)$ ($j < i$) та їхні похідні.

Аналогічно функції примежового шару в околі границі $x = \ell$ $P_i(\eta, t)$ ($i = 0, \dots, N$) визначають з рівнянь

$$\frac{\partial^3 P_i}{\partial \eta^3} + c(\ell, t) P_i = x_i(\eta, t), \quad /7/$$

де $x_0(\eta, t) \equiv 0$, $x_i(\eta, t)$ ($i = 1, \dots, N$) легко можна виписати в явному вигляді і лінійно виразити через $P_j(\eta, t)$ ($j < i$) та їхні похідні.

Умови, при яких слід розв'язувати рівняння /5/, /6/, /7/, знаходимо за допомогою стандартної процедури з використанням /3/ і умов /2/, а також міркувань про те, що ці функції повинні бути функціями типу примежового шару [6].

У результаті одержимо

$$P_i(x, 0) = -\bar{u}_i(x, 0) \quad (i = 0, \dots, N), \quad /8/$$

$$Q_i(0, t) = -\bar{u}_i(0, t), \frac{\partial Q_i(0, t)}{\partial \xi} = -\frac{\partial \bar{u}_{i-1}(0, t)}{\partial x}, Q_i(\xi, t) \rightarrow 0 \quad (i = 0, \dots, N) \quad \xi \rightarrow \infty \quad /9/$$

$$P_i(0, t) = -\bar{u}_i(\ell, t), P_i(\eta, t) \rightarrow 0 \quad (i = 0, \dots, N) \quad \eta \rightarrow \infty \quad /10/$$

Отже, функції $P_i(x, \tau)$, $Q_i(\xi, t)$, $P_i(\eta, t)$ - це розв'язки відповідно задач /5/, /8/; /6/; /9/; /7/, /10/, що є задачами для звичайних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами. Легко бачити, що усі функції, які входять в /3/, можна визначити рекурентно у такій послідовності: $\bar{u}_0(x, t)$, $P_0(x, \tau)$, $Q_0(\xi, t)$, $P_0(\eta, t)$ і т.д. Більш того, функції $P_i(x, \tau)$, $Q_i(\xi, t)$, $P_i(\eta, t)$ є функціями звичайного примежового шару в околі відповідно $t = 0$, $x = 0$, $x = \ell$ / доведення аналогічне [3] /.

Методом інтегралів енергії [9] одержана оцінка

$$\| R_N(x, t, \varepsilon) \|_{L_2(D)} \leq C,$$

де константа C не залежить від ε . Що і доводить асимптотичну коректність розкладу /3/.

Результат роботи сформулюємо у вигляді теореми.

Т е о р е м а . При виконанні умов I/-3/ розв'язок задачі /1/, /2/ допускає асимптотичний розклад /3/, де $\bar{U}_i(x, t)$ визначаються рекурентно зі скінченних рівнянь /4/; функції звичайних примежових шарів $P_i(x, \tau)$, $Q_i(\xi, t)$, $R_i(\eta, t)$ рекурентно визначаються як розв'язки відповідно задач /5/, /8/; /6/, /9/; /7/, /10/.

Список літератури: 1. В а н - Д а й к М. Методи возмущений в механике жидкости. - М.: Мир, 1967. 2. В а с и л ь е в а А.Б., Б у т у з о в В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. - М.: Наука, 1973. 3. В и ш и к М.И., Л ю с т е р н и к Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. - Успехи матем. наук, 1957, № 5. 4. З и н о И.Е., Т р о п п Э.А. Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Изд-во Ленинград. ун-та, 1978. 5. К о у л Дж. Методы возмущений в прикладной математике. - М.: Мир, 1972. 6. К у р а н т Р. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, 1964. 7. Н а й ф е А. Методы возмущений. - М.: Мир, 1976. 8. Т р е н о г и н В.А. Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника-Вишика. - Успехи мат. наук, 1970, № 4. 9. Kattabriga L. Un problema al contorno per una equazione parabolica di ordine dispari. - Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat., 1959, N2.

Стаття надійшла в редакцію 02.12.80

ЗВУЖЕНІ ДО КІНЦІВ ІНТЕРКВАНТИЛЬНІ СМУТИ ДОВІР'Я

Нехай

$$x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(j)}, \dots, x_{(n)} \quad /1/$$

упорядкована за величиною вибірка з популяції, що має функцію розподілу $F(x)$ та густину розподілу ймовірностей $f(x) = F'(x)$.

Тоді двоіндексна випадкова змінна

$$v_{jn} = F(x_{(j)}), \quad (j=1, \dots, n; n=2, 3, \dots), \quad /2/$$

яку назвемо інформатором популяції, набуває значення між нулем та одиницею. Диференціал ймовірності розподілу j -ї порядкової статистики $x_{(j)}$ за поліномним розподілом дорівнює

$$\frac{n!}{(j-1)! 1! (n-j)!} [F(x_{(j)})]^{j-1} f(x_{(j)}) dx_{(j)} [1-F(x_{(j)})]^{n-j}.$$

Звідси густина інформатора [2]

$$g(v_{jn}) = \frac{n!}{(j-1)! (n-j)!} v_{jn}^{j-1} (1-v_{jn})^{n-j}, \quad 0 < v_{jn} < 1, \\ (j=1, \dots, n; n=2, 3, \dots).$$

Математичне сподівання та мода інформатора /2/ відповідно дорівнюють

$$E(v_{jn}) = \frac{j}{n+1}, \quad M_0(v_{jn}) = \frac{j-1}{n-1}, \quad (j=1, \dots, n; n=2, 3, \dots).$$

Квантилем порядку q інформатора /2/ з густиною /3/ називається число $L_q(v_{jn})$, що задовольняє співвідношення

$$\frac{n!}{(j-1)! (n-j)!} \int_0^{L_q(v_{jn})} x^{j-1} (1-x)^{n-j} dx = q, \quad 0 < q < 1, \\ (j=1, \dots, n; n=2, 3, \dots). \quad /4/$$

При $q = 0,5$ співвідношення /4/ визначає медіану інформатора,

$$Me(v_{jn}) = L_{0,5}(v_{jn}), \quad (j=1, \dots, n; n=2, 3, \dots);$$

при $q = 0$ і $q = 1$ маємо відповідно $L_0(v_{jn}) = 0$ і $L_1(v_{jn}) = 1$.

Відомо [1], що

$$L_q(v_{jn}) = \frac{j}{j + (n+1-j) F_q(2(n+1-j), 2j)}, \quad /5/$$

де $F_q(v_1, v_2)$ - процентні точки розподілу Фішера з (v_1, v_2) ступенями вільності. Значення $F_q(v_1, v_2)$ табульовано [1] при $q = 0,5; 0,25; 0,1; 0,05; 0,025; 0,01; 0,005; 0,001$ та різних (v_1, v_2) . Для одержання значень $F_q(v_1, v_2)$ при $q = 0,75; 0,9; 0,95; 0,975; 0,99; 0,995; 0,999$ використовуємо рефлексивне рівняння $F_q(v_1, v_2) = \frac{1}{F_{1-q}(v_2, v_1)}$.

Лівий бік співвідношення /4/ виражає ймовірність нерівності

$$F(x_{(j)}) \leq L_q(v_{jn}). \text{ Тоді рівність /4/ записується еквівалентно } P\{F(x_{(j)}) \leq L_q(v_{jn})\} = q, \quad 0 < q < 1, (j=1, \dots, n; n=2, 3, \dots).$$

Звідси дістаємо похідне співвідношення

$$P\{L_{q_1}(v_{jn}) < F(x_{(j)}) \leq L_{1-q_2}(v_{jn})\} = 1 - q_1 - q_2, \quad /6/$$

$$q_1 > 0, q_2 > 0, 0 < q_1 + q_2 < 1, (j=1, \dots, n; n=2, 3, \dots).$$

Співвідношення /6/ вказує $(1 - q_1 - q_2)$ - 100%-ні межі допуску для інформатора /2/. Сусідні точки $(x_{(j)}; L_{q_1}(v_{jn}))$, з'єднані відрізками, утворюють нижню межу двобічної інтерквантильної смуги довір'я; точки $(x_{(j)}; L_{1-q_2}(v_{jn}))$ - верхню межу. Оскільки різниця $L_{1-q_2}(v_{jn}) - L_{q_1}(v_{jn})$ з ростом індекса j спершу зростає, а згодом спадає, то інтерквантильна смуга довір'я зужується до кінців. При $q_1 = q_2 = q, 0 < q < \frac{1}{2}, (1-2q)$ - 100%-на смуга довір'я - симетрична. При $q_1 = 0$ маємо однібічну нижню смугу довір'я з верхньою межею через точки $(x_{(j)}; L_{1-q_2}(v_{jn}))$.

Зокрема, ламана через точки $(x_{(j)}; L_{0.5}(v_{jn}))$ представляє графік медіанної емпіричної функції розподілу. При $q_2 = 0$ дістаємо однібічну верхню смугу довір'я з нижньою межею через точки $(x_{(j)}; L_{q_1}(v_{jn}))$. При $q_1 = 0,5$ нижньою межею смуги довір'я є графік медіанної емпіричної функції розподілу.

У симетричному випадку співвідношення /6/ набуває вигляду

$$P\{L_q(v_{jn}) < F(x_{(j)}) < L_{1-q}(v_{jn})\} = 1-2q, \quad 0 < q < \frac{1}{2}, \quad /7/$$

$$(j=1, \dots, n; \quad n=2,3, \dots).$$

Симетрична інтерквантильна смуга довір'я, визначена точками

$(x_{(j)}; L_q(v_{jn}))$ та $(x_{(j)}; L_{1-q}(v_{jn}))$, при $q = 0,25; 0,1; 0,01; \dots$ відповідно називається інтерквартильною, інтердецильною, інтерцентильною тощо.

Для ілюстрації використання формули /7/ розглянемо числовий приклад. Нехай 54, 79, 97, 114, 130, 146, 164, 186, 220 упорядкована вибірка з абсолютно неперервної популяції. Знайти вузлові точки для меж інтердецильної смуги довір'я, а також вузлові точки для медіанної емпіричної функції розподілу.

За формулою /5/ і відповідною таблицею [1] знаходимо значення $L_{0,1}(v_{jg}), L_{0,9}(v_{jg})$ та $L_{0,5}(v_{jg})$. Одержані результати запишемо в таблицю.

j	$x_{(j)}$	$L_{0,5}(v_{jg})$	$L_{0,1}(v_{jg})$	$L_{0,9}(v_{jg})$	$L_{0,9}(v_{jg}) - L_{0,1}(v_{jg})$
1	54	0,074	0,012	0,225	0,213
2	79	0,180	0,061	0,368	0,307
3	97	0,286	0,130	0,490	0,360
4	114	0,393	0,211	0,599	0,388
5	130	0,500	0,300	0,700	0,400
6	146	0,607	0,401	0,789	0,388
7	164	0,714	0,510	0,870	0,360
8	186	0,820	0,632	0,939	0,307
9	220	0,926	0,775	0,988	0,213

Сусідні точки $(x_{(j)}; L_{0,5}(v_{jg}))$, з'єднані відлітками, утворюють графік медіанної емпіричної функції розподілу; точки $(x_{(j)}; L_{0,1}(v_{jg}))$ - нижню, а точки $(x_{(j)}; L_{0,9}(v_{jg}))$ - верхню межі інтерквартильної смуги довір'я. Різниця $L_{0,9}(v_{jg}) - L_{0,1}(v_{jg})$ спершу зростає, а згодом спадає; інтердецильна смуга довір'я змужена до кінців.

Відзначимо, що коли ЕСМ може видавати процентні точки розподілу Фішера при заданих ступенях вільності, то зможе видати графіки медіанної емпіричної функції розподілу та меж інтерквантильної смуги довір'я.

Список літератури: 1. Справочник по специальным функциям. - М.: Наука, 1979. 2. *Smirnov N. Über die Verteilung des allgemeinen Gliedes in der Variationsreihe. "Metron", 12(1935), 59-81.*

Стаття надійшла в редколегію 25.II.80

УДК 536.24

Д.В.Гриліцький

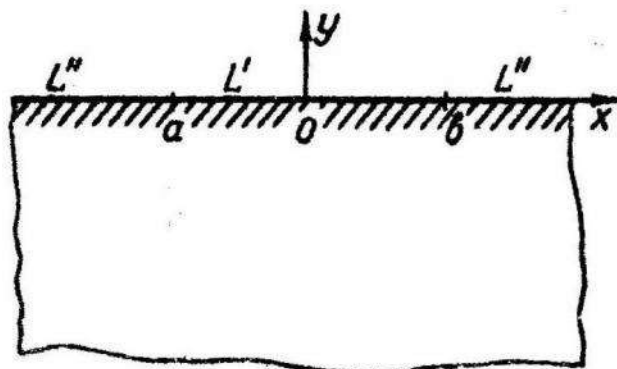
ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ

У ПІВПЛОЩИНІ ПРИ МІШАНИХ ГРАНИЧНИХ УМОВАХ

Розглянемо нижню півплощину при допущенні, що її бічні грані теплоізовані.

У цьому випадку для визначення температурного поля в області по заданих умовах на границі можна застосувати методи теорії функцій комплексного змінного.

Введемо позначення: всю границю півплощини позначимо через L відрізок ab границі - через L' , частину границі поза L' - через L'' . Так що $L = L' + L''$ /див. рисунок/.



Відомо, що температура визначається за формулою

$$T(x, y) = \frac{1}{2} [F(z) + \overline{F(z)}], \quad /1/$$

де $F(z)$ - аналітична функція змінного $z = x + iy$.

Задача знаходження температурного поля у півплощині $T(x, y)$ або, що те ж саме, функції розподілу температури $F(z)$ легко розв'язуються у випадках, коли на границі L відома температура $T(t)$ або нормальна похідна від температури $\frac{\partial T}{\partial y} = \psi(t)$.

У першому випадку для визначення функції $F(z)$ застосовують формулу

$$F(z) = -\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{T(t) dt}{t - z}. \quad /2/$$

В другому - знаходимо функцію $F'(z)$

$$F'(z) = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\psi(t) dt}{t - z} \quad /3/$$

при виконанні умови

$$\int_L \psi(t) dt = 0. \quad /4/$$

Вважаємо, що функції $T(t)$ і $\psi(t)$ такі, що інтеграли /2/ і /3/ існують.

Наведемо розв'язки задач теплопровідності для таких п'яти випадків граничних умов:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial T}{\partial y} + h(T - T_0) = 0 & \text{на } L', \\ T = \varphi(t) & \text{на } L'', \end{array} \quad /5/$$

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial T}{\partial y} + h(T - T_0) = 0 & \text{на } L', \\ \frac{\partial T}{\partial y} = \psi(t) & \text{на } L'', \end{array} \quad /6/$$

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial T}{\partial y} + h(T - T_0) = 0 & \text{на } L', \\ \frac{\partial T}{\partial y} = -\kappa T & \text{на } L'', \end{array} \quad /7/$$

$$T = \varphi(x) \quad \text{на } L', \quad /8/$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \psi(x) \quad \text{на } L'';$$

$$T = \varphi(x) \quad \text{на } L',$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -\kappa T \quad \text{на } L'', \quad /9/$$

В умовах /5/-/9/ h і κ - сталі коефіцієнти; T_0 - відома температура; $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ - відомі функції.

Крім того вважаємо, що для всіх п'яти випадків виконується умова

$$\int_L \frac{\partial T}{\partial y} dt = 0, \quad /10/$$

і температура у всіх точках границі півплощини має бути неперервною функцією.

Враховуючи малий обсяг статті, опустимо аналітичні викладки і наведемо остаточні результати.

На основі формул /1/-/3/ та тих співвідношень, які можна з них одержати, знайдено, що:

А. При граничних умовах /5/ температура $T(t)$ на L' визначається із сингулярного інтегрального рівняння

$$\pi h T(x) - \int_{L'} \frac{T'(t) dt}{t-x} = f(x), \quad x \in L', \quad /11/$$

де

$$f(x) = \pi h T_0(x) + \int_{L''} \frac{\varphi'(t) dt}{t-x}. \quad /12/$$

Знайшовши температуру на L' , маємо температуру на всій границі L . Функцію $\mathcal{F}(z)$ обчислюємо за формулою /2/.

Б. Для визначення температури $T(t)$ на L' при граничних умовах /6/ доходимо до такого рівняння

$$h \int_{L'} \frac{T'(t) dt}{t-x} + \pi T'(x) = f(x), \quad x \in L', \quad /13/$$

де

$$f(x) = h \int_{L'} \frac{T_0(t) dt}{t-x} + \int_{L''} \frac{\psi(t) dt}{t-x}. \quad /14/$$

Розв'язавши рівняння /13/, дістанемо температуру на L' , звідки стане відома похідна від температури по нормалі на всій границі півплощини L . Функція $F'(z)$ визначиться за формулою /3/.

В. Для знаходження температури на L' при граничних умовах /7/ дістаємо рівняння

$$\frac{h-\kappa}{\pi} \int_{L'} \frac{T dt}{t-x} + \frac{h\kappa}{2} \int_{L'} T(t) \operatorname{sign}(x-t) dt + T'(x) = f(x), \quad x \in L', \quad /15/$$

де

$$f(x) = \frac{h}{\pi} \int_{L'} \frac{T_0 dt}{t-x} + \frac{\kappa h}{2} \int_{L'} T_0 \operatorname{sign}(x-t) dt + a_0; \quad /16/$$

a_0 - константа.

Якщо температура на L' знайдена, то функцію $F(z)$ дістають із диференціального рівняння

$$F'(z) - i\kappa F(z) = \Phi(z), \quad /17/$$

де

$$\Phi(z) = \frac{\kappa-h}{\pi} \int_{L'} \frac{T dt}{t-z} + \frac{h}{\pi} \int_{L'} \frac{T_0 dt}{t-z} \quad /18/$$

Г. Для випадку граничних умов /8/ визначається функція

$$F'(z) = -\frac{i}{\pi^2 x(z)} \int_{L'} \frac{x'(t) \omega(t) dt}{t-z} + \frac{1}{\pi x(z)} \int_{L''} \psi(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{L''} \frac{\psi(t) dt}{t-z}. \quad /19/$$

У формулі /19/ введені позначення

$$x(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)};$$

$$\omega(x) = \pi \varphi'(x) - \int_{L'} \frac{\varphi(t) dt}{t-x}, \quad x \in L'. \quad /20/$$

Д. Задачу теплопровідності при граничних умовах /9/ можна звести до сингулярного інтегрального рівняння

$$\frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{S'(t) dt}{t-x} + \kappa S(x) = f(x), \quad x \in L', \quad /21/$$

де

$$f(x) = \frac{\kappa}{\pi} \int_{L'} \frac{\varphi(t) dt}{t-x} - \varphi'(x); \quad /22/$$

$S(x)$ - значення уявної частини функції $F(z)$ на L .

Якщо функція $S'(x)$ на L' знайдена, то для визначення $F(z)$ служить диференціальне рівняння /17/ з правою частиною

$$\Phi(z) = \frac{\kappa}{\pi} \int_{L'} \frac{\varphi(t) dt}{t-z} - \frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{S'(t) dt}{t-z}. \quad /23/$$

Для наближеного розв'язання одержаних сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь ефективним є метод ортогональних поліномів. Покажемо це на прикладі рівняння /21/, попередньо звівши його до проміжка $(-1, 1)$.

Отже, побудуємо розв'язок такого рівняння

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{S'(t) dt}{t-x} + \kappa S(x) = f(x), \quad x \in (-1, 1). \quad /24/$$

Шукаємо розв'язок у виді

$$S'(t) = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n T_n(t). \quad /25/$$

Звідки

$$S(t) = -\sqrt{1-t^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} A_n U_{n-1}(t) + A_0 \arcsin t + A, \quad /26/$$

де $T_n(t)$ і $U_n(t)$ - поліноми Чебишева відповідно першого та другого роду; A - константа.

Підставляючи /25/ і /26/ в /24/ та користуючись співвідношеннями ортогональності для поліномів Чебишева першого та другого роду, одержуємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n U_{n-1}(x) - \kappa \sqrt{1-x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} A_n U_{n-1}(x) + \kappa A_0 \arcsin x + \kappa A = f(x), \quad x \in (-1, 1). \quad /27/$$

Помножимо /27/ на $\sqrt{1-x^2} U_m(x)$ ($m=0, 1, \dots$) і проінтегруємо по x в межах від -1 до 1 . В результаті одержимо безмежну систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення шуканих коефіцієнтів A_n ($n=0, \infty$)

$$\frac{\pi}{2} A_{m+1} - \kappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} N_{n,m} A_n = H_m - \kappa B_m, \quad m=0, 1, \dots, \quad /28/$$

де

$$N_{n,m} = \int_{-1}^1 (1-x^2) U_{n-1}(x) U_m(x) dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & m+n - \text{парне} \\ \frac{1}{(m+n)(m+n+2)} - \frac{1}{(m-n)(m-n+2)}, & m+n - \text{непарне,} \end{cases}$$

$$H_m = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_m(x) f(x) dx,$$

$$B_m = \int_{-1}^1 (A_0 \arcsin x + A) \sqrt{1-x^2} U_m(x) dx.$$

При практичних розрахунках обмежуватися, звичайно, скінченною системою лінійних алгебраїчних рівнянь.

