ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1965 *Серія механіко-математична* *Випуск 2*

О. С. КОВАНЬКО, Л. М. ЛІСЕВИЧ

МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ S^p-МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИМИ ПРАВИМИ ЧАСТИНАМИ

В цій статті розглядаються випадки майже періодичних розв'язків деяких звичайних диференціальних рівнянь з S^p-майже періодичною правою частиною ($p \geqslant 1$).

I. ДЕЯКІ НЕОБХІДНІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ S^p-МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Означення 1. Величина

$$D^E_{S^p_l}\{f(x), \varphi(x)\} = \sup_{-\infty < x < +\infty} \left\{ \frac{1}{l} \int\limits_{E(x,\, x+l)} |f(x) - \varphi(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}$$

називається S^p-відстанню, яка відповідає довжині l. Якщо $E = (-\infty < < x < +\infty)$, то будемо писати $D^E_{S^p_l} = D_{S^p_l}$.

Означення 2. Вимірна і сумовна разом із своїм p-им степенем ($p \geqslant 1$) в кожному скінченному інтервалі функція $f(x)$ називається S^p-майже періодичною (S^p-м. п.), якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ і довільного фіксованого числа $l > 0$ існує відносно щільна множина S^p-майже періодів $\tau = \tau(\varepsilon)$ функції $f(x)$, що

$$D_{S^p_l}\{f(x+\tau), f(x)\} < \varepsilon.$$

Властивість 1. S^p-м. п. функція $f(x)$ є S^p-обмежена, тобто існує така стала $A > 0$, що

$$D_{S^p_l}\{f(x), 0\} < A.$$

Властивість 2. Нехай $f(x)$ — S^p-м.п. функція і

$$f_h(x) = \frac{1}{h} \int\limits_x^{x+h} f(t)\, dt, \quad (h > 0).$$

Тоді $f_h(x)$ є м.п. функція Бора і

$$\lim_{h \to 0} D_{S^p_l}\{f(x), f_h(x)\} = 0.$$

Властивість 3. Якщо послідовність $\{f_n(x)\}$ S^p-м.п. функцій збіжна в метриці S^p до функції $f(x)$, то $f(x)$ є також S^p-м.п. функція.

II. ТЕОРЕМА ПРО НЕОЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ S^p-МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

Теорема II.1. Якщо $f(x)$ S^p-м. п. функція і неозначений інтеграл

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

S^p-обмежений, то $F(x)$ — м. п. функція Бора.

Доведення. Маємо

$$F_h(x)=\int_0^x f_h(t)\,dt=\frac{1}{h}\int_0^h ds\int_s^{x+s} f(t)\,dt=\frac{1}{h}\int_0^h [F(x+s)-F(s)]\,ds.$$

На основі нерівностей Гельдера і Мінковського

$$|F_h(x)|\leqslant\left\{\frac{1}{h}\int_0^h |F(x+s)-F(s)|^p\,ds\right\}^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\frac{1}{h}\int_x^{x+h} |F(s)|^p\,ds\right\}^{1/p}+\left\{\frac{1}{h}\int_0^h |F(s)|^p\,ds\right\}^{1/p}.$$

Тому що $F(x)$ є S^p-обмежена функція, з останньої нерівності випливає обмеженість функції $F_h(x)$ для всіх $|h|>0$. Тоді за відомою теоремою Бора $F_h(x)$ є м. п. функція Бора як обмежений неозначений інтеграл від м. п. функції Бора $f_h(x)$.

Далі маємо

$$F_h(x)=\frac{1}{h}\int_0^h ds\int_s^{x+s} f(t)\,dt=\frac{1}{h}\int_0^h\left[\left(\int_s^0+\int_0^x+\int_x^{x+s}\right)f(t)\,dt\right]ds=$$

$$=F(x)+\frac{1}{h}\int_0^h\left[\int_x^{x+s} f(t)\,dt-\int_0^s f(t)\,dt\right]ds.$$

Звідси

$$|F(x)-F_h(x)|\leqslant\frac{1}{h}\int_0^h\left[\int_0^s |f(x+t)-f(t)|\,dt\right]dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{h}\int_0^h\left[\int_0^h |f(x+t)|\,dt+\int_0^h |f(t)|\,dt\right]ds=\int_0^h |f(x+t)|\,dt+\int_0^h |f(t)|\,dt.$$

Але, як відомо, останні інтеграли є рівномірно абсолютно неперервні функції на довільній множині E дійсної осі Ox, тому вони прямують до нуля, якщо $h\to 0$. Отже, яке б не було число $\varepsilon>0$, існує таке число $\delta>0$, що якщо $|h|<\delta$, то

$$|F_h(x)-F(x)|<\varepsilon,$$

тобто $F(x)$ є м. п. функція Бора як рівномірна границя м. п. функцій $F_h(x)$. Теорема доведена.