Стаття надійшла в редколегію 05.01.81

О.М.Горечко

ВЗАЄМОДІЯ СЛАБИХ УДАРНИХ ХВИЛЬ З ТОВСТОСТІННИМ ПРУЖНИМ ЦИЛІНДРОМ,
ЯКИЙ ЗНАХОДИТЬСЯ В АКУСТИЧНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Відомі методи розв'язування нестационарних задач взаємодії слабких ударних хвиль з деформівними перешкодами [3, 4] ефективно застосовуються, якщо пружний об'єкт описується лінійними рівняннями теорії тонких пружних оболонок [2]. Методом поліномів Лагерра [1] розв'яжемо нестационарну задачу взаємодії слабких ударних хвиль з товстостінним пружним циліндром.

І. Розглянемо пружний циліндр безмежної довжини, заповнений ідеальною стисливою рідиною густини ρ_1 , зі швидкістю поширення звуку C_1 , який знаходиться в просторі ідеальної стислої рідини з характеристиками ρ_2 і C_2 . Нехай із зовнішнього середовища на початково нерухомий циліндр падає плоска або циліндрична хвиля тиску $P_2 = \rho_2 C_2^2 Q_2(\bar{R}, t)$, а в заповнювачі знаходиться джерело циліндричних хвиль $P_1 = \rho_1 C_1^2 Q_1(\bar{R}, t)$, причому фронти хвиль P_i ($i=1,2$) паралельні до твірної циліндра. Поведінка товстостінної циліндричної оболонки описується рівняннями Ламе, а рух зовнішнього середовища і заповнювача - хвильовим рівнянням на тиск.

Віднесемо циліндр до циліндричної системи координат (R, φ, Z) , вісь Z якої збігається з віссю циліндра. У такій постановці задача плоска, тобто всі шукані величини не залежать від змінної Z . Рівняння Ламе розділимо за допомогою функцій

$$\theta = \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} (zv) + \frac{1}{z} \frac{\partial v}{\partial \varphi}; \quad \chi = \frac{1}{2z} \left[\frac{\partial}{\partial z} (zv) - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right], \quad (1.1)$$

де $z = R/R_2$ - безрозмірна радіальна координата; $\bar{u}(u, v, 0)$ - вектор зміщень, віднесений до зовнішнього радіуса циліндра R_2 . З допомогою функцій (1.1) у розглядуваному плоскому випадку розв'язу-

вання рівнянь Ламе еквівалентне розв'язуванню хвильових рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2}; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varphi^2} &= \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \tau^2}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

записаних у безрозмірних величинах $\tau = c_L t / R_2$, $b = c_T / c_L$, c_T і c_L — швидкості поширення поперечних і поздовжніх хвиль у циліндрі.

Тиск у заповнювачі ($i = 1$) та зовнішньому середовищі ($i = 2$) запишемо у вигляді суми падаючого P_i та збуреного $p_i = \rho_i c_i^2 q_i$ тисків. Збурені безрозмірні тиски q_i задовольняють хвильові рівняння

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial q_i}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 q_i}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{a_i^2} \frac{\partial^2 q_i}{\partial \tau^2} \quad (i = 1, 2), \quad (1.3)$$

де $a_i = c_i / c_L$, c_i — швидкості поширення звуку в заповнювачі та зовнішньому середовищі.

Рівняння (1.2), (1.3) необхідно розв'язати при нульових початкових і граничних умовах безвіддільного контакту пружного й акустичного середовища, які в термінах функцій θ і χ запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} - 2b^2 \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + 2b^2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \chi \right) \right] + \\ + \mu_i a_i^2 \frac{\partial^2 q_i}{\partial \tau^2} = -\mu_i a_i^2 \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \tau^2}, \\ 2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \theta \right) + 2b^2 \left(\frac{r}{b^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \tau^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varphi^2} - 2 \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{2b^2}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} + a_i^2 \frac{\partial q_i}{\partial r} = -a_i^2 \frac{\partial Q_i}{\partial r}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

при $r = R_1 / R_2$, $i = 1$ та $r = 1$, $i = 2$. У співвідношеннях (1.4) $\mu_i = \rho_i / \rho_0$, ρ_i ($i = 1, 2$) — густини заповнювача і зовнішнього середовища; ρ_0 — густина циліндра; R_1 — внутрішній радіус ци-

ліндра. Всі шукані функції повинні бути обмеженими в областях, де вони визначені.

2. Згідно з методом поліномів Лагерра [1] у розглядуваному плоско-му випадку запишемо шукані функції у вигляді рядів

$$\theta(r, \varphi, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_{mn}(r) L_n(\tau) \cos m\varphi,$$

$$\chi(r, \varphi, \tau) = 2b^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{mn}(r) L_n(\tau) \sin m\varphi,$$

$$q_i(r, \varphi, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} q_{imn}(r) L_n(\tau) \cos m\varphi \quad (i=1,2). \quad (2.1)$$

Тоді, зважаючи на нульові початкові умови задачі, коефіцієнти рядів (2.1) знаходять як розв'язки послідовностей рівнянь Бесселя

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta_{mn}}{dr} \right) - \left(1 + \frac{m^2}{r^2} \right) \theta_{mn} &= \sum_{j=0}^{n-1} (n+1-j) \theta_{mj}, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\chi_{mn}}{dr} \right) - \left(\frac{1}{b^2} + \frac{m^2}{r^2} \right) \chi_{mn} &= \frac{1}{b^2} \sum_{j=0}^{n-1} (n+1-j) \chi_{mj}, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dq_{imn}}{dr} \right) - \left(\frac{1}{a_i^2} + \frac{m^2}{r^2} \right) q_{imn} &= \frac{1}{a_i^2} \sum_{j=0}^{n-1} (n+1-j) q_{imj}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

обмежені у відповідних областях при таких граничних умовах на поверхнях $r=R_1/R_2$ ($i=1$) і $r=1$ ($i=2$):

$$\begin{aligned} \theta_{mn} - 2b^2 \left[\frac{1}{r} \frac{d\theta_{mn}}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \theta_{mn} + m \frac{d}{dr} \left(\frac{\chi_{mn}}{r} \right) \right] + \mu_i a_i^2 q_{imn} &= \\ = -\mu_i a_i^2 Q_{imn} - \sum_{j=0}^{n-1} (n+1-j) \left[\theta_{mj} + \mu_i a_i^2 (q_{imj} + Q_{imj}) \right], \\ \left(\frac{1}{b^2} + 2 \frac{m^2}{r^2} \right) \chi_{mn} - \frac{d\chi_{mn}}{dr} - 2 \frac{d}{dr} \left(\frac{\theta_{mn}}{r} \right) &= -\frac{1}{b^2} \sum_{j=0}^{n-1} (n+1-j) \chi_{mj} \quad (2.3) \\ \frac{d\theta_{mn}}{dr} - \frac{m}{r} \chi_{mn} + a_i^2 \frac{dq_{imn}}{dr} &= -a_i^2 \frac{dQ_{imn}}{dr}. \end{aligned}$$

Розв'язок задачі (2.2), (2.3) запишемо у вигляді

$$\theta_{mn}(z) = \sum_{l=0}^n X_{n-l}^1 GI_{ml}(z) + X_{n-l}^2 GK_{ml}(z),$$

$$\chi_{mn}(z) = \sum_{l=0}^n X_{n-l}^3 GI_{ml}\left(\frac{z}{b}\right) + X_{n-l}^4 GK_{ml}\left(\frac{z}{b}\right),$$

$$q_{1mn}(z) = \sum_{l=0}^n X_{n-l}^5 GI_{ml}\left(\frac{z}{a_1}\right); q_{2mn}(z) = \sum_{l=0}^n X_{n-l}^6 GK_{ml}\left(\frac{z}{a_2}\right). \quad (2.4)$$

де $GI_{mn}(x)$ і $GK_{mn}(x)$ - фундаментальні розв'язки систем виду (2.2), означені в [1]. Вектор $\bar{X}_n$ з компонентами X_n^j ($j = \overline{1,6}$) знаходимо як розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$A_{m0} \bar{X}_n = \bar{f}_{mn} - \sum_{j=1}^n A_{mj} \bar{X}_{n-j}, \quad (2.5)$$

де $\bar{f}_{mn}$ - вектор з компонентами f_{mn}^j ($j = \overline{1,6}$), які дорівнюють правим частинам умов (2.3), а коефіцієнти a_{mn}^{ij} ($i, j = \overline{1,6}$) матриць A_{mn} виражаються через функції $GI_{mn}(x)$ і $GK_{mn}(x)$ з допомогою підстановки розв'язків (2.4) в умови (2.3). Відзначимо, що основна матриця системи (2.5) є трикутною блочно-тепліцевою матрицею з блоками A_{mn} . Тому розв'язування системи (2.5) можна звести до послідовного розв'язування систем шостого порядку. Саме в такому вигляді і записана система (2.5).

За знайденими функціями θ і χ з допомогою співвідношень (1.1) знаходимо компоненти u і v вектора пружного переміщення в циліндрі, а отже, і всі інші характеристики напружено-деформованого стану циліндра.

3. На рис. 1 показані графіки зміщень у трьох характерних точках зовнішньої поверхні суцільного пружного циліндра під дією плоскої хвилі тиску типу сходинок ($Q_2(r, \varphi, t) = H(\tau + r a_2^{-1} \cos \varphi - a_2^{-1})$) при таких значеннях безрозмірних параметрів: $b = 0,541$; $a_2 = 0,246$; $\mu_2 = 0,13$. Суцільними кривими на рисунках зображені графіки нормальних зміщень, штриховими - тангенціальних в точці $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

При розрахунках у розкладах по Фур'є та Лагерру враховували по 16 членів.

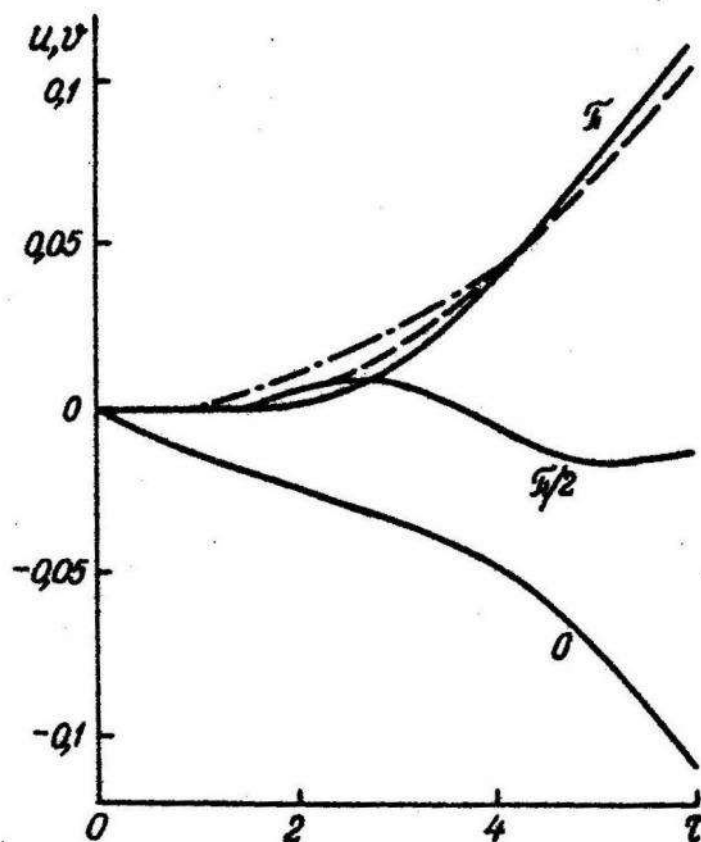


Рис. 1.

Як видно з рис. 1, початок зростання зміщень збігається з моментами приходу у відповідні точки пружної поздовжньої хвилі по циліндру. Монотонна зміна нормального зміщення u при $\varphi=0, \pi$ і тангенціального зміщення v при $\varphi=\pi/2$ вказує на наявність зміщення циліндра як жорсткого цілого. Зміщення центра циліндра показано на рис. 1 штрих-пунктирною лінією. Цікаво відзначити, що для суцільного пружного циліндра зміщення його як жорсткого цілого вже не описується першим членом розкладу нормального зміщення в ряд Фур'є, як це робиться у задачах гідропружності для циліндричних оболонок [4]. На рис. 2 зображені графіки прогинів зовнішньої поверхні суцільного циліндра, тобто графіки величини $u - u_0 \cos \varphi$, де u_0 - зміщення центра циліндра, залежно від безрозмірного часу τ .

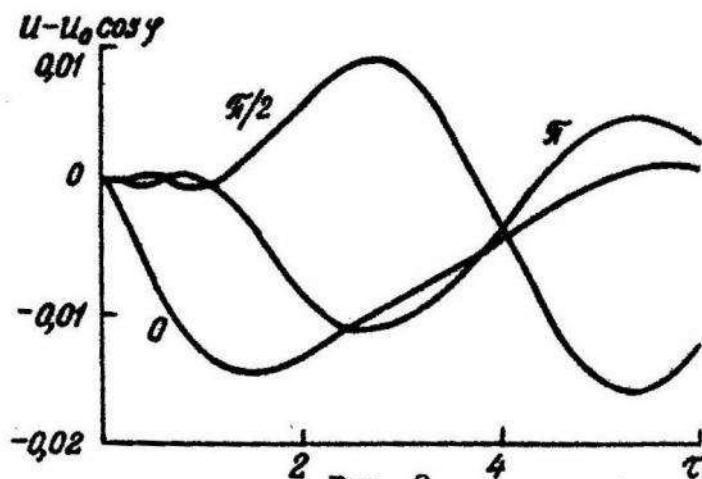


Рис. 2.

Аналіз деформації зовнішньої поверхні циліндра показує, що найбільших значень досягають прогини в точці зустрічі хвилі з циліндром. Суцільний пружний циліндр в перехідному процесі лишається стиснутим вздовж напрямку падіння хвилі тільки до моменту часу, поки акустична хвиля не досягне точки $\varphi = \pi/2$ на поверхні циліндра, після чого циліндр витягується в цьому напрямку.

Список літератури: 1. Г а л а з ю к В.А., Г о р е ч к о А.М. Про один метод розв'язування динамічних задач теорії пружності в сферичних та циліндричних координатах. - ДАН УРСР. Сер. А, 1980, № 6. 2. Г о р ш к о в А.Г. Взаимодействие ударных волн с деформируемыми преградами. - Итоги науки и техники. Сер. Мех. деформ. тверд. тела, 1979, № 13. 3. Г р и г о л ю к З.И., Г о р ш к о в А.Г. Нестационарная гидроупругость оболочек. - Л.: Судостроение, 1974. 4. К у б е н к о В.Д. Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой. - Киев: Наукова думка, 1979.

Стаття надійшла в редакцію 13.01.81

І.А.Прокопшин, Д.Г.Хлебніков

ЦИЛІНДРИЧНИЙ ЗГІН ПЛАСТИНИ НАГРІТИМ ШТАМПОМ

Огляд плоских контактних задач термопружності наведено у працях [1, 3]. На основі наближених рівнянь, отриманих операторним методом [2, 4, 5], ми даємо розв'язок плоскої термоконтактної задачі згину пластини з врахуванням обтиску.

Нехай у вільно оперту по краях $X = \pm C$ ізотропну пластину товщиною $2h$ вдавлюється силою P центрально прикладений нагрітий гладкий штамп, основа якого описується рівнянням $y = f(x)$. Контакт штампа з пластинкою відбувається в зоні $|x| \leq b$ ($b < c$), де температура поверхні пластини $y = h$ вважається заданою неперервною і симетричною функцією $\theta(x)$, $\theta(\pm b) = 0$, на іншій частині контуру пластини температура дорівнює нулю.

Ця термоконтактна задача зводиться до послідовного розв'язання задачі термопружності для пластини і контактної задачі згину пластини жорстким штампом з "основною" $y = f(x) - W_T(x, h)$, де $W_T(x, h)$ - вертикальне переміщення поверхні пластини $y = h$ викликане температурою.

Стационарне температурне поле $t(x, y)$ пластини знаходиться шляхом розв'язання крайової задачі для рівняння Лапласа в прямокутнику $\{(x, y) / |x| \leq c, |y| \leq h\}$ при умовах

$$t(x, h) = \theta(x), \quad |x| \leq b; \quad t(x, h) = 0, \quad b < |x| \leq c; \quad /1/$$

$$t(x, -h) = 0, \quad |x| \leq c; \quad t(\pm c, y) = 0, \quad |y| \leq h.$$

Розв'язок цієї задачі легко одержати методом Фур'є. Він має вигляд

$$t(x, y) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sh} \lambda_k y}{\operatorname{sh} \lambda_k h} + \frac{\operatorname{ch} \lambda_k y}{\operatorname{ch} \lambda_k h} \right) \alpha_k \cos \lambda_k x, \quad /2/$$

де

$$\alpha_k = \frac{1}{c} \int_0^b \theta(t) \cos \lambda_k t dt, \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{2c}.$$

Вертикальні переміщення $W_T(x, h)$, зумовлене температурним полем, знаходимо, використовуючи метод А. І. Лур'є [2]

$$W_T(x, h) = \alpha(1+\nu) \sum_{\kappa=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\alpha_{\kappa}}{\lambda_{\kappa}} (th\lambda_{\kappa}h + \alpha th\lambda_{\kappa}h) \cos \lambda_{\kappa}x, \quad /3/$$

де α - коефіцієнт температурного розширення; ν - коефіцієнт Пуассона.

З умови контакту при $|x| \leq b$

$$W(x, h) = f(x) - W_T(x, h) - h\delta \quad /4/$$

/ δ - безрозмірна осадка штампа/ отримуюмо наближене рівняння для визначення контактної тиску [4]

$$\frac{d^4 q}{d\xi^4} - \frac{\sqrt{21}}{4} \frac{d^2 q}{d\xi^2} + q = f_0(\xi), \quad /5/$$

$$\text{де } f_0(\xi) = \frac{D}{a_0^4 h^4} \frac{d^4}{d\xi^4} [f(a_0 h \xi) - W_T(a_0 h \xi, h)],$$

$$D = \frac{2Eh}{3(1-\nu^2)}, \quad \xi = \frac{x}{a_0 h}, \quad a_0 = \frac{4}{\sqrt{3} \sqrt{21}}.$$

Розв'язок рівняння /5/ в області контакту $|\xi| < \beta$ має вигляд

$$q(\xi) = \frac{D}{h^3} [A_1 ch \lambda \xi \cos \mu \xi + A_2 sh \lambda \xi \sin \mu \xi + q^*(\xi)], \quad /6/$$

де

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{21}}{8}\right)}, \quad \mu = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{21}}{8}\right)},$$

$$q^*(\xi) = \frac{8}{\sqrt{43}} \frac{h^3}{D} \int_0^{\xi} [\lambda ch \lambda (\xi-t) \sin \mu (\xi-t) - \mu sh \lambda (\xi-t) \cos \mu (\xi-t)] f(t) dt.$$

Після визначення $q(\xi)$ функції напружень у заданій стиску і згину смуги $\chi(\xi)$, $\psi(\xi)$ знаходяться з наближених рівнянь [4]

$$\frac{d^2 \chi}{d\xi^2} = q_1(\xi), \quad \frac{d^4 \psi}{d\xi^4} = q_2(\xi), \quad /7/$$

де

$$g_1(\xi) = \frac{a_0^4 h}{2(1-\nu)} \left(1 - \frac{1}{3a_0^2} \frac{d^2}{d\xi^2}\right) \bar{q}(\xi);$$

$$g_2(\xi) = \frac{a_0^4 h}{2(1-\nu)} \left(1 + \frac{1}{5a_0^2} \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{11}{525a_0^4} \frac{d^4}{d\xi^4}\right) \bar{q}(\xi);$$

$\bar{q} = \frac{h}{D} q$ - безрозмірний тиск.

Розв'язки рівнянь /7/ з врахуванням симетрії по ξ запишемо

$$\chi(\xi) = B_0 h + \int_0^\beta (\xi - t) g_1(t) dt,$$

$$\psi(\xi) = \frac{C_0 h}{2(1-\nu)} + \frac{Ch}{2(1-\nu)} \xi^2 + \int_0^\xi \frac{(\xi - t)^3}{6} g_2(t) dt. \quad /8/$$

Для визначення невідомих сталих, крім граничних умов на краю пластини й умови рівноваги штампів

$$\int_0^\beta \bar{q}(\xi) d\xi = -\frac{\chi}{2a_0} \quad /9/$$

$\chi = \frac{Ph}{D}$ - безрозмірне зусилля, використовуємо рівності, які забезпечують повне виконання умови безвідривного контакту /4/

$$C_0 - \frac{2}{a_0^2} C + \frac{2}{3} A_1 + \delta = \frac{1}{h} f_0(0),$$

$$C + \left[\frac{7}{30} (\lambda^2 - \mu^2) - \frac{a_0^2}{2} \right] A_1 + \frac{7}{15} \lambda \mu A_2 = \frac{1}{2h} \frac{d^2 f_0}{d\xi^2}(0). \quad /10/$$

Умови вільного опирання пластини при $\chi = C$ ($M(C) = 0, W(\xi - h) = 0$).

мають вигляд

$$\frac{2}{a_0^4} C - \int_0^\beta t \bar{q}(t) dt - \frac{\gamma}{2a_0} \chi - \frac{1}{5a_0^2} \bar{q}(0) - \frac{11}{525a_0^4} \frac{d^2 \bar{q}}{d\xi^2}(0) = 0,$$

$$C_0 + \left(\gamma^2 - \frac{2}{a_0^2}\right) C + \int_0^\beta \left[\frac{a_0^4}{6} (\gamma - t)^3 - \frac{4a_0^2}{5} (\gamma t) \right] \bar{q}(t) dt +$$

$$+ \left(\frac{94}{525} - \frac{a_0^2}{10} \gamma^2 \right) \bar{q}(0) - \frac{11}{1050} \gamma^2 \frac{d^2 \bar{q}}{d\xi^2}(0) = 0, \quad \gamma = \frac{C}{a_0 h}. \quad /11/$$

Якщо величина зони контакту β наперед невідома, то додається умова рівності нулю контактного тиску на краю зони контакту

$$A_1 ch \lambda \beta \cos \mu \beta + A_2 sh \lambda \beta \sin \mu \beta + q^*(\beta) = 0. \quad /12/$$

Тоді, задавшись величиною β , маємо систему шести рівнянь /9/-/12/ для визначення невідомих $A_1, A_2, C_0, C, \delta, \alpha$.

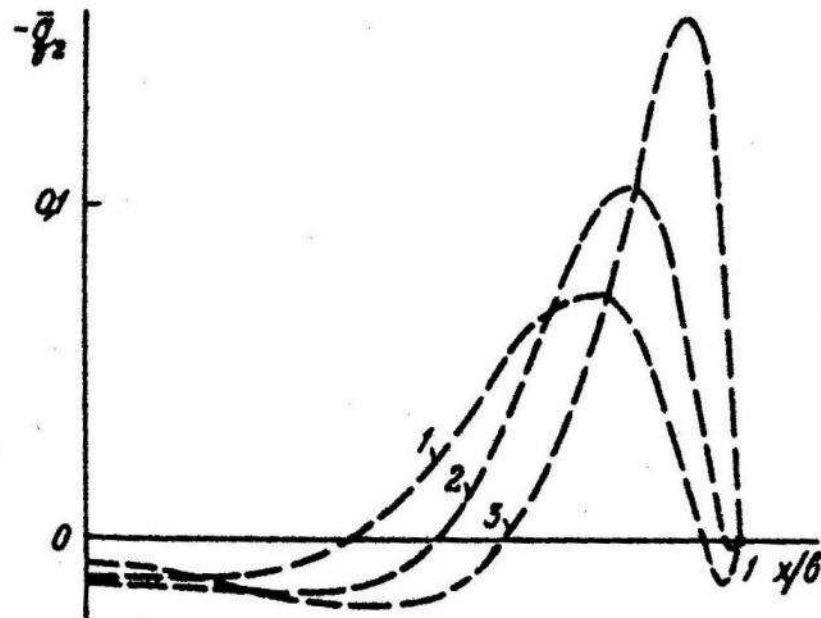


Рис. 1.

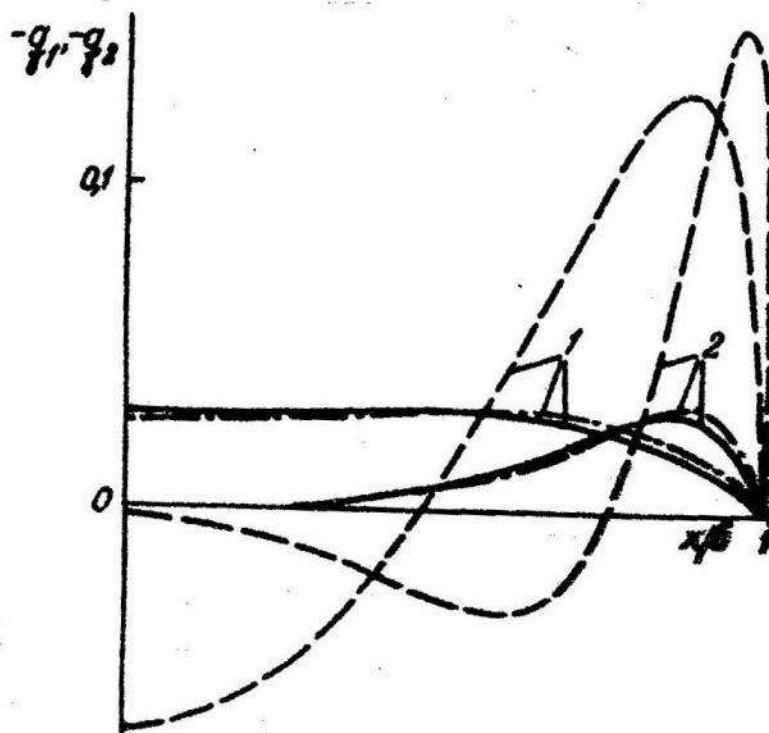


Рис. 2.

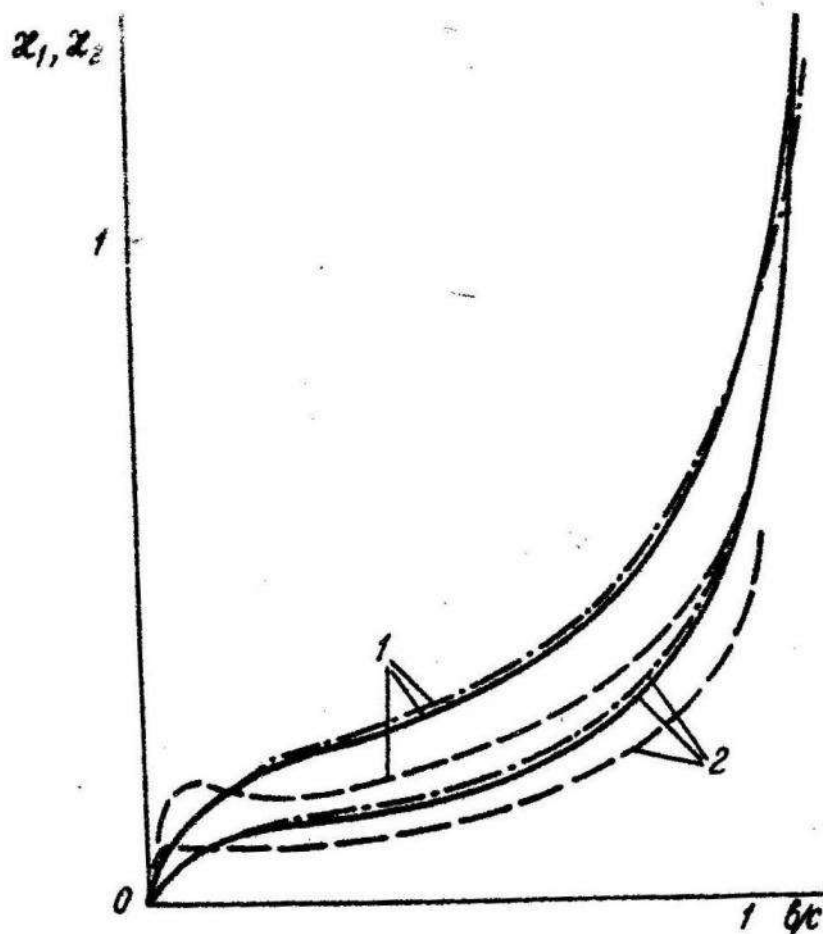


Рис. 3.

На рис. 1-3 показані результати розрахунків для параболічного штампів $f(x) = \frac{x^2}{2R}$, R - радіус кривини/, при $\theta_m(x) = \theta[1 - (\frac{x}{b})^m]$, $m \in N$, $\theta_\infty(x) = \theta = \text{const.}$ у цьому випадку контактний тиск $\bar{q}$ і зусилля $\bar{x}$, як добре видно з розрахункових формул, можна записати у вигляді:

$$\bar{q} = h\bar{q}_1/R + \alpha(1+\nu)\theta\bar{q}_2, \quad \bar{x} = h\bar{x}_1/R + \alpha(1+\nu)\theta\bar{x}_2.$$

На рис. 1-3 величини з індексом 1 нанесені суцільними лініями, а величини з індексом 2 - пунктирними. Штрих-пунктирною лінією нанесено точний розв'язок чисто силової контактної задачі [6].

На рис. 1 показано розподіл температурної компоненти контактного тиску $\bar{q}_2$ для $c/h=10$, $b/h=5$ і $m=8, 12, \infty$ /криві 1-3/.

На рис. 2 наведено розподіл компонент контактного тиску $\bar{q}_1, \bar{q}_2$.

при $c/h=20$, $m=\infty$ для різних величин зони контакту:

$b/h=2$ - криві 1, $b/h=6$ - криві 2.

Залежність компонент зусилля, прикладеного до штамп, від відносної величини зони контакту при $m=\infty$ і $c/h=10, 20$ представлена на рис. 3 /криві 1-2/. Вона дає змогу знаходити зону контакту за заданим зовнішнім навантаженням і температурою штамп. У випадку чисто силової контактної задачі ($\theta(x)=0$) одержані криві майже не відрізняються від відповідальних кривих для точного розв'язку [6].

Список літератури: 1. Г р і л и ц ь к и й Д.В., П о п о в и ч Б.І. Плоскі контактні задачі термопружності. - Львів: Вища школа, 1973. 2. Л у р ь е А.И. Пространственные задачи теории упругости. - М.: Гостехиздат, 1955. 3. Развитие теории контактных задач в СССР. - М.: Наука, 1976. 4. Х л е б н и к о в Д.Г. О контакте пластин при цилиндрическом изгибе. - В кн.: Статика сооружений. Киев, 1978. 5. Х л е б н и к о в Д.Г., П а р а щ а к А.Н. Контактная задача изгиба трансверсально-изотропной пластинки гладким штампом. - ДАН УССР, 1980, А, № 1. 6. *Keer L.M., Silva M.A.G. Bending of cantilever brought gradually into contact with cylindrical supporting surface - Int. J. mech. Sci. Pergam. Press, 1970, v. 12, n. 9.*

Стаття надійшла в редколегію 24.04.81

УДК 539.681.3.057

І.І.Дияк, Я.Г.Савула, Г.А.Шинкаренко

РОЗРАХУНОК ТЕРМОНАПРУЖЕНЬ В ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ТІЛАХ НА ОСНОВІ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Наша стаття присвячена побудові схем методу скінченних елементів /МСЕ/ і відповідного програмного забезпечення розв'язання квазістатичних задач термопружності для тіл обертання під дією силового і температурного полів. При цьому вважаємо, що температура зовнішнього середовища є функцією часу, а силові навантаження - постійне.

Задачу розглядаємо у квазістатичній постановці [1], тобто визначаємо температурне поле в даний момент часу і за відомим розподілом температур знаходимо деформації та напруження, викликані зовнішнім навантаженням і нерівномірним нагрівом. Задачу нестационарної теплопровідності розв'язуємо з використанням методу Гальоркіна [2], а розв'язування задачі пружної рівноваги знаходимо з умов мінімуму узагальненого функціоналу Лагранжа.

1. Побудуємо скінченновимірний підпростір допустимих полів зміщень $U = (u, v)^T$ і температур t .

Представимо меридіональний перетин Ω тіла як сукупність трикутних елементів, що попарно не перетинаються. Виберемо кусково-лінійну базу $\varphi_i(r, z)$ тестового підпростору $V_N^h \subset W_2^1(\Omega)$ таким чином: 1/ кожній функції φ_i поставимо у відповідність вершину P_i розбиття так, що $\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$, де δ_{ij} - символ Кронекера; 2/ всі функції φ_i за виключенням тих, які відповідають вершинам $P_i(r_i, z_i)$ елемента Ω_e , перетворюються в нуль всюди на Ω_e . Побудований простір V_N^h має наступну властивість апроксимації [3]: для кожної функції

$\omega \in W_2^1(\Omega)$ існує $\omega^h \in V_N^h$ така, що

$$\|\omega - \omega^h\|_0 + h \|\omega - \omega^h\|_1 \leq ch^2 \|\omega\|_2,$$

де $\|\cdot\|_k$ - норма простору Соболева $W_2^k(\Omega)$; h - параметр дискретизації. Після дискретизації по просторових змінних наближений розв'язок задачі шукаємо у вигляді

$$u = \sum_i u_i(\tau) \varphi_i(r, z), \quad /1.1/$$

$$v = \sum_i v_i(\tau) \varphi_i(r, z), \quad /1.2/$$

$$t = \sum_i q_i(\tau) \varphi_i(r, z). \quad /1.3/$$

2. Варіаційна постановка задачі нестационарного теплообміну при відсутності внутрішніх джерел тепла формується таким чином [2]:

знайти таку функцію $t(r, z, \tau) \in W_2'(\Omega)$, $\tau \geq 0$, яка задовільняє рівняння

$$(ct, \varphi_i) + a(t, \varphi_i) = [\alpha f, \varphi_i], \quad /2.1/$$

для $\forall \varphi_i \in V_i$. Тут $(\cdot, \cdot)$, $[\cdot, \cdot]$ - скалярні добутки в $L_2(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$,

$a(u, v) = \iint_{\Omega} \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) r dr dz + \int_{\Gamma} \alpha u v r dS$;
 Γ - частина границі області Ω , через яку здійснюється теплообмін з зовнішнім середовищем; c , λ , α - відповідно коефіцієнти теплоємності, теплопровідності, теплообміну; f - температура зовнішнього середовища. Підставляючи /1.3/ у рівняння /2.1/, приходимо до системи звичайних диференціальних рівнянь N -го порядку

$$M \dot{q}(\tau) + K q(\tau) = F(\tau), \quad /2.2/$$

де M, K - постійні, додатно визначені матриці з елементами $M_{ij} = (c \varphi_i, \varphi_j)$, $K_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$; $F(\tau)$ - вектор з компонентами $F_i(\tau) = [\alpha f, \varphi_i]$; $q = (q_1, q_2, \dots, q_N)$; явний вигляд коефіцієнтів матриць M, K і вектора F наведений у праці [4]. Початкові умови для системи /2.2/ визначаються як:

$$q_i(0) = t_0(r_i, z_i) \quad i=1, 2, \dots, N, \quad /2.3/$$

де $t_0(r, z)$ - початковий розподіл температури в тілі. Одержана задача Коші інтегрується з допомогою схеми Кранка-Ніколсона. Детальний опис алгоритму розв'язання системи /2.2/, /2.3/, а також приклади розв'язаних задач теплопровідності наведені у праці [4].

3. Шуканий вектор зміщень U у довільний момент часу $\tau > 0$ знаходимо з умови мінімуму узагальненого функціонала Лагранжа [1],

який має вигляд

$$F(u, v) = c_1 \iiint_{\Omega} \left\{ \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u^2}{r^2} + b \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{a}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] + \right. \\
+ \left[b \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right] + \left[\frac{a}{r} u \frac{\partial v}{\partial z} + a \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial z} + b \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial z} \right] + \left[\frac{a}{r} \frac{\partial v}{\partial z} u + a \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial r} + \right. \\
\left. \left. + b \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial z} \right] - 2 \gamma t \left[\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right] \right\} r dr dz - 2 \int_{\Gamma} [\cos(n, r) \cos(n, z)] p r dS, \quad /3.1/$$

де D - границя області Ω , на якій задане нормальне навантаження інтенсивності P ;

$$a = \frac{\nu}{1-\nu} ; \quad b = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} ; \quad c_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} ;$$

ν - коефіцієнт Пуассона; E - модуль Юнга; $\gamma = \alpha_f(3\lambda + 2G)$,
 λ, G - коефіцієнти Ляме.

Умови мінімуму функціонала /3.1/ після підстановки формул /1.1/-/1.3/ приводять до системи алгебраїчних рівнянь для визначення вузлових значень зміщень

$$Qs = R, \quad /3.2/$$

де Q - матриця жорсткості; R - вектор навантаження;

$$s = (u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_N, v_N).$$

Явний вигляд коефіцієнтів матриці жорсткості Q_{ij} і вектора навантаження R_i легко визначити з формули /3.1/. Їх обчислення на кожному елементі після деякого лінійного перетворення координат зводиться до інтегрування на стандартному трикутнику

$\Omega_0 = \{x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$. Система рівнянь /3.2/ розв'язується з використанням методу Гауса.

Знайшовши таким чином розподіл температури та зміщень у кожному вузлі сітки дискретизації, визначаємо за відомими формулами напруження [1].

Цей алгоритм реалізований у вигляді комплексу Фортран-програм для ЕСМ БЕСМ-6.

Приклад I. Розв'язана тестова задача визначення теплових напружень у нескінченному циліндрі при конвективному обміні між його поверхнею і зовнішнім середовищем. Початкова температура циліндра $t_0 = 323^\circ\text{C}$, температура середовища f змінюється за законом

$$f(\tau_1) = 823(1 + 0.5473 \cdot e^{-53.6\tau_1}),$$

де $\tau_1 = \frac{a\tau}{r^2}$ - безрозмірний час; $r = 0.141$ - радіус циліндра;

$\alpha = 0,557 \cdot 10^{-7} \frac{M}{C}$ - коефіцієнт температуропровідності, критерій теплової подібності $B_L = 15$.

Теплові напруження у суцільному
нескінченному циліндрі

		τ, c	0,0	0,2	R/r	0,4	0,6	0,8	1,0
σ_r	180		95	90	82	78	54	-8	
			71	70	68	60	44	0,6	
			71	69	66	59	39	0	
	540		128	117	99	70	35	1	
			103	98	85	63	33	0	
			98	90	78	58	32	0	
σ_θ	180		91	88	74	20	-88	-240	
			72	70	58	13	-65	-240	
			71	69	74	28	-51	-239	
	540		119	110	71	9	-68	-152	
			103	90	54	-5	-81	-159	
			100	88	52	-10	-82	-160	

Результати розв'язування цієї задачі наведені у таблиці. Перше число кожної графі - розв'язок, одержаний з використанням 10 елементів по радіусу циліндра, друге - 20 елементів, третє - точний розв'язок [1]. Як видно, у другому випадку одержано достатньо добре наближення до точного розв'язку. Відносна похибка у цьому випадку не перевищує 5%.

Приклад 2. За наведеною методикою визначені термонапруження в балоні мінескопа ІЗ-АН-5.

Температура мінескопа змінювалась внаслідок конвективного теплообміну з зовнішнім середовищем, температура якого змінювалась по закону

$$f(\tau) = \begin{cases} 40 + 1360\tau, & \text{якщо } 0 \leq \tau \leq 0,25, \\ 640 + 1040\tau, & \text{якщо } 0,25 \leq \tau \leq 0,5. \end{cases}$$

На внутрішній поверхні і торцях балона задані умови теплоізоляції. Початкова температура балона $t_0 = 40^\circ\text{C}$, теплофізичні та механічні характеристики скла

$$E = 6,4 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}, \quad \nu = 0,22, \quad \alpha_b = 9,4 \cdot 10^{-6} \text{град}^{-1},$$

$$C = 4,864 \cdot 10^{-4} \frac{\text{ккал}}{\text{град}}, \quad \alpha = 4,073 \cdot 10^3 \frac{\text{ккал}}{\text{мм} \cdot \text{град}}, \quad \lambda = 1,404 \frac{\text{ккал}}{\text{мм} \cdot \text{град}}.$$

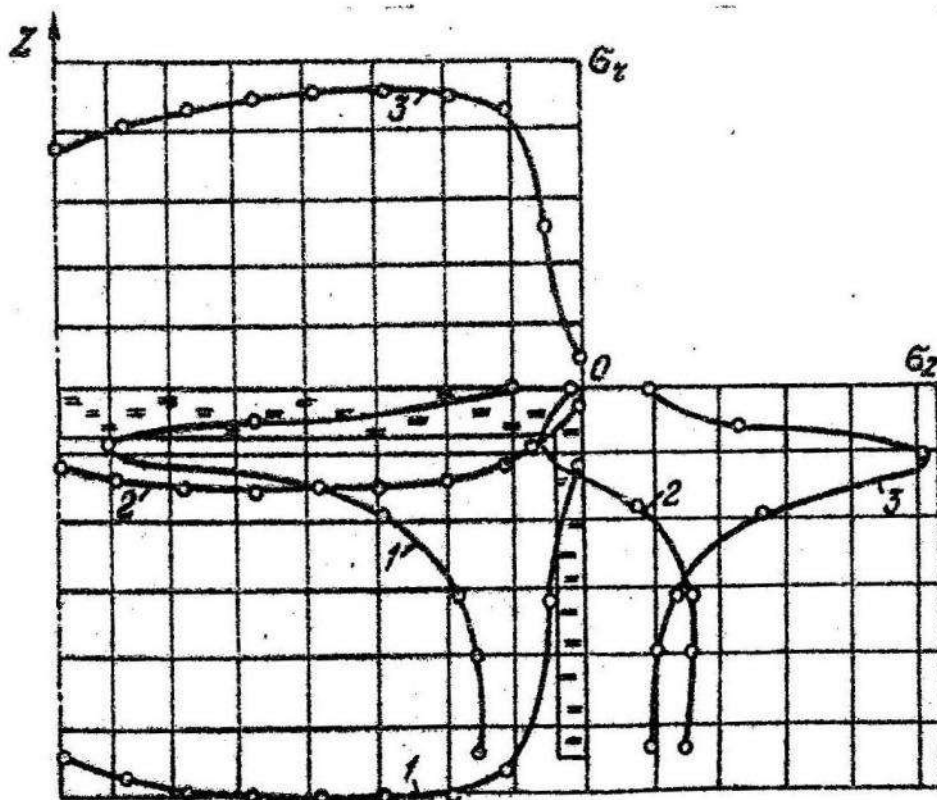


Рис. 1.