Примітка. Теорема II.1. була доведена нами раніше [5] іншим, більш складним методом.

III. МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З S^p-МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx}+ay=f(x), \tag{III.1}$$

де $f(x)$ — дійсна S^p-м. п. функція, a — комплексна стала ($a=\alpha+\beta i$).

Теорема III.1. Якщо $f(x)$ — S^p-м. п. функція, неозначений інтеграл якої S^p обмежений, то S^p-обмежений розв'язок рівняння (III.1) є м. п. функція Бора.

Доведення. а. Нехай $\alpha>0$. S^p-обмежений розв'язок рівняння (III.1), як легко бачити, можна записати у вигляді

$$y=e^{-ax}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{at}f(t)\,dt \tag{III.2}$$

(невластивий інтеграл (III.2) існує).

Доведемо майже періодичність розв'язку рівняння (III.1). На основі теореми II.1

$$F(x)=\int\limits_{0}^{x}f(t)\,dt$$

є м. п. функція Бора. Задамося числом $\varepsilon>0$ і нехай $\tau=\tau\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ є S^p-майже період функції $F(x)$. Тоді, використовуючи другу теорему про середнє значення, маємо

$$|y(x+\tau)-y(x)|=\left|e^{-ax}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{at}[f(x+\tau)-f(t)]\,dt\right|=$$

$$=\lim_{z\to-\infty}\left|e^{-ax}\int\limits_{z}^{x}e^{at}[f(t+\tau)-f(t)]\,dt\right|=$$

$$=\lim_{z\to-\infty}\left|e^{-ax}\left\{e^{az}\int\limits_{z}^{\Theta}[f(t+\tau)-f(t)]\,dt+e^{ax}\int\limits_{\Theta}^{x}[f(t+\tau)-f(t)]\,dt\right\}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{z\to-\infty}|e^{a(z-x)}|\cdot[|F(\Theta+\tau)-F(\Theta)|+|F(z+\tau)-F(z)|]+$$

$$+|F(x+\tau)-F(x)|+|F(\Theta+\tau)-F(\Theta)|\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{z\to-\infty}|e^{a(z-x)}|\cdot\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\quad(z<\Theta<x).$$

Отже,

$$|y(x+\tau)-y(x)|<\varepsilon,$$

що доводить майже періодичність за Бором розв'язку $y(x)$.

Аналогічно доводиться теорема, якщо $\alpha<0$, тільки в цьому випадку S^p-обмежений розв'язок рівняння (III.1) запишеться у вигляді

$$y=e^{-ax}\int_{x}^{+\infty} e^{at} f(t)\,dt.$$

б. Нехай $a=\beta i$. Легко переконатися, що S^p-обмежений розв'язок рівняння (III.1) в цьому випадку запишеться як

$$y=e^{-i\beta x}\int_{0}^{x} e^{i\beta t} f(t)\,dt.$$

Очевидно, це буде тоді, коли інтеграл

$$\int_{0}^{x} e^{i\beta t} f(t)\,dt \tag{III.3}$$

S^p-обмежений. Але функція $e^{i\beta t}f(t)$ є S^p-м. п., отже, інтеграл (III.3) є м. п. функція Бора. Теорема доведена.

Теорема III.1 легко переноситься на випадок неоднорідного лінійного диференціального рівняння n-го порядку:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_ny=f(x), \tag{III.4}$$

де a_1, $a_2, \ldots, a_n$ — сталі числа, $f(x)$ — S^p-м. п. функція.

Теорема III.2. Якщо неозначений інтеграл S^p-м. п. функції $f(x)$ S^p-обмежений, то обмежений розв'язок рівняння (III.4) є м. п. функція Бора.

Використовуючи теорему II.1, доведення теореми III.2 аналогічне доведенню теореми Бора—Нейгебауера [1].

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx}+\varphi(x)\,y=f(x). \tag{III.5}$$

Будемо вважати, що $\varphi(x)$ і $f(x)$ S^p-м. п. функції. Покладемо

$$f_h(x)=\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt; \qquad \varphi_h(x)=\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}\varphi(t)\,dt;$$

$$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt; \qquad \Phi(x)=\int_{x_0}^{x}\varphi(t)\,dt;$$

$$F_h(x)=\int_{x_0}^{x} f_h(t)\,dt; \qquad \Phi_h(x)=\int_{x_0}^{x}\varphi_h(t)\,dt.$$

Поряд із рівнянням (III.5) розглянемо рівняння

$$\frac{d\tilde{y}}{dx}+\varphi_h(x)\,\tilde{y}=f_h(x). \tag{III.6}$$

Теорема III.3. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ задовольняють умови теореми II.1. Тоді, якщо рівняння (III.6) має обмежений розв'язок $\tilde{y}(x)$ і

$$\lim_{h\to 0} |y(x_0) - \tilde{y}(x_0)| = 0,$$

то рівняння (III.5) має обмежений і майже періодичний за Бором розв'язок.