Характер поведінки у часі розтягуючих теплових напружень σ_x , σ_z на зовнішній і внутрішній поверхнях балона показаний на рис. 1, 2.

Розподіл напружень у момент часу $t_1 = 0,15$, $t_2 = 0,3$, $t_3 = 0,45$ показаний на рисунках відповідно кривими 1-3.

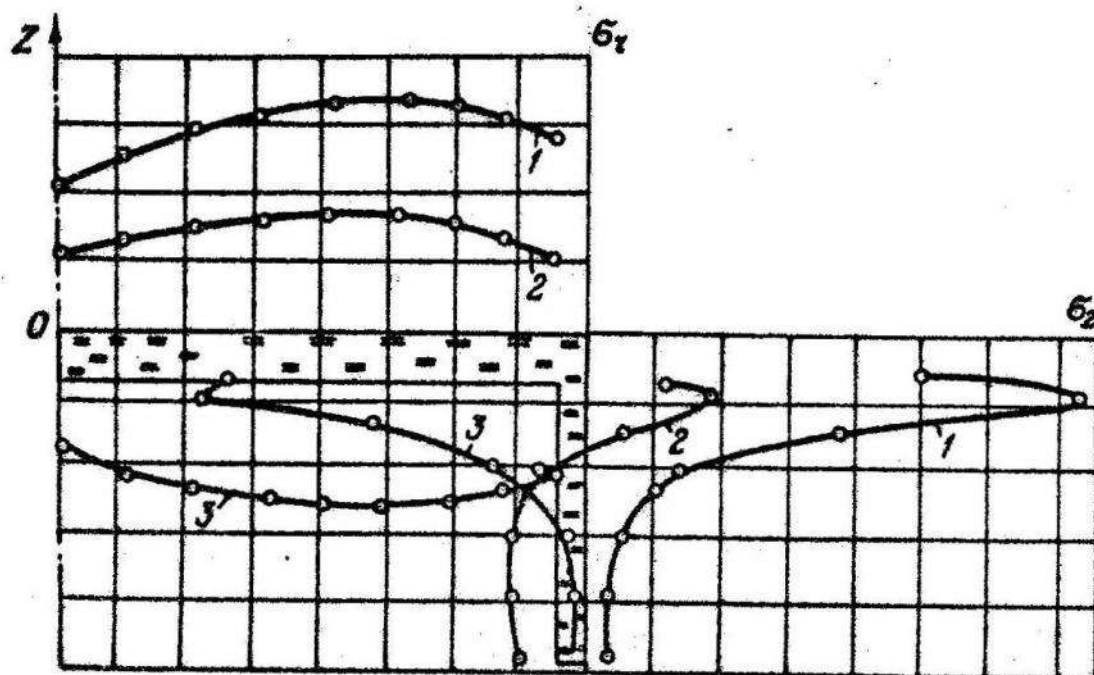


Рис. 2.

Список літератури: 1. К о в а л е н к о А.Д. Термоупругость. - К.: Вища школа, 1975. 2. М и х л и н С.Г. Вариационные методы в математической физике. - М.: Наука, 1970. 3. С т р е н г Г., Ф и к о Дж. Теория метода конечных элементов. - М.: Мир, 1977. 4. Ш и н к а р е н к о Г.А., Г р и г о р я н С.С., Д и я к І.І. Чисельні дослідження нестационарного конвективного теплообміну методом скінченних елементів. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1980, вип. 16.

Стаття надійшла в редакцію 10.02.81

УДК 517.958

І.І.Дияк

РЕАЛІЗАЦІЯ ВИСОКОТОЧНИХ СХЕМ МЕТОДУ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ЗАДАЧ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Описано алгоритм розв'язування задачі нестационарної теплопровідності для двовірних і осесиметричних тіл на основі методу скінченних елементів з використанням високоточних ізопараметричних елементів.

Використаємо схему методу скінченних елементів для задач тепло-
провідності, яка описана у праці [3]. На основі цієї схеми задача
знаходження температури у довільній точці тіла зводиться до інтегру-
вання задачі Коші виду

$$M\dot{q}(\tau) + Kq(\tau) = F(\tau),$$

$$q(0) = T_0,$$

/1/

де M, K - постійні додатно визначені матриці з елементами
 $M_{ij} = (c\chi\varphi_i, \varphi_j)$, $K_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$; $F(\tau)$ - вектор з компонентами
 $f_i = [T_c, \varphi_i] + [\delta, \varphi_i]$; T_0 - розподіл температури в початковий
момент часу; $q(\tau)$ - вектор вузлових значень температури в точках
дискретизації в момент часу τ ; T_c - температура зовнішнього середо-
вища; δ - функція внутрішніх джерел тепла; φ_i - координатні
функції; a - оператор [3], $\dot{q}(\tau) = \frac{dq(\tau)}{d\tau}$, $(\cdot, \cdot)$, $[\cdot, \cdot]$ - від-
повідно скалярні добутки в $L_2(\Omega)$ і $L_2(\Gamma)$.

При інтегруванні /1/, скориставшись методом зважених залишків,
одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$(M + \theta\Delta\tau K)q_{i+1} = [M - (1-\theta)\Delta\tau K]q_i +$$

$$+ \Delta\tau [(1-\theta)F_i + \theta F_{i+1}]$$

$$i = 0, 1, \dots, \frac{\tau^*}{\Delta\tau},$$

$$q_0 = T_0,$$

/2/

тут $\Delta\tau$ - крок інтегрування по часу,

$$q_i = q(i\Delta\tau), \quad F_i = F(i\Delta\tau), \quad \tau \in [0, \tau^*].$$

Якщо $0 < \theta < \frac{1}{2}$, то з /2/ одержуємо умовно стійкі схеми, при
 $\theta = \frac{1}{2}$ - схему Кранка-Ніколсона, якщо $\frac{1}{2} < \theta \leq 1$ - абсолютно стій-
кі неявні схеми.

Для послідовного розв'язування системи виду /2/ використовуємо
метод Холєцького, який дає змогу в процесі обчислень зберегти стріч-
кову структуру матриць і значно зменшити кількість арифметичних опе-
рацій [3].

На відміну від праці [3], область меридіального перетину Ω представляємо у вигляді набору чотирикутників, внутрішності яких взаємно не перетинаються.

Для апроксимації невідомої температури в межах чотирикутного елемента

$$T = \sum_i q_i(\tau) \varphi_i(\tau, z) \quad /3/$$

використовуємо поліноми $\varphi_i(\tau, z)$ різних порядків білінійний, біквадратичний, бікубічний. Дослідження проводили з елементами серендипового типу [1] з чотирма, вісьмома та дванадцятьма вузлами інтерполяції.

Елементи матриць системи /1/ обчислювали з використанням ізопараметричної апроксимації координат. Відображаючи кожен елемент розбиття на стандартний $\Omega_0 = \{(\xi, \eta) : |\xi| \leq 1, |\eta| \leq 1\}$, одержуємо вирази для коефіцієнтів матриць

$$\begin{aligned} K_{ij}^e &= \iint_{\Omega_e} \lambda x_i^T x_j \tau dz dz + \int_{\Gamma_e} \alpha \psi_i^T \psi_j \tau d\Gamma = \\ &= \iint_{-1-1}^{1-1} \lambda y_i^T (\bar{A}^{-1}) \bar{A}^{-1} y_j \tau d\xi d\eta + \int_{-1-1}^{1-1} \alpha \psi_i^T \psi_j \sqrt{\tau^2 + z^2} \tau dt, \\ M_{ij}^e &= \iint_{\Omega_e} c \tau \varphi_i \varphi_j \tau dz dz = \iint_{-1-1}^{1-1} c \tau \varphi_i \varphi_j \tau \Delta d\xi d\eta, \\ F_i^e &= \int_{\Gamma_e} \alpha T_c \psi_i \tau d\Gamma + \iint_{\Omega_e} \delta \varphi_i \tau d\Omega = \\ &= \int_{-1-1}^{1-1} \alpha T_c \psi_i \sqrt{\tau^2 + z^2} \tau dt + \iint_{-1-1}^{1-1} \delta \varphi_i \tau \Delta d\xi d\eta, \end{aligned} \quad /4/$$

і, просумувавши по всіх елементах e , в які входять вузли i і j , запишемо

$$K_{ij} = \sum_e K_{ij}^e, \quad M_{ij} = \sum_e M_{ij}^e, \quad F_i = \sum_e F_i^e$$

де

$$x_i = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \tau}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right)^T; \quad y_i = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \right)^T;$$

A - матриця Якобі переходу від глобальної системи координат (τ, z) до локальної (ξ, η) ; $\Delta = \det A = \frac{\partial \tau}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial \tau}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi}$;

ψ_{i_1} - функції з компактним носієм, які використовують для апроксимації елемента дуги кривої. Для чотирикутника з чотирма вузлами інтерполяції вони мають вигляд:

$$\psi_{i_1} = \frac{1}{2} (1-t), \quad \psi_2 = \frac{1}{2} (1+t) \quad ;$$

з вісьмома вузлами

$$\psi_1 = \frac{1}{2} (1-t)t, \quad \psi_2 = (1-t)(1+t), \quad \psi_3 = \frac{1}{2} (1+t)t;$$

з дванадцятьма вузлами

$$\psi_1 = -\frac{9}{16} (t+\frac{1}{3})(t-\frac{1}{3})(t-1),$$

$$\psi_2 = \frac{9}{16} (t+1)(t+\frac{1}{3})(t-\frac{1}{3}),$$

$$\psi_3 = \frac{27}{16} (t+1)(t-\frac{1}{3})(t-1),$$

$$\psi_4 = -\frac{27}{16} (t+1)(t+\frac{1}{3})(t-1).$$

Таким чином, обчислення коефіцієнтів матриць системи зводиться до обчислення на стандартному чотирикутнику Ω_0 або відрізьку $|t| \leq 1$ інтегралів [4], які знаходили за допомогою квадратурної формули Гауса. Для білінійного, біквадратичного та бікубічного законів апроксимації використовували відповідно формули Гауса другого, третього й четвертого порядку.

Слід відмітити, що матриця M і вектор F аналогічні тим, які одержують при розв'язуванні задачі стаціонарної теплопровідності.

Описаний вище алгоритм для розв'язування задач стаціонарної і нестаціонарної теплопровідності реалізований у вигляді комплексу Фортран-програм для ЕСМ БЭСМ-6. Алгоритм розв'язування аналогічних задач зі застосуванням трикутних елементів і лінійної інтерполяції невідомих функцій на них описаний у праці [3].

Досвід використання трикутних скінченних елементів показав, що для одержання достатньо точних результатів необхідно: використовувати досить густі сітки скінченних елементів, що приводить до потреби у зовнішніх завантажувачих пристроях на магнітних бараба-

нах /МБ/ чи магнітних дисках /МД/; здійснювати серію розрахунків на різних сітках дискретизації; порівняно великий час роботи ЕОМ.

Використання ізопараметричних скінченних елементів має ряд переваг. Наявність криволінійних сторін в елементах дає змогу достатньо точно на досить грубих сітках наближати криволінійні ділянки досліджуваних областей. Високі порядки апроксимацій сприяють одержанню результатів з необхідною точністю на рідких сітках, використовуючи менший обсяг оперативної пам'яті /ОП/ і менший час роботи ЕОМ.

За допомогою цього комплексу можна досягати необхідної точності наближеного розв'язку за рахунок h - збіжності /зменшення величини діаметра розбиття/, а також p - збіжності /підвищення точності за рахунок збільшення порядку апроксимуючих функцій/.

ОП ЕОМ при роботі комплексу розподіляється динамічно, тобто програмні модулі завантажуються на одне і те ж місце ОП. Всі матриці системи зберігаються стрічковим способом і, враховуючи їх симетричність, лише наддіагональні члени. Процес розв'язання задачі нестационарної теплопровідності припиняється тоді, коли температурне поле стає стаціонарним або досягається верхня межа інтервалу зміни часу.

Нижче наведені результати деяких чисельних досліджень. Розв'язана задача наведена у праці [3] з використанням чотирикутних ізопараметричних елементів. Якщо з використанням трикутних скінченних елементів для досягнення похибки менше 2% необхідно було 32 елементи, та такої ж точності можна досягти використовуючи вісім чотирикутних елементів з білінійною або чотири елементи з біквадратичною чи три з бікубічною апроксимацією температури. При цьому значно зменшився порядок системи рівнянь, а також скоротився час рахунку на ЕОМ.

У таблиці наведені результати розв'язування задачі про нагрів суцільного циліндра [2]. Температура циліндра в початковий момент

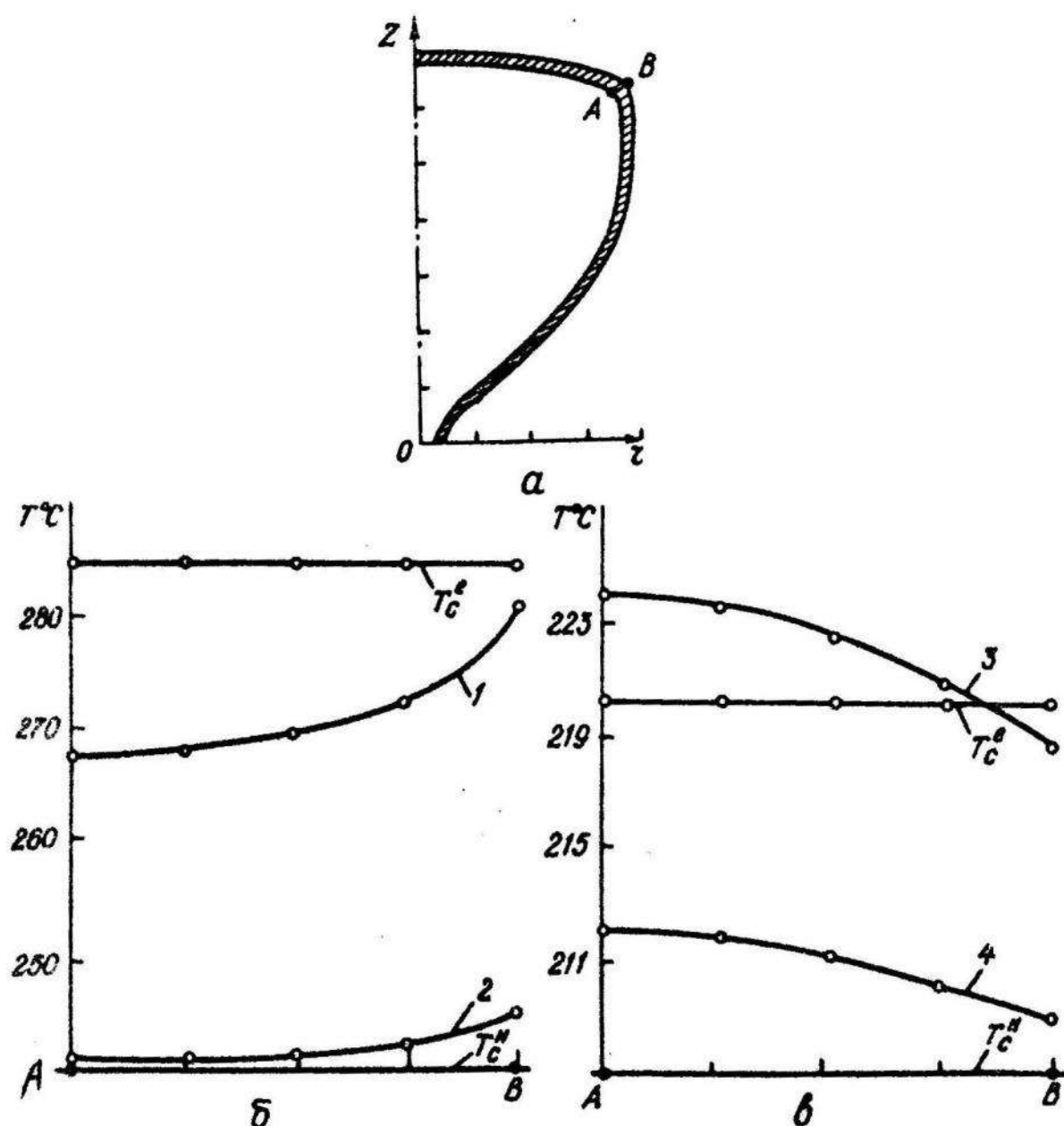
часу $T_0 = 323 \text{ K}$. Температура зовнішнього середовища змінюється за законом

$$T_c = 823 (1 + 0,5473 e^{-53,6t}).$$

Нагрів судільного циліндра

τ, c	τ		
	0,0	0,5	I
180	328	337	737
	327	351	712
	328	358	708
	316	365	709
	324	355	709
360	314	462	682
	358	449	769
	365	452	770
	373	455	769
	361	452	770
540	583	487	1056
	434	535	788
	438	536	487
	442	537	487
	436	537	487

Коефіцієнт температуропровідності $a = \frac{\lambda}{c\tau} = 0,557 \cdot 10^{-5} \frac{M^2}{c}$, критерій теплової подібності $Bi = 15$, радіус циліндра $r = 0,141 \text{ м}$. Величина кроку за часом $\Delta\tau = 60c$. При розв'язуванні /2/ верхнє число кожної графі відповідає $\theta = \frac{1}{3}$, друге - $\theta = \frac{1}{2}$ /схема Кранка-Ніколсона/, третє - $\theta = \frac{2}{3}$; четверте - $\theta = 0,875$, останнє - значенню точного розв'язку із праці [2]. Як видно із таблиці, для такого великого кроку за часом схема при $\theta = \frac{1}{3}$ розбіжна. Найкращі наближення дає схема при $\theta = \frac{2}{3}$. При кроці за часом $\Delta\tau = 1c$ на основі всіх схем одержуємо розв'язок, який відрізняється від точного менше, ніж на 2%.



На рисунку показаний розподіл температури в перерізі АВ балона кінескопа 6І ЛКЗЦ /рисунк, а/ в момент часу $\tau = 1800\text{с}$ /рисунк, б/ і $\tau = 3600\text{с}$ /рисунк, в/. Коефіцієнт температуропровідності $\alpha = 0,802 \frac{\text{мм}^2}{\text{с}}$. Температура зовнішнього середовища змінюється за законом:

на екрані балона

$$T_c^e = \begin{cases} 40 + 27\tau / 198, \\ 310 - 19(\tau - 1980) / 342, \end{cases}$$

якщо $0 \leq \tau \leq 1980\text{с}$,

якщо $1980\text{с} \leq \tau \leq 5400\text{с}$;

у нижній його частині

$$T_c^H = \begin{cases} 40 + 22\tau / 198, & \text{якщо } 0 \leq \tau \leq 1980\text{с}, \\ 260 - 11(\tau - 1980) / 342, & \text{якщо } 1980\text{с} \leq \tau \leq 5400\text{с}. \end{cases}$$

По осі Oz вздовж меридіонального перетину температура змінювалась за лінійним законом. Хоча й товщина балона кінескопа невелика, розподіл температур по товщині має характер складніший від лінійного. Було прораховано два варіанти задачі: T_c^H і T_c^H мінялись місцями. Криві 1, 3 – значення температури, якщо $T_c^H > T_c^H$, криві 2, 4 – температура, якщо $T_c^H < T_c^H$.

Автор вдячний Г.А.Шинкаренку за обговорення результатів роботи.

Список літератури: 1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. 2. Коваленко А.Л. Термоупругость. – К.: Вища школа, 1975. 3. Шинкаренко Г.А., Григорян С.С., Дияк І.І. Чисельне дослідження нестационарного конвективного теплообміну методом скінченних елементів. Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1980, вип. 16.

Стаття надійшла в редакцію 21.02.81

УДК 539.3

В.Д.Вовк, Г.А.Шинкаренко

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Нехай напружено-деформований стан тіла обертання, яке віднесе- не до циліндричної системи координат (r, θ, z) не залежить від змінної θ . Припустимо, що меридіанний перетин тіла $\theta = \text{const}$ займає обмежену зв'язну область Ω з кусково-гладкою границею $\partial\Omega$. Тоді розв'язування задачі теорії пружності зводиться до знаходження вектора зміщень $S = (u, v)^T$, який задовольняє рівняння рівнова-

гн [1]

$$\begin{cases} -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \phi_{rr}) + \frac{1}{r} \phi_{\theta\theta} - \frac{\partial}{\partial z} \phi_{rz} - F_z = 0, \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \phi_{rz}) - \frac{\partial}{\partial z} \phi_{zz} - F_z = 0 \end{cases} \quad /1/$$

в області Ω і крайові умови

$$u = \hat{u}, \quad v = \hat{v} \quad \text{на } \partial\Omega_1, \quad /2/$$

$$\begin{cases} \phi_{rz} \cos(n, r) + \phi_{zz} \cos(n, z) = \hat{f}_z, \\ \phi_{rz} \cos(n, r) + \phi_{zz} \cos(n, z) = \hat{f}_z \end{cases} \quad \text{на } \partial\Omega_2. \quad /3/$$

Тут $u = u(r, z)$, $v = v(r, z)$ - компоненти зміщення точки (r, z) вздовж осей відповідно Or, Oz ; $F = (F_r, F_z)^T$ - заданий вектор масових сил; $\hat{u}, \hat{v}$ - задані компоненти зміщень на $\partial\Omega_1$; $f = (\hat{f}_r, \hat{f}_z)^T$ - задані поверхневі навантаження на $\partial\Omega_2$; n - напрям зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$. Ненульові компоненти тензора напружень, що фігурують у рівняннях /1/-/3/, пов'язані зі складовими зміщень наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \phi_{rr} &= \lambda \operatorname{div} S + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r}, & \phi_{\theta\theta} &= \lambda \operatorname{div} S + 2\mu \frac{u}{r}, \\ \phi_{zz} &= \lambda \operatorname{div} S + 2\mu \frac{\partial v}{\partial z}, & \phi_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad /4/$$

де λ, μ - коефіцієнти Ляме.

Крайову задачу /1/-/3/ в варіаційній постановці можна сформулювати таким чином: серед усіх векторів таких, що задовольняють умову /2/ і $u, v \in W_2^1(\Omega)$, знайти такий, який задовольняє варіаційне рівняння

$$a(S, t) = \langle F, t \rangle + [f, t] \quad \forall t \in H_A, \quad /5/$$

де H_A - енергетичний простір оператора крайової задачі /1/-/3/

$$H_A = \left\{ t = (p, q) : p = 0, q = 0 \text{ на } \partial\Omega_1, p, q \in W_2^1(\Omega) \right\} \quad /6/$$

зі скалярним добутком

$$\begin{aligned} a(S, t) &= \int_{\Omega} \left[2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{up}{r} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \frac{\partial}{\partial r} (rp) \right] + \\ &+ \left[2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial q}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \lambda \frac{1}{r} \left(\frac{\partial q}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} (rp) \right) \right] + \end{aligned}$$

$$+ \left[2\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial q}{\partial z} \right) + \lambda \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial q}{\partial z} \right] \} \omega dz; \quad /7/$$

$\langle \dots \rangle$ і $[\dots]$ - скалярні добутки в $L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$ і $L_2(\partial\Omega_1) \times L_2(\partial\Omega_2)$.

Зобразимо область Ω у вигляді об'єднання криволінійних чотирикутників, внутрішності яких попарно не перетинаються, але їх границі можуть мати спільну сторону або вершину. Кожен чотирикутний елемент віднесемо до криволінійної системи координат (α, β) так, що $|\alpha| \leq 1$, $|\beta| \leq 1$. Якщо функція $q(\alpha, \beta)$ визначена на такому елементі, то апроксимуватимемо її одним з наступних інтерполяційних поліномів

$$g_m(\alpha, \beta) \quad m = 1, 2, 3/;$$

$$1/ \quad g_1(\alpha, \beta) = \sum_{i,j=-1}^1 \frac{1}{4} (1+i\alpha)(1+j\beta) g(i,j), \quad /8/$$

якщо інтерполювання здійснюється за значеннями функції у вершинах чотирикутника;

$$2/ \quad g_2(\alpha, \beta) = \sum_{i,j=-1}^1 \left\{ \frac{1}{4} (1+i\alpha)(1+j\beta)(\alpha+j\beta-1) g(i,j) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (1+\kappa\alpha + \eta\beta)(1-\eta^2\alpha^2 - \kappa^2\beta^2) g(\kappa, \eta) \right\}, \quad /9/$$

коли інтерполювання здійснюється за значеннями функції у вершинах чотирикутника та серединах його сторін;

$$3/ \quad g_3(\alpha, \beta) = \sum_{i,j=-1}^1 \left\{ \frac{1}{32} (1+i\alpha)(1+j\beta) [9(\alpha^2 + \beta^2) - 10] g(i,j) + \right. \\ \left. + \frac{9}{32} (1+\kappa\alpha + \eta\beta)(1-\eta^2\alpha^2 - \kappa^2\beta^2) (1+2\eta\alpha - 3\kappa\beta) g(i, j_1) + \right. \\ \left. + \frac{9}{32} (1+\kappa\alpha + \eta\beta)(1-\eta^2\alpha^2 - \kappa^2\beta^2) (1-3\eta\alpha + 3\kappa\beta) g(i_2, j_2), \right. \quad /10/$$

якщо вузлами інтерполювання служать вершини і точки поділу сторін елемента на три рівні частини.

У виразах /9/, /10/ прийнято

$$\kappa = \frac{i-j}{2}; \quad \eta = \frac{i+j}{2}; \quad i_1 = \frac{2i-j}{3}; \quad j_1 = \frac{i+2j}{3}; \quad i_2 = \frac{i-2j}{3}; \quad j_2 = \frac{2i+j}{3}.$$

Наведені поліноми лише формою запису відрізняються від інтерполяційних ерлендівового типу і успішно використовуються як для апрокс-

мацій невідомих зміщень, так і основних координат u, z у межах кожного елемента [2].

На основі поліномів /8/-/10/ будуть скінченно-вимірні простори V_m кусково-поліноміальних функцій, які володіють наступною властивістю апроксимації: для кожної функції $v \in W_2^m(\Omega)$ існує $V \in V_m$ така, що

$$\sum_{i=0}^m h^i \|v - V\|_i \leq Ch^{m+1} \|v\|_{m+1}, \quad /11/$$

де $\|\cdot\|_k$ - норма у просторі Соболева $W_2^k(\Omega)$, $C > 0$;

h - максимальний з діаметрів серед всіх елементів розбиття;

m - порядок поліному. Відзначимо, що в межах кожного елемента можна наближено записати

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^N u^i \varphi_i(\alpha, \beta) = \varphi \bar{u} & v &= \sum_{i=1}^N v^i \varphi_i(\alpha, \beta) = \varphi \bar{v} \\ z &= \sum_{i=1}^N z^i \varphi_i(\alpha, \beta) = \varphi \bar{z} & \bar{z} &= \sum_{i=1}^N z^i \varphi_i(\alpha, \beta) = \varphi \bar{z}, \end{aligned} \quad (12)$$

де $u^i, v^i, z^i, \bar{z}^i$ - вузлові значення зміщень і координат;

$\varphi_i = \varphi_i(\alpha, \beta)$ - функції, що визначаються виразами /8/-/10/, $N=4, 8, 12$.

Використовуючи рівняння /5/ та апроксимації /12/ на основі методики [3], дістаємо основні співвідношення методу скінченних елементів. Якщо вузлові значення зміщень на елементі представлені вектором $(\bar{u}^T, \bar{v}^T)^T$, то матриця жорсткості елемента складається з блоків $K_{ij} / i, j = 1, 2 /$ розміру $N \times N$, кожен з яких визначається виразами

$$\begin{aligned} K_{11} &= \iint_{-1-1}^{1-1} \left[2\mu \left(\frac{\partial \varphi^T}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{1}{z^2} \varphi^T \varphi + \frac{\partial \varphi^T}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \lambda \frac{1}{z^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} (z \varphi^T) \frac{\partial}{\partial \alpha} (z \varphi) \right] z \Delta d\alpha d\beta, \\ K_{12} &= \iint_{-1-1}^{1-1} \left[2\mu \frac{\partial \varphi^T}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \lambda \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial \alpha} (z \varphi^T) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] z \Delta d\alpha d\beta = K_{21}^T, \\ K_{22} &= \iint_{-1-1}^{1-1} \left[2\mu \left(\frac{\partial \varphi^T}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi^T}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \lambda \frac{\partial \varphi^T}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] z \Delta d\alpha d\beta, \end{aligned} \quad /13/$$

де похідні по основних координатах обчислюються за формулами:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\partial z}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} = \frac{1}{\Delta} \left(-\frac{\partial z}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \right), \quad \Delta = \frac{\partial z}{\partial \alpha} \frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial z}{\partial \beta} \frac{\partial z}{\partial \alpha}.$$

Компоненти вектора навантаження $R = (R_1, R_2)^T$, що відповідають масовим силам, знаходять як

$$R_1 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F_z \psi^T r \Delta d\alpha d\beta, \quad R_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F_z \psi^T r \Delta d\alpha d\beta. \quad /14/$$

Якщо сторона елемента, скажімо $\beta = 1$, лежить на границі $\partial \Omega_2$,

на яку діє нормальне навантаження інтенсивності f , тоді

$f_z^A = f \cos(n, z)$, $f_z^B = f \sin(n, z)$ і до компонент R_1, R_2 вектора навантаження необхідно додати інтеграли

$$-f \int_{-1}^1 \psi^T \frac{\partial z}{\partial \alpha} r d\alpha, \quad f \int_{-1}^1 \psi^T \frac{\partial z}{\partial \alpha} r d\alpha. \quad /15/$$

Значення коефіцієнтів матриць жорсткості і векторів навантаження обчислюються за квадратурними формулами Гаусса. При цьому, оскільки вид базисних функцій ψ не залежить від геометрії конкретного елемента, один раз і назавжди ці функції разом зі своїми першими похідними табулюються у вузлах квадратурної формули. Відзначимо також, що при інтегруванні у виразах /14/, /15/ доцільно замінити масові сили та поверхневі навантаження інтерполяційними поліномами виду /8/-/10/. Цей прийом дає змогу виконати чисельне інтегрування.

Описаний алгоритм МСЕ реалізований у вигляді комплексу Фортран-програм для ЕОМ, за допомогою якого можна: 1/ автоматично будувати чотирикутні сітки скінченних елементів; 2/ нумерувати вузли таким чином, щоб мінімізувати ширину стрічки матриці системи рівнянь МСЕ; 3/ використовувати апроксимації виду /8/-/10/ і квадратурні формули Гаусса різних порядків; 4/ розв'язувати системи рівнянь МСЕ з використанням зовнішньої пам'яті; 5/ обчислювати головні напруження та їх напрямки у вузлах сітки та вузлах квадратурних формул і т.п.

Наведемо деякі результати чисельних досліджень. Для вивчення характеру збіжності наближених розв'язків залежно від густини сітки та порядку апроксимації на елементі розв'язували задачу про пружну рівновагу жорстко заземленої нетонкої пластини з радіусом $R=1$ і товщиною $h = 0,3$ під дією постійного тиску інтенсивності P . Коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини $\nu = 0,3$. У таблиці наведено деякі результати розрахунків. У першій графі поміщено розв'язок, одержаний з використанням апроксимації /8/ на сітці з 8×20 елементів, другій – розв'язок з апроксимацією /9/ на сітці 4×10 елементів, третій та четвертій – розв'язок з апроксимацією /10/ відповідно на сітках 2×5 і 4×10 елементів. Витрати машинного часу для кожного випадку становлять 70, 50, 30, 150 с.

Розрахункові зміщення і напруження в пластинці

(r, z)	$U_z \times 10^3 \frac{E}{P}$	$-U_r \times 10^3 \frac{E}{P}$	$-\phi_z \times 10^3 / \rho$	$-\phi_\theta \times 10^3 / \rho$	$-\phi_z \times 10^3 / \rho$
0.2, 0.3	736	7943	554	580	153
	739	8017	542	564	106
	735	7938	534	556	96
	739	8030	538	561	100
0.6, 0.3	1470	4083	81	311	139
	1488	4128	95	310	111
	1473	4068	98	292	104
	1490	4136	97	308	98

Результати, наведені у таблиці, ілюструють поведінку наближених розв'язків у характерних точках навантаженої поверхні з радіальними координатами $r/R = 0.2, 0.6$. Відзначимо, що у розглядуваних точках точне значення $\phi_z / \rho = -1$. Найбільш точні характеристики розв'язку дістають з використанням апроксимації /10/, але вона вимагає дещо більших затрат машинного часу на реалізацію.

На рис. 1, 2 показано епюру розподілу меридіанних ϕ_1 і кільцевих ϕ_2 напружень у точках зовнішньої поверхні балона кількох СІ МПа. Балон навантажено зовнішнім тиском інтенсивності P .

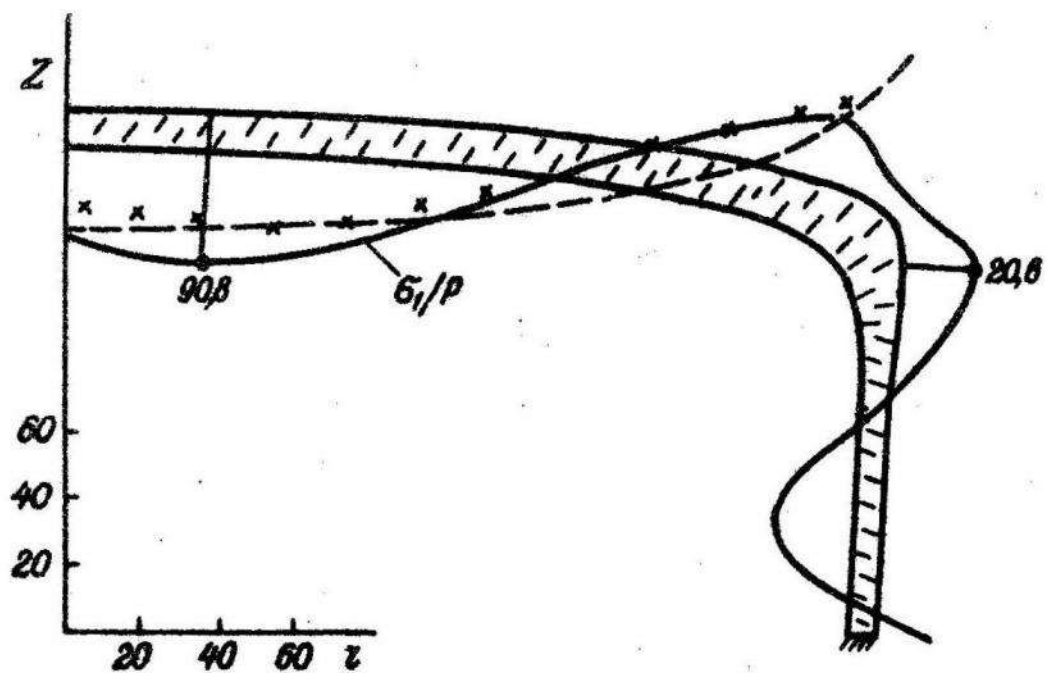


Рис. I.

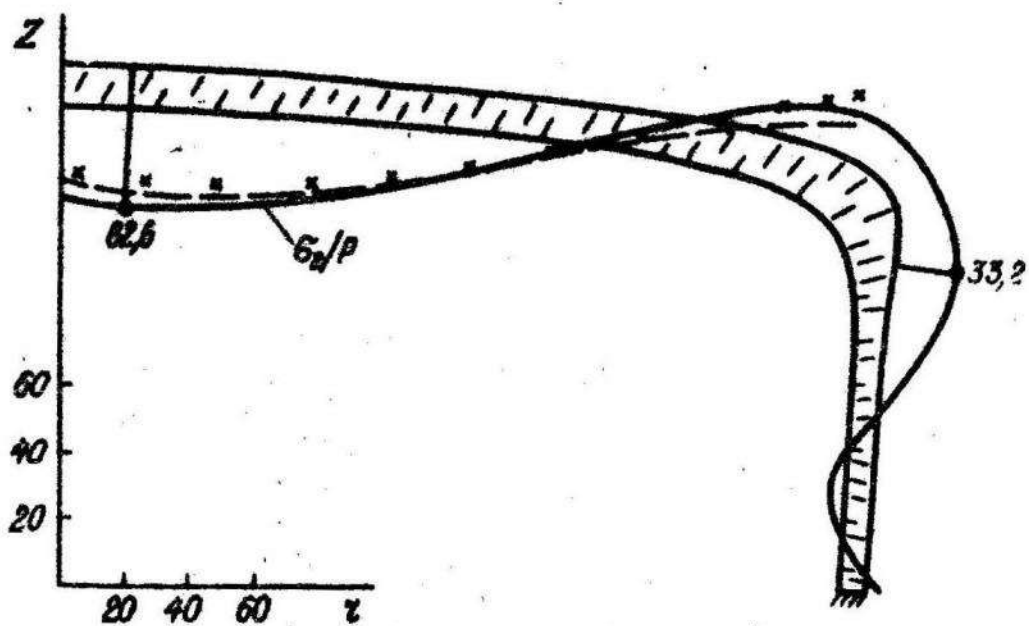


Рис. 2.

$\nu = 0,2$, нижній край оболонки жорстко закріплений. Суцільною лінією показані результати цієї методики, одержані на сітці з двома елементами по товщині і шістнадцятьма по меридіану. Зірочками відзначено дані тензометрування, а пунктирною лінією – результати,

одержані С.С.Григориним в використанні теорії оболонок Кірхгофа-Лява.

Список літератури: 1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. - М.: Мир, 1975. 2. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, 1975. 3. Шинкаренко Г.А., Марчук М.В. Розрахунок тривимірних температурних полів методом скінченних елементів. - Львів: Вища школа, 1979.

Стаття надійшла в редколегію 21.02.81

УДК 518:517.948

М.Я.Бартін, Л.Л.Роман

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ТИПУ НЬЮТОНА-КАНТОРОВИЧА
У НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧАХ МЕХАНІКИ

У праці [2] розглянута задача визначення у циліндричній оболонці з залежними від температури характеристиками матеріалу осесиметричних температурних полів, що забезпечують максимально низький рівень температурних напруг. У праці [3] аналізується така ж задача при умові, що характеристики матеріалу не змінюються при нагріванні. Її розв'язок можна одержати як частинний випадок задачі [2] при $\lambda(x) = 0$. Для розв'язування задачі застосовують метод, який полягає в апроксимації нелінійної системи диференціальних рівнянь високого порядку нелінійною системою алгебраїчних рівнянь, знаходження розв'язку одержаної системи градієнтними методами. При цьому внаслідок апроксимації виникає неусуєнна похибка обчислень.

Більш доцільно використовувати зведення нелінійної крайової задачі до нелінійної системи алгебраїчних рівнянь наступним чином.

Введенням нових змінних

$$\begin{aligned} z_1 &= W_1 - \varepsilon_T dT_1, \quad z_2 = \frac{dW_1}{dx}, \quad z_3 = \frac{d^2W_1}{dx^2}, \quad z_4 = \frac{d}{dx} \left(E_1 \frac{d^2W_1}{dx^2} \right), \quad z_5 = T_1, \\ z_6 &= \lambda_1, \quad z_7 = \frac{d\lambda_1}{dx}, \quad z_8 = \frac{d^2\lambda_1}{dx^2}, \quad z_9 = \frac{d^3\lambda_1}{dx^3} \end{aligned}$$

/1/

задачу із [2] зведемо до крайової задачі

$$\frac{d\bar{z}}{dx} = \bar{f}(x, \bar{z})$$

/2/

$$\bar{g}(\bar{z}_0, \bar{z}_1) = \bar{d},$$

/3/

де $\bar{z} = (z_1, z_2, \dots, z_9)$; $\bar{d} = 0$;

$$\bar{f}(x, \bar{z}) = \begin{pmatrix} z_2 - \varepsilon_1 a \left(\frac{d\alpha_1}{dz_5} + \alpha_1 \right) \\ z_3 \\ \frac{1}{E_1} \left(z_4 - \frac{dE_1}{dz_5} a \cdot z_3 \right) \\ -4\rho^* E_1 z_1 \\ a \frac{d^2 \alpha_1}{dz_5^2} \\ z_7 \\ z_8 \\ z_9 \\ -2z_3 \frac{dE_1}{dz_5} a + z_4 \left[\frac{d^2 E_1}{dz_5^2} a^2 + b \frac{dE_1}{dz_5} \right] 4\rho^* E_1 z_6 \end{pmatrix}$$

$$\bar{g}(\bar{z}) = \begin{pmatrix} z_2(0) \\ z_3(0) \\ z_5(0) - T_0 \\ z_7(0) \\ z_8(0) \\ z_4(1) \\ z_5(1) \\ z_3(1) \\ z_9(1) \end{pmatrix}$$

при відомих виразах для a і b , які не наводимо внаслідок громіздкості запису.