Доведення. Покладемо

$$z(x) = y(x) - \tilde{y}(x). \tag{III.7}$$

Із (III.5), (III.6) і (III.7) одержуємо

$$\frac{dz}{dx} + \varphi(x)\, y - \varphi_h(x)\, \tilde{y} = f(x) - f_h(x),$$

або

$$\frac{dz}{dx} + \varphi(x)\, z = f(x) - f_h(x) + [\varphi_h(x) - \varphi(x)]\, \tilde{y}. \tag{III.8}$$

Запишемо рівняння (III.8) в інтегральній формі

$$z(x) = z(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt} +$$

$$+ e^{-\int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt} \int_{x_0}^{x} \left\{ f(t) - f_h(t) + [\varphi_h(t) - \varphi(t)]\, \tilde{y}(t) \right\} e^{\int_{x_0}^{t} \varphi(\xi)\,d\xi}\, dt. \tag{III.9}$$

Нехай

$$M = \max\{e^{-\Phi(x)},\ \ |\tilde{y}(x)|\},$$

тоді із (III.9) одержуємо

$$|z(x)| \leq M \left\{ |z(x_0)| + \left| \int_{x_0}^{x} [f(t) - f_h(t)]\, dt \right| + \left| \int_{x_0}^{x} [\varphi_h(t) - \varphi(t)]\, dt \right| \right\} =$$

$$= M\{ |z(x_0)| + |F(x) - F_h(x)| + |\Phi_h(x) - \Phi(x)| \}. \tag{III.10}$$

На основі умов теореми можна вказати такі числа $\varepsilon > 0$ і $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що якщо лише $|h| < \delta$, то

$$|z(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3M}; \quad |F(x) - F_h(x)| < \frac{\varepsilon}{3M};$$

$$|\Phi_h(x) - \Phi(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Тоді із (III.10) одержуємо

$$|z(x)| = |y(x) - \tilde{y}(x)| < \varepsilon.$$

Але, за теоремою Фавара [4], $\tilde{y}(x)$ є м. п. функція Бора, отже, $y(x)$ є також м. п. функція Бора як рівномірна границя м. п. функцій $\tilde{y}(x)$. Теорема доведена.

Розглянемо тепер квазілінійне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(y) + \varphi(x), \qquad \text{(III.11)}$$

де $f(y)$ — неперервно диференціальна функція, а $\varphi(x)$ S^p-м. п. функція. Будемо вважати, що рівняння (III.11) має обмежений розв'язок $y=y(x)$ для $(-\infty<x<+\infty)$.

Теорема III.4. Якщо $f'(y) \geqslant 0$ (або $f'(y) \leqslant 0$) і $\varphi(x)$ — S^p-м. п. функція із S^p-обмеженим неозначеним інтегралом, то всякий обмежений розв'язок рівняння (III.11) є м. п. функція Бора.

Якщо використати теорему II.1, доведення теореми аналогічне доведенню теореми в статті [2].

ЛІТЕРАТУРА

1. H. Bohr und O. Neugebauer. Ueber lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und fastperiodischer rechter Seite. Gött. Nachr., 8—22 (1926).

2. Б. П. Демидович. Почти периодичность решения обыкновенного дифференциального уравнения. УМН, **VIII**, вып. 6 (58), 1953.

3. Б. М. Левитан. Почти периодические функции. М., 1953.

4. J. Favard. Sur les équations differentielles à coefficients presque—periodiques, Acta math., **51**, 31—81 (1927).

5. А. С. Кованько и Л. Н. Лисевич. О некоторых свойствах интеграла и производной от S^p-почти периодической функции. Вопросы матем. физики и теории функций, **II**, 63—69 (1964).

А. С. КОВАНЬКО, Л. Н. ЛИСЕВИЧ

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧНОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С S_p-ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

(резюме)

Исследуется вопрос почти периодичности по Бору решений некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений с почти периодической правой частью в смысле Степанова (S_p-п. п.). Исследование построено на теореме о неопределенном интеграле от почти периодической функции Степанова (S_p-п. п.).