Задача /2/, /3/ еквівалентна системі нелінійних алгебраїчних рівнянь [4]

$$\bar{q}(\bar{z}_0) = 0$$

/4/

при

$$\bar{q}(\bar{z}_0) = \begin{pmatrix} z_4(z_1^0, z_2^0, \dots, z_9^0, 1) \\ z_5(z_1^0, z_2^0, \dots, z_9^0, 1) \\ z_8(z_1^0, z_2^0, \dots, z_9^0, 1) \\ z_9(z_1^0, z_2^0, \dots, z_9^0, 1) \end{pmatrix}$$

і задачі Коші

$$\frac{d\bar{z}}{dx} = \bar{f}(x, \bar{z}), \quad \bar{z}(0) = \bar{z}_0, \quad /5/$$

де $\bar{z}_0 = (z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0)$ - розв'язок системи /4/, для знаходження якого можна використати різницьвий аналог одного з методів типу Ньютона-Канторовича. Враховуючи, що при використанні методу Ньютона-Канторовича для розв'язування крайових задач велика кількість обчислень витрачається на обчислення значень функції $\bar{q}(\bar{z})$ і матриці Якобі з різничевого аналогу, доцільно використовувати рекурсивні методи [1] з оптимальним вибором параметра рекурсії. Для розв'язування системи /4/ застосовували обчислювальну схему [1] і, як показала практика, оптимальною є глибина рекурсії $p_0 = 3$.

Слід також відзначити, що при розв'язуванні задачі Коші необхідно використовувати методи, які дають розв'язок у точці $X = 1$ з достатньо високою точністю, наприклад метод Рунге-Кутта, Адамса, Мілна та ін.

Числові дослідження виконані для циліндричної оболонки з параметрами $\rho = 10, h/R = 1/20, \nu = 0,3$, виготовленої з матеріалу ІХ18Н9Т. Температурні залежності функцій E і α , брали лінійні

$$E_1(T_1) = 1 - 0,25T_1, \\ \alpha_1(T_1) = 1 + 0,47T_1$$

і квадратичні

$$E_2(T_1) = 1 - 0,25T_1 - T_1(T_1 - 0,95), \\ \alpha_2(T_1) = 1 + 0,47T_1 + T_1(T_1 - 0,97).$$

Обчислення проводили на ЕСМ 6С - 1022.

Екстремальні температурні поля та напруження по довжині оболонки для лінійної залежності характеристик матеріалу зображені на рис. 1, при цьому температура віднесена до значення T_0 , а напруження до значення $\alpha_0 E_0 T_0$.

Осередні напруження σ_z на внутрішній поверхні рівні за значенням σ_z^+ і протилежні за знаком, тому на рис. 1 не показані.

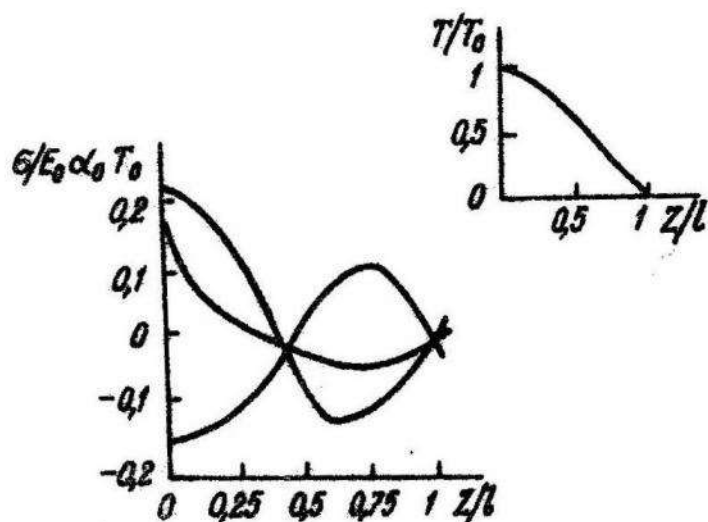


Рис. 1.

Вплив температурної залежності характеристик матеріалу на оптимальні температурні поля і напруги зображено на рис. 2, 3. Суцільна лінія відповідає лінійній залежності температурних характеристик, штрихпунктирна - квадратичній апроксимації; ностійним характеристикам $E_f = 0,75$, $\alpha_f = 1,12$ - пунктирна.

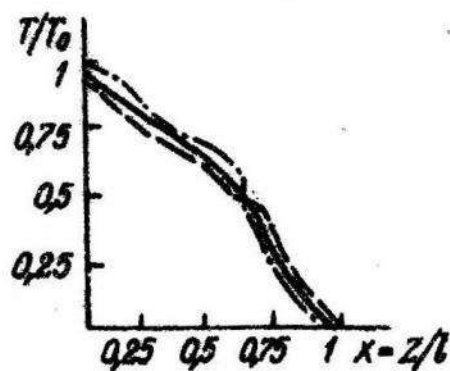


Рис. 2.

Задача [3] обчислена для вказаних числових даних при лінійній залежності характеристик $E_f(T)$, $\alpha_f(T)$ і $\kappa = 0,5$.

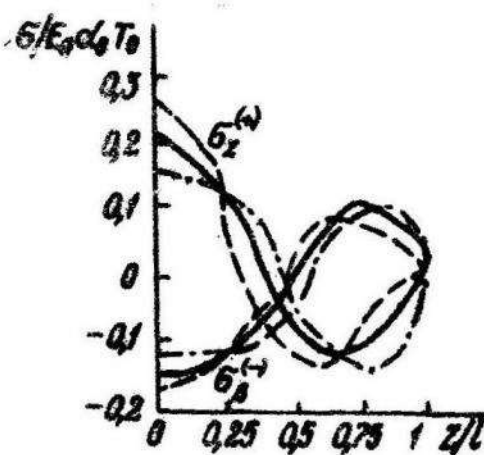


Рис. 3.

Вплив температурної залежності характеристик матеріалу на оптимальні температурні поля для відльної оболонки зображено на рис. 4. Крива 1 відповідає оптимальному розподілу температур, крива 2 - розподілу температур для постійних характеристик.

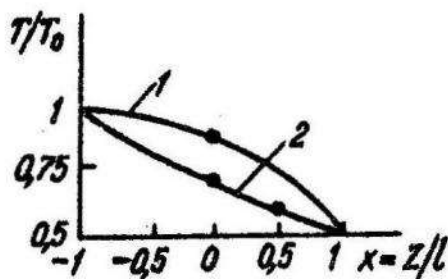


Рис. 4.

Список літератури: 1. Бартиш М.Я., Шербина Ю.Н. Итерационные формулы, получаемые с помощью рекурсии. - В кн.: Мат. сб. К., 1976. 2. Бурак Я.И., Огірко И.В. Оптимальный нагрев цилиндрической оболочки с зависящими от температуры характеристиками материала. - Мат. методы и физ.-мех. поля, 1977, вып. 5. 3. Огірко И.В. Исследование оболочек с учетом изменения свойств материала от температуры. Строит. техника и расчет сооружений, 1977, вып. 9. 4. Шаманский В.Е. Методы численного решения краевых задач на ЭВМ. - К.: Наукова думка, 1966, ч. 2.

Стаття надійшла в редколегію 06.12.80

УДК 539.3:518

І.В.Огірко, Л.Л.Роман

ИТЕРАЦИОННЫЙ РОЗВ'ЯЗОК НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ

ПРО МІНІМАЛЬНИЙ ПРОГІН ПОЛОГОЇ ОБОЛОНКИ

Розглянемо гнучку коротко защемлену полого оболонку, прямокутну в плані $2a \times 2b$, віднесену до криволінійних координат x, y , які відлічують по лініях головних кривин. На оболонку /рис. 1/ в області $\Omega_1 \{ |x| \leq a_1, |y| \leq b_1 \}$ діє температурне поле $t(x, y)$ а по краю області $\Omega_2 \{ a_1 \leq |x| \leq a, b_1 \leq |y| \leq b \}$ силове навантаження інтенсивності $q(x, y)$. Причому силове на-

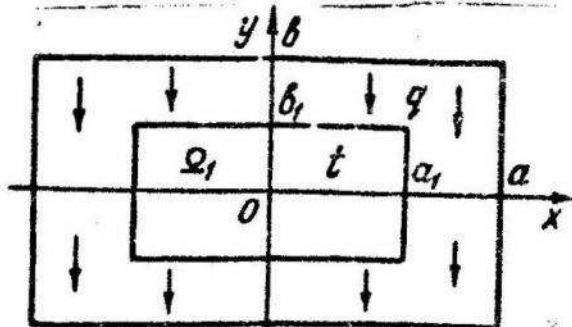


Рис. 1.

вантаження задане, а рівень температури можна міняти в межах

$$0 \leq t(x, y) \leq t_3 \quad /1/$$

при заданих умовах в центрі та на краю

$$t(0,0) = t_3, \quad t(x, \pm b_1) = 0, \quad t(\pm a_1, y) = 0, \quad /2/$$

а також умовах гладкості

$$t_x(0,0) = 0, \quad t_y(0,0) = 0, \quad t_x(x, \pm b_1) = 0, \quad t_y(\pm a_1, y) = 0, \quad /3/$$

/нижні індекси x, y - означають диференціювання; t_3 - задана температура/.

Необхідно так розподілити функцію температури $t(x, y)$ в рамках /1/-/3/, щоб прогин W оболонки був мінімальний при обмеженні на рівень максимального напруження $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$

$$\max_{|x| \leq a, |y| \leq b} \{ \sigma_x^{\pm}, \sigma_y^{\pm}, \sigma_{xy}^{\pm} \} \leq K[\sigma]_g \quad /4/$$

як на верхній знак $+/$, так і на нижній $-/$ поверхні оболонки $[\sigma]_g$ - допустиме напруження для даного матеріалу; K - коефіцієнт/.

За критерій оптимальності приймемо функцію

$$\min \left\{ \max_{|x| \leq a, |y| \leq b} |W(x, y)| \right\}. \quad /5/$$

Нелінійними обмеженнями - рівняннями у задачі виступають рівняння термопружності гнучкої оболонки [1], які відносно переміщень W, U, V мають вигляд:

$$\begin{aligned} & - \frac{h^3}{12} \nabla^4 W - 2\mu_2 \alpha t \nabla^2 W + U_x (\kappa_1 + \nu_3 W) + 2\mu_1 U_y W_{xy} + 2\mu_1 V_x W_{xy} + \\ & + V_y (\kappa_2 + \nu_4 W) + [-\kappa_1 W + 0.5(W_x^2 + \nu W_y^2)](\kappa_1 + W_{xx}) + [-\kappa_2 W + \\ & + 0.5(W_y^2 + \nu W_x^2)](\kappa_2 + W_{yy}) + 2\mu_1 W_x W_y W_{xy} = \alpha t(\kappa_1 + \kappa_2), \end{aligned} \quad /6/$$

$$\nabla_3 U + \mu_2 V_{xy} - \kappa_1 W_x + \mu_2 W_{xy} W_y + W_x \nabla_1 W = 0,$$

$$\nabla_2 V + \mu_2 U_{xy} - \chi_2 W_y + \mu_2 W_x W_{xy} + W_y \nabla_2 W = 0, \quad /8/$$

$$\text{де } \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$\nabla_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad \nabla_2 = \mu_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad \nabla_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$\nabla_4 = \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad \chi_1 = \kappa_1 + \nu \kappa_2, \quad \chi_2 = \nu \kappa_1 + \kappa_2, \quad \mu_1 = 0.5(1-\nu); \quad \mu_2 = 0.5(1+\nu);$$

h - товщина оболонки; κ_1, κ_2 - кривини оболонки по осях x, y ; E - модуль пружності; α - коефіцієнт температурного лінійного розширення; ν - коефіцієнт Пуассона.

Граничні умови

$$W=0, U=0, V=0, \quad \text{при } x=\pm a, y=\pm b, \quad /9/$$

$$W_y /_{y=\pm b} = 0, \quad W_x /_{x=\pm a} = 0.$$

Розв'язок екстремальної задачі /5/ при обмеженнях /1/-/4/, /6/-/9/ здійснюється згідно з методикою [2] чисельно на ЕОМ в три етапи:

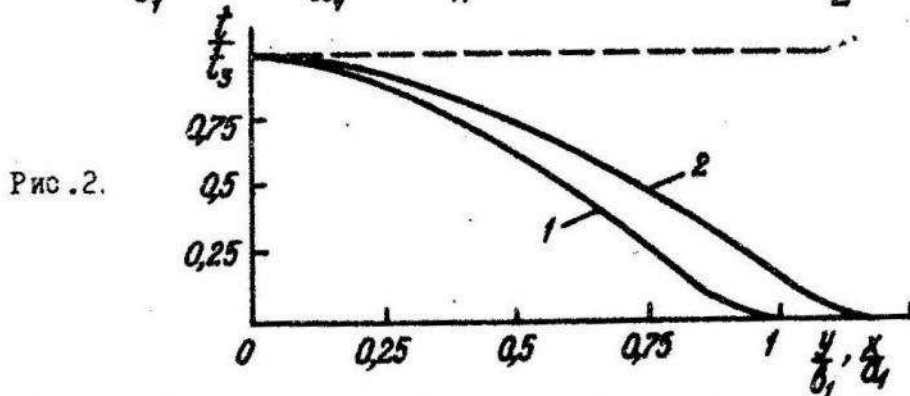
а/ будуть дискретний аналог задачі /1/-/9/ методом сіток з підвищеною точністю, при цьому на поверхні оболонки вводять вузли (i, j) , де $i = \overline{0, n}$; $j = \overline{0, m}$;

б/ формують підпрограму для знаходження значень функцій W, U, V у вузлах (i, j) з крайової задачі /6/-/9/ ітераційним методом верхньої релаксації;

в/ оптимальні значення розподілу температури t_{ij} в області Ω , шукають ітераційно з кроком δ_y методом локальних варіацій.

Для оцінки точності розв'язку здійснювали перерахунок задачі на ЕОМ при різних сітках розбиття області Ω оболонки.

Як приклад показані результати для сталевोї /матеріал ІХІВ Н 9 Т/ пологої сферичної $K_I = K_2 = 1/R$ оболонки з параметрами $\frac{a}{b} = 1,2$; $\frac{a_1}{b_1} = 1,2$; $\frac{a}{a_1} = 2$; $\frac{R}{h} = 100$; $K = 0,5$; $\frac{q}{E} = 10$.



На рис. 2 показані графіки розподілу температури у перетинах $X = 0$ /лінія 1/ і $Y = 0$ /лінія 2/ оболонки.

Список літератури: І. Безухов Н.П., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И. и др. Расчет на прочность, устойчивость и колебание в условиях высоких температур. М.: Машиностроение, 1968.
2. Огирко И.В. Оптимизация термонапряжений и деформаций в гибких оболочках с учетом температурной зависимости характеристик материала на основе применения итерационных методов: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. - Львов, 1978.

Стаття надійшла в редколегію 04.08.81

УДК 624.07:534.1

Б.І.Гайвась, В.М.Фарат

ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ І СТІЙКОСТІ КОНІЧНОГО СТЕРЖНЯ ЗІ ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ МАСАМИ, ЩО ЗНАХОДЯТЬСЯ НА УЗАГАЛЬНЕНІЙ ВІНКЛЕРОВІЙ ОСНОВІ

У праці [1] вказано спосіб побудови характеристичного ряду крайової задачі, що описує поперечні коливання стиснутих пружних стержнів змінної жорсткості з зосередженими масами та сингулярностями у пружній основі.

Застосуємо цей спосіб до дослідження коливань і стійкості конічного конічного стержня з зосередженими масами на сингулярній

основі при сумісній дії консервативної і слідкуючої сил на вільному кінці $x = 0$, вважаючи, що кінець $x = l$ пружно закріплений. Включення у розподілені параметри зосереджені в точках $x_i \in \overline{0, l}$.

Приймаючи позначення праці [1] маємо

$$f(x) = (a + bx)^4, \quad g(x) = (a + bx)^2, \quad /1/$$

де 1/ $a = 1 - \alpha$, $b = \alpha$ для стержня, зображеного на рис. 1; 2/ $a = 1$, $b = -\alpha$ для стержня, зображеного на рис. 2; $\alpha = \frac{l}{h}$ - параметр конусності; l - довжина зрізаного конуса; h - довжина повного конуса.

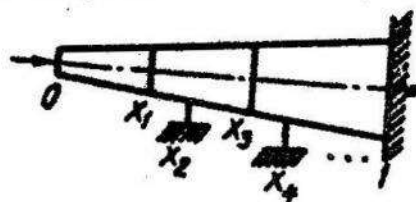


Рис. 1.

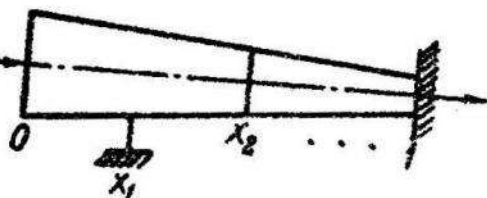


Рис. 2.

Фундаментальна система розв'язків рівняння /9/ праці [1] відома і має вигляд

$$\varphi_1(x) = (a + bx) \left[\frac{a-b}{\sqrt{\rho}} \sin \frac{\sqrt{\rho} x}{a(a+bx)} + \frac{1}{a} \cos \frac{\sqrt{\rho} x}{a(a+bx)} \right],$$

$$\varphi_2(x) = (a + bx) \left[-\frac{b}{\sqrt{\rho}} \sin \frac{\sqrt{\rho} x}{a(a+bx)} + \frac{1}{a} \cos \frac{\sqrt{\rho} x}{a(a+bx)} \right], \quad /2/$$

$$G(x, \xi) = \frac{(a+bx)(a+b\xi)}{\sqrt{\rho}} \sin \frac{\sqrt{\rho}(x-\xi)}{(a+bx)(a+b\xi)},$$

$$\psi(x, \xi) = -(a+bx)(a+b\xi) \eta(\theta).$$

$$\eta(\theta) = \frac{1}{\rho} \sin \sqrt{\rho} \theta - \theta, \quad /3/$$

$$\theta = \frac{x - \xi}{(a+bx)(a+b\xi)}.$$

Введемо позначення

$$\Omega_i = \frac{1-x_i}{(a+bx_i)(a+b)}, \quad \chi_m = \frac{1-a\theta_m(a+b)}{1+b\theta_m(a+b)},$$

$$\Omega_{ij} = \frac{x_i - x_j}{(a+bx_i)(a+bx_j)}, \quad \Omega_{ii} = \frac{x_i}{(a+bx_i)a},$$

$$\chi_{im} = \frac{x_i - a(a+bx_i)\theta_m}{1+b(a+bx_i)\theta_m}. \quad /4/$$

Використовуючи рекурентні співвідношення /19/ [1] приходимо після деяких перетворень до розрахункових формул, необхідних для обчислення коефіцієнтів A_m характеристичного ряду:

$$\begin{aligned} A_{ikh}^m &= (-1)^m \frac{(a+bx_i)^{\delta m}}{\rho^m} \int_0^{\Omega_{ii}^m} \dots \int_{\theta_{m-1}}^{\Omega_{ij}^m} \varphi_{2m-1}^i(\theta) \Phi_{ko}^H(\chi_{im}) d\theta_m \dots d\theta_1 + \\ &+ \sum_{j=1}^{i-1} \left\{ (-1)^m \frac{(a+bx_i)^{\delta m}}{\rho^m} \int_0^{\Omega_{ij}^m} \dots \int_{\theta_{m-1}}^{\Omega_{ij}^m} \varphi_{2m-1}^i(\theta) \Phi_{koj}(\chi_{im}) d\theta_m \dots d\theta_1 + \right. \\ &+ \sum_{\mu=1}^{m-1} (-1)^{m-\mu} \frac{(a+bx_i)^{\delta(m-\mu)}}{\rho^{m+1-\mu}} \int_0^{\Omega_{ij}^m} \dots \int_{\theta_{m-1-\mu}}^{\Omega_{ij}^m} \varphi_{2m-\mu}^i(\theta) \sum_{q=1}^2 \left[\eta_{qj}^{\mu-1} A_{jq-1k}^{\mu-1} + \right. \\ &+ \left. \eta_{qj}^0 A_{jq-1k}^{\mu} \right] (-1)^{q-1} \psi_{\xi}^{(q-1)}(\chi_{im-\mu}, x_j) d\theta_{m-\mu} \dots d\theta_1 + \\ &+ \left. \frac{1}{\rho} \sum_{q=1}^2 \left[\eta_{qj}^1 A_{jq-1k}^{m-1} + \eta_{qj}^0 A_{jq-1k}^m \right] (-1)^{q-1} \left[\psi_{\xi}^{(q-1)}(x, x_j) \right]_{x/x=x_j}^{(2)} \right\}, \\ \Phi_{km}^{(2)}(1) &= (-1)^m \frac{(a+b)^{\delta m}}{\rho^m} \int_0^{\frac{a(a+b)}{1+b(a+b)}} \dots \int_{\theta_{m-1}}^{\frac{a(a+b)}{1+b(a+b)}} \varphi_{2m-1}^0(\theta) \Phi_{ko}^H(\chi_m) d\theta_1 \dots d\theta_m + \\ &+ \sum_{i=1}^n \left\{ (-1)^m \frac{(a+b)^{\delta m}}{\rho^m} \int_0^{\Omega_i^m} \dots \int_{\theta_{m-1}}^{\Omega_i^m} \varphi_{2m-1}^0(\theta) \Phi_{koi}(\chi_m) d\theta_1 \dots d\theta_m + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\mu=1}^{m-1} (-1)^{m-\mu} \frac{(a+b)^{s(m-\mu)}}{\rho^{m+1-\mu}} \int_0^{Q_i} \dots \int_{\theta_{m-\mu-1}}^{Q_i} \varphi_{i, m-1-\mu}(\theta_\nu) \sum_{q=1}^2 [\eta_{qi}^1 \Lambda_{i, q-1, k}^{\mu-1} + \\
& + \eta_{qi}^0 \Lambda_{i, q-1, k}^\mu] (-1)^{q-1} \psi_{\xi}^{(q-1)}(\chi_{m-\mu}, x_i) d\theta_{m-\mu} \dots d\theta_1 + \\
& + \frac{1}{\rho} \sum_{q=1}^2 [\eta_{qi}^1 \Lambda_{i, q-1, k}^{m-1} + \eta_{qi}^0 \Lambda_{i, q-1, k}^m] (-1)^{q-1} \left[\psi_{\xi}^{(q-1)}(\chi, x_i) \right]_{\chi/x=1}^{(2)}, \quad (5)
\end{aligned}$$

де

$$\varphi_{i\ell}(\theta_\nu, x) = \frac{f_\ell(\theta_i, x) \prod_{n=1}^{\ell} \eta(\theta_{n+1} - \theta_\nu)}{[1 + (a+bx)b\theta_{\ell+1}]^5 \prod_{\nu=1}^5 [1 + b(a+bx)\theta_\nu]^6};$$

$$\varphi_{i\ell}^1(\theta_\nu) = \varphi_{i\ell}(\theta_\nu, x_i); \quad \varphi_{i\ell}^0(\theta_\nu) = \varphi_{i\ell}(\theta_\nu, 1);$$

/6/

$$f_0(\theta_i, x) = \eta(\theta_i);$$

$$f_1(\theta_i, x) = \frac{1}{(a+bx)^2} \{ \eta'(\theta_i) + b(a+bx)\eta(\theta_i) \};$$

$$f_2(\theta_i, x) = \frac{\rho}{(a+bx)^4} [\eta(\theta_i) + \theta_i].$$

З використанням цих формул характеристичне рівняння для ковального стержня набуває вигляду

$$\sum_{m=0}^{\infty} \Lambda_m \omega^{2m} = 0, \quad \Lambda_m = b_{mk} + G_1 d_{mk}. \quad /7/$$

Коефіцієнти b_{mk} , d_{mk} визначають через $\Phi_{k\alpha}^{(m)}(1)$ з допомогою співвідношень /29/ [1].

Для жорсткозаклепеного кінця $X = I$ /для випадку I, зображеного на рис. I/ шляхом граничного переходу з характеристичного ряду /7/ отримуємо характеристичний поліном

$$\Lambda_0 + \Lambda_1 \omega^2 + \Lambda_2 \omega^4 = 0,$$

$$\text{де } A_0 = 1 + \gamma_1 \alpha_1 \left[\eta' \left(\frac{1}{\alpha_1} \right) + \alpha \eta \left(\frac{1}{\alpha_1} \right) \right];$$

$$A_1 = \eta \left\{ \left[\left(x_1 - 1 + \gamma_1 \alpha_1 \left[(\alpha_1 + \alpha x_1) \eta(\Omega_n) - \eta \left(\frac{1}{\alpha_1} \right) \right] \right) \right] \times \right. \\ \left. + \frac{\psi''(x, \xi)}{\rho} \Big|_{x=1} + \frac{\eta(l, x_1)}{\rho} \left\{ 1 + \gamma_1 \alpha_1 \left[\eta' \left(\frac{1}{\alpha_1} \right) + \alpha \eta \left(\frac{1}{\alpha_1} \right) \right] \right\} \right] - \right. \\ \left. \eta_2 \left\{ 1 + \gamma_1 \alpha_1 \left[\frac{\eta'(\Omega_n)}{\alpha_1 + \alpha x_1} + \alpha \eta(\Omega_n) \right] \right\} \psi''_{x\xi}(x, \xi) \Big|_{x=1} \right\}; \quad /8/$$

$$A_2 = \eta_1 \eta_2 \left\{ 1 + \alpha_1 \gamma_1 \left[\frac{1}{\alpha_1 + \alpha x_1} \eta'(\Omega_n) + \alpha \eta(\Omega_n) \right] \right\} \left[\psi''_{x\xi} \psi - \psi'_{\xi} \psi'_x \right] \Big|_{x=1};$$

$$\alpha_1 = 1 - \alpha; \quad \gamma_1 = 1 - \gamma; \quad \eta_1 = \frac{M_1 l^3}{EJ}; \quad \eta_2 = \frac{I_1 l}{EJ};$$

який у випадку $\alpha = 0$ /циліндричний стержень/ збігається з результатом праці [2].

Розрахунки проводились на ЕОМ. Чисельно досліджено вплив параметрів неконсервативності, конусності і точки розміщення зосередженої маси на критичні параметри навантаження при фіксованому $\eta'_1 = 1$
 $\eta'_2 = 0$.

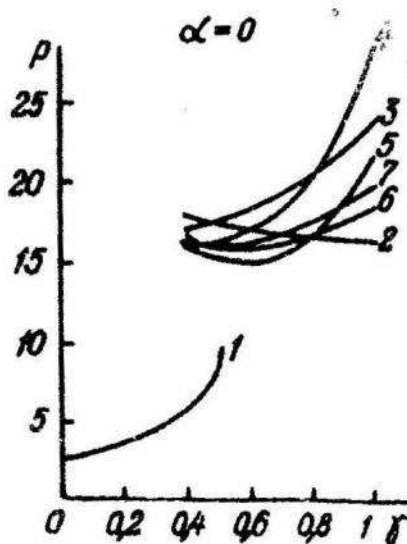


Рис. 3.

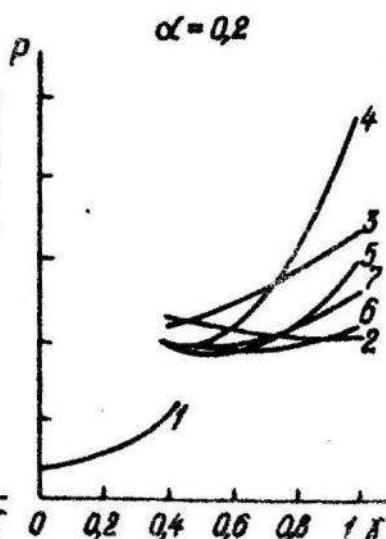


Рис. 4.

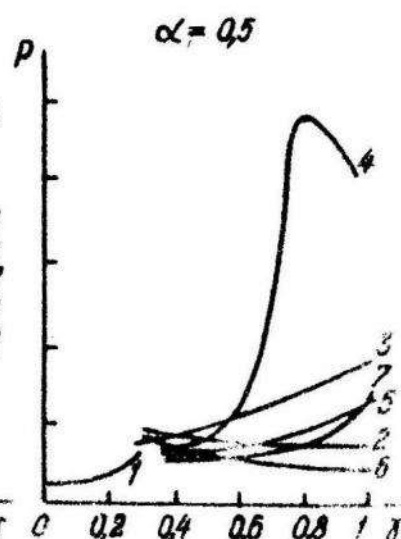


Рис. 5.

Як видно з рис. 3-5 статична втрата стійкості /крива I/ не залежить від зосередженої маси, а лише від параметрів конусності α і неконсервативності γ .

Для циліндричного стержня ($\alpha=0$) статична втрата стійкості може наступити тільки при параметрі неконсервативності $\gamma \leq 0,5$, для конічного ($\alpha = 0,2$) при $\gamma \leq 0,42$, при $\alpha = 0,5$ - при $\gamma \leq 0,3$. Криві 2-7 відповідають флатеру. Флатерні криві залежать як від параметрів конусності, неконсервативності, так і від точки розміщення маси. Точці прикладення маси $X_1 = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$; і відповідають криві 2-7.

Список літератури: І. Г а й в а о в Б.И. К исследованию малых колебаний и устойчивости многопараметрических стержневых систем. - Рукопись деп. ВИНТИ 1980, № 2743-80. 2. Л е о н о в М.Я. Основы механики упругого тела.-Фрунзе, Изд-во АН Кирг. ССР, 1963.

Стаття надійшла в редколегію 16.04.81

УДК 533.6.013.42

О.В.Блажневська, Г.І.Ткачук

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЗАЄМОДІЇ ОБОЛОНКИ ОБЕРТАННЯ З ОТОЧУЮЧОЮ РІДИНОЮ ПРИ НАЯВНОСТІ ВНУТРІШНЬОГО ДЖЕРЕЛА ХВИЛЬ

Розглянемо тонку пружну оболонку обертання, заповнену й оточену рідкими середовищами, густини та швидкості звуку в яких рівні відповідно ρ_1, c_1 та ρ_2, c_2 . Середина поверхні оболонки утворена обертанням дуги кола навколо хорди. Нехай у внутрішньому середовищі на осі симетрії розміщене джерело збурень, що генерує акустичну хвилю, тиск у якій змінюється за законом

$$p_0 = \frac{P_0}{l} g(\tau - l) [H(\tau - l) - H(\tau - l - \tau_0)], \quad /I/$$

де P_0 - постійна, яка має розмірність тиску; l - безмірна /віднесена до піддовжини R хорди/ відстань від джерела; g - функція,

яка визначає профіль хвилі; $\tau = c_0 t R^{-1}$, t - час, який відлічується з моменту включення джерела; $\tau_0 = c_0 t_0 R^{-1}$, t_0 - тривалість збурюючого імпульсу; H - одинична функція Хевісайда.

Падаючий імпульс зумовлює нестационарний рух оболонки й акустичних середовищ. Необхідно визначити збурення поля тиску в оточуючому оболонку середовищі.

Припустимо, що рідини нев'язкі та баротропні, а їх рух - безвихровий. В акустичному наближенні такий рух рідин описується хвильовими рівняннями [2]

$$\Delta p_i = \frac{c_i^2}{c_i^2} \frac{\partial^2 p_i}{\partial \tau^2}, \quad (i=1,2), \quad /2/$$

де p_1 , p_2 - збурення тиску відповідно у внутрішньому та зовнішньому середовищах; Δ - оператор Лапласа у безрозмірних координатах.

Для описання руху оболонки використаємо лінійні рівняння теорії типу Тимошенка [3]. Враховуючи осьову симетрію задачі, одержуємо, що рух оболонки визначається трьома величинами u_j , де $u_1 = \bar{u}_1 R^{-1}$, $u_2 = \gamma$, $u_3 = \bar{u}_3 R^{-1}$, $\bar{u}_1$, $\bar{u}_3$ - тангенціальне та нормальне зміщення точок серединної поверхні; γ - кут повороту нормалі у площині меридіана.

Оберемо бісферичну систему координат α_1 , α_2 , α_3 , координатною поверхнею $\alpha_3 = \text{const} \equiv \alpha_{30} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$ якої є серединна поверхня оболонки.

Рівняння руху оболонки мають вигляд:

$$L_{kj} u_j = q^* \delta_{k3}, \quad (k=1,2,3), \quad /3/$$

де

$$L_{11} = \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} - sh^2 \alpha_1 - \chi^2 \sin^2 \alpha_{30} - \nu \left[\frac{1}{A_1} ch \alpha_1 - sh^2 \alpha_1 \right] - \frac{1}{\beta^2} \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{ch \alpha_1}{A_1} - sh^2 \alpha_1 \right) \right] \frac{\partial^2}{\partial \tau^2};$$

$$L_{12} = L_{21} = \chi^2 \sin \alpha_{30} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \left[2 \sin \alpha_{30} + \frac{1}{A_2} \cos \alpha_{30} \right] \frac{\partial^2}{\partial \tau^2};$$

$$L_{13} = \frac{1}{A_1} \left[\sin \alpha_{30} (1 + \nu + \chi^2) + \frac{\nu}{A_2} \cos \alpha_{30} \right] \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_2} sh \alpha_1 \cos \alpha_{30};$$

$$L_{22} = a^2 \left[\frac{1}{A_1} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} - sh \alpha_1 - \nu \left(\frac{1}{A_1} ch \alpha_1 - sh \alpha_1 \right) - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] - \kappa^2;$$

$$L_{23} = -\frac{\kappa^2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1}; \quad L_{32} = -\frac{\kappa^2}{sin \alpha_{30}} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} - sh \alpha_1 \right);$$

$$L_{31} = \frac{1}{A_1} \left[1 + \nu + \kappa^2 + \frac{\nu}{A_2} ctg \alpha_{30} \right] \frac{\partial}{\partial \alpha_1} - sh \alpha_1 \left[1 + \nu + \kappa^2 + \frac{1}{A_2} ctg \alpha_{30} \right];$$

$$L_{33} = \frac{1}{A_1^2} \frac{1}{sin \alpha_{30}} \left[-\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + cos^2 \alpha_{30} \right] + 2(1+\nu) \left(sin \alpha_{30} + \frac{1}{A_2} cos \alpha_{30} \right) +$$

$$+ \frac{1}{\beta^2 sin \alpha_{30}} \left[1 + a^2 \left(\frac{1}{A_1} ch \alpha_1 - sh \alpha_1 \right) \right] \frac{\partial^2}{\partial \tau^2};$$

$$A_1 = (ch \alpha_1 + cos \alpha_{30})^{-1}; \quad A_2 = A_1 sin \alpha_{30}; \quad a^2 = \frac{(2h)^2}{2R^2};$$

$$\kappa^2 = \frac{1}{2} \kappa' (1-\nu); \quad \beta^2 = E \bar{\rho}^2 c_1^2 (1-\nu)^{-1}; \quad q^* = \frac{1}{2} (\rho_0 + \rho_1 - \rho_2) R (1-\nu) (E h sin \alpha_{30})^{-1};$$

$$\kappa' = \frac{5}{6} - \text{коефіцієнт зсуву}; \quad \nu, E, \rho - \text{відповідно коефіцієнт}$$

Пуассона, модуль Юнга і густина матеріалу оболонки; $2h$ - товщина оболонки; $\delta_{\kappa 3}$ - символ Кронекера.

Задача полягає в знаходженні розв'язків системи рівнянь /2/ та /3/ при початкових

$$\rho_i = \frac{\partial \rho_i}{\partial \tau} = u_j = \frac{\partial u_j}{\partial \tau} = 0 \quad \text{при } \tau = 0, \quad /4/$$

граничних

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial \rho_2}{\partial \alpha_3} \bigg|_{\alpha_3 = \alpha_{30}} = -\rho_2 c_1^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial \tau^2}; \quad \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (\rho_0 + \rho_1) \bigg|_{\alpha_3 = \alpha_{30}} = -\rho_1 c_1^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial \tau^2} \quad /5/$$

та умовах випромінювання у безмежно віддаленій точці.

При розв'язуванні поставленої задачі скористаємось інтегральним перетворенням Лапласа по безрозмірному часу τ . Нехай $f(\alpha_1, \alpha_3, s)$ - перетворення Лапласа функції $f(\alpha_1, \alpha_3, \tau)$. Функції ρ_i^L та u_j^L задовольняють рівняння та граничні умови, які отримають з /2/, /3/, /5/ заміною $\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$ на s^2 .

Розглянемо так звану прифронтову асимптотику розв'язку задачі, коли параметр перетворення Лапласа $s \rightarrow \infty$.

Представимо шукані функції у вигляді:

$$\begin{aligned} P_i^L(\alpha_1, \alpha_3, s) &= \rho_1 g^L(s) \exp[-s \ell_0(\alpha_1)] P_i^L(\alpha_1, \alpha_3, s), \\ U_j^L(\alpha_1, s) &= \rho_1 \rho_1' c_1^2 g^L(s) \exp[-s \ell_0(\alpha_1)] U_j^L(\alpha_1, s), \end{aligned} \quad /6/$$

де $\ell_0(\alpha_1) = \ell(\alpha_1, \alpha_{30})$.

Для визначення функції $P_i^L(\alpha_1, \alpha_3, s)$ отримуємо диференціальні рівняння з малим параметром $\varepsilon = \frac{1}{s}$ при старших похідних. Розв'язок цих рівнянь шукаємо методом Вішіка та Люстерника [1]. Використовуючи перше розщеплення оператора, одержуємо розв'язок, який тотожно дорівнює нулеві. Для визначення функцій типу прилежового шару вводимо змінну $\gamma = \frac{1}{\varepsilon} (\alpha_3 - \alpha_{30})$. Нехай

$$P_i^L(\alpha_1, \gamma, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{in}^L(\alpha_1, \gamma) \varepsilon^n; \quad U_j^L(\alpha_1, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} U_{jn}^L(\alpha_1) \varepsilon^n. \quad /7/$$

На основі другого розщеплення оператора L_6 отримуємо для визначення функцій $P_{in}^L (n \geq 0)$ звичайні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами, в яких α_1 - параметр. Зокрема, для визначення $P_{i0}^L(\alpha_1, \gamma)$ маємо рівняння

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial^2 P_{i0}^L}{\partial \gamma^2} - \left[\frac{c_1^2}{c_2^2} - \frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial \ell_0}{\partial \alpha_1} \right)^2 \right] P_{i0}^L = 0 \quad /8/$$

та граничні умови

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1} \frac{\partial P_{i0}^L}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=0} &= \frac{1}{A_1} \frac{1}{\ell_0} \frac{\partial \ell_0}{\partial \alpha_3} \Big|_{\alpha_3=\alpha_{30}} - U_{31}^L, \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial P_{i0}^L}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=0} &= -\frac{\rho_1}{\rho_1'} U_{31}^L; \quad \lim_{\gamma \rightarrow \infty} P_{i0}^L = 0. \end{aligned} \quad /9/$$

Нехай джерело збурень знаходиться на осі обертання і віддалене від початку координат на $\ell R (0 \leq \ell < 1)$. Дуже видно, що при $C_1 \geq C_2$ маємо

$$K_i^2 = A_1 \left[\frac{c_1^2}{c_2^2} - \frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial \ell_0}{\partial \alpha_1} \right)^2 \right] > 0.$$

Розв'язки рівнянь /8/ типу функцій прилежового шару, які задовольняють умови /9/, мають вигляд

$$P_{i0}^L = B_{i0}(\alpha_1) \exp[(-1)^{i+1} |K_i| \gamma], \quad /10/$$

де $B_{20}(\alpha_1) = \frac{\rho_1}{\rho_1'} \frac{A_1}{|K_1|} U_{31}^L$; $B_{10}(\alpha_1) = \frac{1}{\ell_0} - \left| \frac{K_2}{K_1} \right| \frac{\rho_1}{\rho_1'} B_{20}(\alpha_1)$.

Рівняння руху оболонки /3/ розглядаємо як узагальнені граничні умови для рівнянь /2/. Після підстановки у рівняння /3/ співвідношень /6/, /7/, /10/ та першого розщеплення цих рівнянь за методом Вішіка та Лустерника отримуємо

$$\begin{aligned} U_{21}^L(\alpha_1) &\equiv 0 \Rightarrow B_{20}(\alpha_1) = 0; \quad B_{10}(\alpha_1) = \frac{1}{\ell_0}; \\ U_{32}^L(\alpha_1) &= \frac{R}{h} \frac{\rho}{\rho} \frac{1}{\ell_0} \left[1 + \alpha^2 (1 + \alpha \alpha_1 \cos \alpha_{30}) \cdot \kappa^2 \beta \left(\frac{C_1^2}{C_2^2} - \frac{\kappa_1^2}{A_1} \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad /11/$$

Таким чином,

$$P_{20}^L \equiv 0; \quad P_{21}^L = \frac{\rho}{\rho} \frac{A_1}{|\kappa_1|} U_{32}^L(\alpha_1) \exp[-|\kappa_1| \gamma]. \quad /12/$$

Формула /12/ визначає одночленне асимптотичне наближення трансформанти Лапласа від шуканого тиску в оточуючому оболонку середовищі у змінних (α_1, γ) . У вихідних змінних α_1, α_3 розв'язок визначений лише у вузькій смузі поблизу поверхні оболонки. Тому на основі /12/ визначаємо P_2^L на поверхні оболонки, а значення P_2^L в усіх інших точках середовища знаходимо з допомогою інтегралу Кірхгофа

$$P_2^L(\alpha_1, \alpha_3, s) = \frac{1}{4\pi} \iint_G \left\{ P_2^L \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{L} \exp[-s \frac{C_1}{C_2} L] - \frac{1}{L} \exp[-s \frac{C_1}{C_2} L] \frac{\partial P_2^L}{\partial n} \right) A_1(\alpha_1) A_2(\alpha_3) d\alpha_{10} d\alpha_{20} \right\} /13/$$

де G - поверхня оболонки; n - її зовнішня безрозмірна нормаль; L - безрозмірна відстань від точки спостереження $(\alpha_1, 0, \alpha_3)$ до біжучої точки на поверхні інтегрування $(\alpha_{10}, \alpha_{20}, \alpha_{30})$. Оскільки шукаємо асимптотичний розв'язок, то інтеграл /13/ обчислимо методом Лапласа [4].

В одночленному асимптотичному наближенні інтеграл /13/ визначається наступною формулою:

$$P_2^L(\alpha_1, \alpha_3, s) = \frac{1}{s} \rho g^L(s) \exp[-s(\frac{C_1}{C_2} L_* + \ell_*)] \frac{R}{h} \frac{\rho}{\rho} F(\alpha_1, \alpha_3), \quad /14/$$

де $L_* = L|_{\alpha_{10}=\beta, \alpha_{20}=0}$; $\ell_* = \ell_0(\beta)$;

$$F(\alpha_1, \alpha_3) = \frac{1}{2} \frac{h}{R} \frac{\rho}{\rho} U_{32}^L(\beta) \frac{1}{L_*} A_1(\beta) A_2(\beta) \left[1 - \frac{C_1}{C_2} \frac{1}{|\kappa_1|} \frac{\partial L_*}{\partial \alpha_{30}} \right] \times \\ \left[\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \alpha_{10}^2} \left(\frac{1}{C_2} L + \ell_0 \right) \frac{C_1^2}{C_2^2} \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_{20}^2} \right\}_{\alpha_{10}=\beta, \alpha_{20}=0} \right]^{-1/2}.$$

Координата β критичної точки є коренем рівняння

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_{10}} \left[\frac{C_1}{C_2} L + \ell_0 \right] \right\}_{\alpha_{10} = \beta, \alpha_{20} = 0} = 0.$$

На основі теореми обернення перетворення Лапласа знаходимо

$$\frac{P_2}{P_*} = \frac{R}{h} \frac{P_2}{\rho} F(\alpha_1, \alpha_2) H(\tau_1) \int_0^{\tau_1} g(x) [H(x) - H(x - \tau_1)] dx; \tau_1 = \tau - \frac{C_1}{C_2} L_* - \ell_*. \quad /I5/$$

У частковому випадку сферичної оболонки, коли $\alpha_{20} = \frac{\pi}{2}$, і при умові $C_1 = C_2$ одержуємо

$$\frac{P_2}{P_*} = \frac{R}{h} \frac{P_2}{\rho} \frac{1}{L_* + \ell_*} \frac{1}{\cos \psi} [1 + a^2 - x^2 \beta^2 \sin^2 \psi] \int_0^{\tau_1} g(x) [H(x) - H(x - \tau_1)] dx. \quad /I6/$$

Тут ψ визначається з рівняння

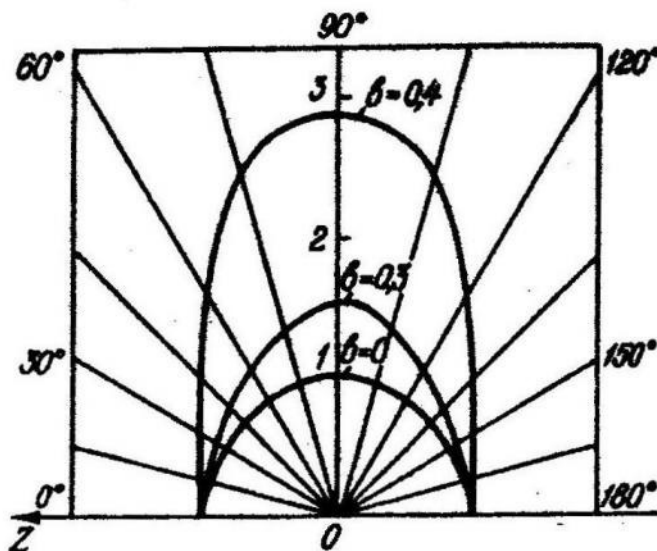
$$\sin \psi = b r \sin \theta (L_* + \ell_*)^{-1};$$

r, θ - сферичні координати з початком у центрі сфери,

$$L_* + \ell_* = \sqrt{r^2 + b^2 - 2br \cos \theta}.$$

Відзначимо, що при певних значеннях $b, \kappa \beta$ функція U_{22} приймає безмежні значення. У цьому випадку до одержаного тут розв'язку /II/ слід додати функцію внутрішнього примекового шару. Побудова цієї функції вимагає додаткового аналізу.

Рис. I.



Як випливає зі співвідношення /I5/, побудований тут розв'язок визначає тиск у хвилі, яка приходить у точку спостереження в момент $\tau = \frac{C_1}{C_2} L_* + \ell_*$. При $C_1 = C_2$ час приходу хвилі у точку спостереження рівний відстані до джерела збурень. Врахування функції внут-

рішнього примежового шару дає додатковий доданок у формулі для P_2 , який можна інтерпретувати як тиск у периферійній хвилі.

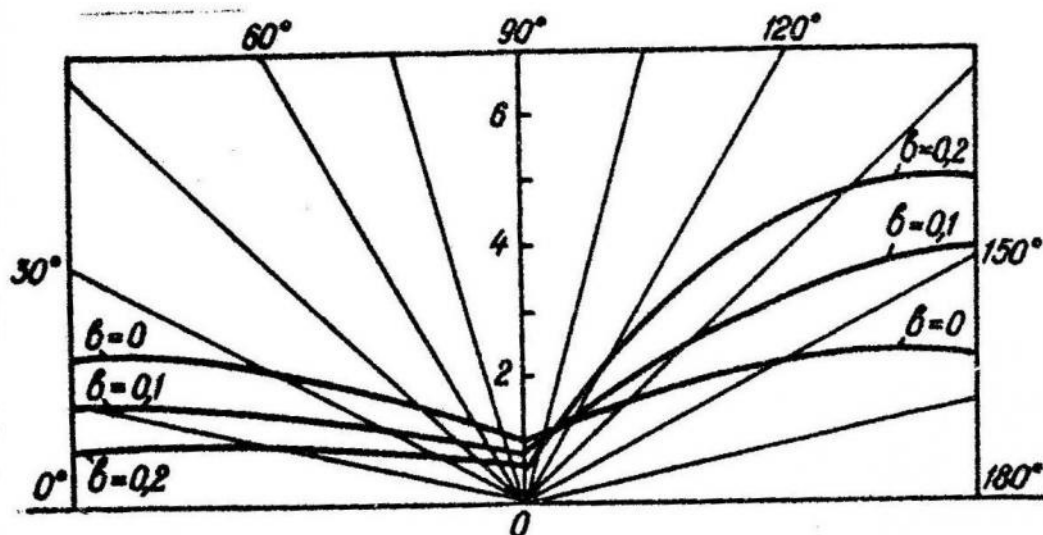


Рис. 2.

Ми визначаємо лише тиск у заломленій хвилі. На рис. 1, 2 зображена функція $F_1(\alpha_1, \alpha_2)(L_+ + \ell_+)$ відповідно для сферичної ($\alpha_{30} = \frac{\pi}{2}$) і веретеноподібної оболонки ($\alpha_{30} = \frac{\pi}{3}$) при $C_1 = C_2$, $\kappa\beta = 1,97$ та декількох значеннях параметра δ . Точка спостереження знаходиться на сфері, центр якої збігається з джерелом, а радіус дорівнює $10R$.

Список літератури: 1. Вишник М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Усп. мат. наук, 1957, 12, 25. 2. Метсавэар Я.А., Векслер Н.Д., Стулов А.С. Дифракция акустических импульсов на упругих телах. - М.: Наука, 1979. 3. Пелех Б.Д. Обобщенная теория оболочек. - Львов: Вища школа, 1978. 4. Федорук М.В. Метод перевала. - М.: Наука, 1977.

Стаття надійшла в редколегію 07.04.81

З М І С Т

Людкевич Й.В., Дудкевич А.Т. Різнице- ві апроксимації підвищеного порядку для рівняння Пуассона в просторі.....	3
Мартиненко Марія Д., Мартинен- ко Михайло Д. Про одну граничну задачу для нестандарт- ного еліптичного рівняння.....	6
Мартиненко Марія Д., Мартинен- ко Михайло Д., Бойко Л.Ф. Задача без початкових умов для рівняння теплопровідності.....	9
Бартіш М.Я., Шахно С.М. Про деякі модифі- кації методу Ньютона і їх застосування до розв'язування за- дач газодинаміки.....	II
Дудзяний І.М., Цимбал В.М. Асимпто- тичний розв'язок змішаної задачі для деякого рівняння третього порядку.....	14
Квіт І.Д. Звужені до кінців інтерквантильні сму- ги довір'я.....	18
Гриліцький Д.В. Температурне поле у пів- площині при мішаних граничних умовах.....	21
Горечко О.М. Взаємодія слабких ударних хвиль з товстостінним пружним циліндром, який знаходиться в акустичному середовищі.....	27
Прокопшин І.А., Хлебніков Д.Г. Циліндричний згин пластини нагрітим штампом.....	33
Дзяк І.І., Савула Я.Г., Шинкарен- ко Г.А. Розрахунок термонапружень в осесиметричних ті- лах на основі методу скінченних елементів.....	38
Дзяк І.І. Реалізація високоточних схем методу скінченних елементів для задач нестационарної теплопровід- ності.....	44
Вовк В.Д., Шинкаренко Г.А. Розв'язуван- ня осесиметричних задач теорії пружності методом скінченних елементів.....	51
Бартіш М.Я., Роман Л.Л. Застосування мето- дів типу Ньютона – Канторовича у нелінійних задачах меха- ніки.....	51

Огірко І.В., Роман Л.Л. Ітераційний розв'язок нелінійної задачі про мінімальний прогин пологої оболонки..... 62

Гайвась Б.І., Фарат В.М. Дослідження коливань і стійкості конічного стержня зі зосередженими масами, що знаходиться на узагальненій вінклеровій основі..... 65

Блакшєвська О.В., Ткачук Г.І. Дослідження взаємодії оболонки обертання з оточуючою рідиною при наявності внутрішнього джерела хвиль..... 70

УДК 518:517.944/947

Разностные аппроксимации повышенного порядка для уравнения Пуассона в пространстве. Л ю д к е в и ч И.В., Д у д н е - в и ч А.Т. - Вестн. Львов.ун-та, сер. мех.-мат., вып. 19. Прикладные задачи математики и механики. - Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с. 3-6 /на укр. яз./.

Задача Дирихле для уравнения Пуассона аппроксимируется разностной схемой четвертого порядка точности на параллелепипедаидальных сетках, которая на кубической сетке переходит в известную аппроксимацию с погрешностью $O(h^4)$. Система разностных уравнений решается итерационным методом верхней релаксации по линиям. Библиогр.: 5 назв.

УДК 517.944:947

Об одной граничной задаче для нестандартного эллиптического уравнения. М а р т ы н е н к о Мария Д., М а р т ы н е н к о Михайло Д. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 19. Прикладные задачи математики и механики. - Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с. 6-8 /на укр. яз./.

Для нестандартного эллиптического уравнения вида $\frac{\partial u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y^2} = f(x, y)$ приведена корректно-разрешимая граничная задача. Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.944:947

Задача без начальных условий для уравнения теплопроводности. М а р т ы н е н к о Мария Д., М а р т ы н е н к о Михайло Д., Б о й к о Л.Ф. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 19. Прикладные задачи математики и механики. - Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с. 9-11 /на укр. яз./.

Выведено условие разрешимости задачи без начальных условий для уравнения теплопроводности. Проанализированы случаи его выполнимости. Библиогр.: 3 назв.

УДК 518:517.948

О некоторых модификациях метода Ньютона и их применении к решению задач газодинамики. Б а р т и ш М.Я., Ш а х н о С.М. - Вестн. Львов.ун-та, сер. мех.-мат., вып. 19. Прикладные задачи математики и механики. - Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с. 11-13 /на укр. яз./.

Исследуется метод Ньютона для решения систем нелинейных уравнений в случае возмущения оператора системы и его производной. Формулируется теорема сходимости. Полученные результаты применяются к решению разностных уравнений газовой динамики. Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.946

Асимптотическое решение смешанной задачи для некоторого уравнения третьего порядка. Д у д з я н н ы й И.М., Ц и м б а л В.Н. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 19. Прикладные задачи математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов.ун-те, 1982, с. 14-17 /на укр. яз./.

Методом погранслоя построено асимптотическое разложение решения смешанной задачи для некоторого уравнения в частных производных третьего порядка. Рассмотрен случай вырождения уравнения в алгебраическое. Библиогр.: 9 назв.

УДК 519.21

Суженные к концам интерквантильные полосы доверия. К в и т И.Д. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 19. Прикладные задачи математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с. 18-21 /на укр. яз./.

На основании упорядоченной выборки из абсолютно непрерывной популяции дан метод построения медианной эмпирической функции распределения, а также суженных к концам интерквантильных полос доверия. Библиогр.: 2 назв.

УДК 536.24

Температурное поле в полуплоскости при смешанных граничных условиях. Г р и л и ц к и й Д.В. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 19. Прикладные задачи математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с. 21-26 /на укр. яз./.

Определение температурного поля в полуплоскости при пяти видах смешанных граничных условий в случае термозолотки боковых граней сведено к сингулярным интегро-дифференциальным уравнениям. Приближенное решение полученных уравнений можно построить методом ортогональных многочленов. Ил. 1.

УДК 539.3

Взаимодействие слабых ударных волн с толстостенным упругим цилиндром, находящимся в акустической среде. Г о р е ч к о А.Н. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 19. Прикладные задачи математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с. 27-32 / на укр. яз./.

Методом полиномов Чебышева-Лагерра решена нестационарная задача взаимодействия слабой ударной волны с толстостенным упругим цилиндром бесконечной длины, контактирующим по внутренней и внешней поверхностям с идеальными сжимаемыми жидкостями. Численные расчеты выполнены для случая падения на сплошной упругий цилиндр плоской ступенчатой волны давления. Исследуются смещения внешней поверхности цилиндра. Ил. 2. Библиогр.: 4 назв.

УДК 539.3

Цилиндрический изгиб пластины нагретым штампом. П р о к о - п и ш и н И.А., Х л е б н и к о в Д.Г. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 19. Прикладные задачи математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с. 33-38 /на укр. яз./.

Термоупругая задача об изгибе пластины нагретым штампом сведена к последовательному решению плоской задачи термоупругости для пластины и задачи изгиба пластины штампом, с измененной формой поверхности. Точное решение задачи стационарной термоупругости дано в форме тригонометрических рядов. Задача изгиба пластины жестким штампом решается на основе приближенных уравнений, полученных операторным методом с удержанием членов до четвертого порядка включительно относительно толщины пластины. Это позволяет учитывать деформации сдвига и поперечное обжатие пластины. Числовые результаты приведены в виде графиков. Ил. 3. Библиогр.: 6 назв.

УДК 539.681.3.057

Расчет термонапряжений в осесимметрических телах на основе метода конечных элементов. Д и я к И.М., С а в у л а Я.Г., Ш и н - к а р е н к о Г.А. - Вестн. Львов. ун-та, сер.мех.-мат., вып. 19. Прикладные задачи математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с. 38-44 /на укр. яз./.

Рассматривается применение метода конечных элементов для двумерных задач упругостатической термоупругости. Поле температур находится на основании процесса Галеркина, а смещения - из условий минимума обобщенного функционала Лагранжа. Неизвестные функции аппроксимируются линейными полиномами на треугольниках. Табл. 1. Ил. 2. Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.958

Реализация высокоточных схем метода конечных элементов для задач нестационарной теплопроводности. Д и я к И.И.. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.19. Прикладные задачи математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с. 44-51 /на укр.яз./.

Описан алгоритм решения двумерных задач нестационарной и стационарной теплопроводностей методом конечных элементов с применением четырехугольных изопараметрических элементов. Температура аппроксимируется полиномами различных порядков. Приводятся результаты численных исследований. Табл. 1. Ил. 1. Библиогр.: 3 назв.

УДК 539.3

Решение осесимметричных задач теории упругости методом конечных элементов. В о в к В.Д., Ш и н к а р е н к о Г.А. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.19. Прикладные задачи математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с. 51-58 /на укр. яз./.

Рассмотрены вычислительные аспекты решения осесимметричных задач теории упругости методом конечных элементов с применением билинейных, биквадратических и бикубических аппроксимаций на криволинейных четырехугольных элементах. На основании изопараметрического преобразования координат построен эффективный алгоритм построения системы разрешающих уравнений. Отмечаются особенности программной реализации данного алгоритма. Приведены результаты численных исследований. Табл. 1. Ил. 2. Библиогр.: 3 назв.

УДК 518:517.948

Применение методов типа Ньютона-Канторовича в нелинейных задачах механики. Б а р т и ш М.Я., Р о м а н Л.Л. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.19. Прикладные задачи математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с. 58-62 /на укр.яз./.

Предлагаются итерационные методы типа Ньютона-Канторовича для решения нелинейных задач механики. Рассматривается определение в цилиндрической оболочке с заданными от температуры характеристиками материала, осесимметричных температурных полей, которые в пределах заданных условий нагрева обеспечивают максимально-низкий уровень температурных напряжений при произвольной зависимости от температуры характеристик материала E , α . Ил.4. Библиогр.: 4 назв.

УДК 539.3:518

Итерационное решение нелинейной задачи о минимальном прогибе пологой оболочки. О г и р к о И.В., Р о м а н Л.Л. – Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.19. Прикладные задачи математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с. 62-65 /на укр. яз./.

Численно определяется распределение температуры в гибкой пологой оболочке, обеспечивающее минимальный прогиб и требуемые ограничения на напряжения. Применяются итерационные методы верхней релаксации и локальных вариаций. Приведен пример расчета. Ил. 2.

Библиогр.: 2 назв.

УДК 624.07:534.1

Исследование колебаний и устойчивости коничного стержня с сосредоточенными массами, находящегося на обобщенном винклеровском основании. Г а й в а о в Б.И., Ф а р а т В.М. – Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 19. Прикладные задачи математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с. 65-70 /на укр. яз./.

Построен характеристический ряд краевой задачи, описывающей колебания и устойчивость конического стержня с включениями в массы и параметры упругого основания. Численно исследовано влияние параметров конусности, неконсервативности и точки размещения сосредоточенной массы на критическое значение параметра нагрузки. Ил. 5.

Библиогр.: 2 назв.

УДК 533.6.013.42

Исследование взаимодействия оболочки вращения с окружающей жидкостью при наличии внутреннего источника волн. Б л а ж и е в - с к а я О.В., Т к а ч у к Г.И. – Вестн. Львов. ун-та, сер.мех.-мат., вып. 19. Прикладные задачи математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с. 70-76 /на укр. яз./.

Предложен алгоритм определения прифронтной асимптотики поля давления в акустической среде, окружающей упругую оболочку, образованную вращением дуги окружности вокруг хорды. Падающая на оболочку слабая ударная волна генерируется источником, находящимся в заполняющей оболочку среде. Получены простые зависимости давления от геометрических и физических параметров системы. Ил. 2. Библиогр.: 4 назв.

Вестник Львовского университета

Выпуск 19

Серия механико-математическая
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИКИ
И МЕХАНИКИ

/На украинском языке/

Львов

Издательство при Львовском государственном университете
издательского объединения "Вища школа"

Редактор В.В.В о й т о в и ч

Художній редактор В.Д.Ц е й т і н

Технічний редактор С.В.К о п о т ю к

Коректор Т.Т.К о з а к

Інформ. бланк № 7459

Підп. до друку 15.03.82. БГ 02486 . Формат 60x84 1/16.

Папір друк. № 3. Офс. друк. Умовн. друк. арк. 4,88

Обл.-вид. арк. 4,39 Тираж 600 прим. Вид. № 968.

Зам. 3270 . Ціна 55 Замовне.

Видавництво при Львівському державному університеті
видавничого об'єднання "Вища школа", 290000, Львів,
вул. Університетська, І.

Львівська обласна книжкова друкарня, 290000, Львів,
вул. Стефаника, ІІ.

55 коп.



Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1982, вип. 19, 1—84.