ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1965 *Серія механіко-математична* *Випуск 2*

О. М. КОСТОВСЬКИЙ

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ ОСТРОВСЬКОГО ПРО ЛОКАЛІЗАЦІЮ ПО МОДУЛЯМ НУЛІВ РЯДІВ ЛОРАНА

Розглянемо ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu z^\nu \tag{1}$$

з кільцем збіжності $r<|z|<R$, що має в головній і регулярній частинах нескінченну кількість коефіцієнтів, відмінних від нуля.

Позначимо через

$$\mathfrak{M}_f(z)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} T_\nu z^\nu \tag{2}$$

мажоранту Ньютона цього ряду [1]. Тоді, як відомо, $|A_\nu|\leqslant T_\nu$, послідовність числових нахилів $\left\{R_\nu=\dfrac{T_{\nu-1}}{T_\nu}\right\}$ є неспадною послідовністю. Відхилення $\left\{D_\nu=\dfrac{R_{\nu+1}}{R_\nu}\right\}$ задовольняють нерівності $D_\nu\geqslant 1$ $(-\infty<\nu<\infty)$.

Мета цієї статті — дати узагальнення класичної теореми О. Отровського [1].

Теорема 1. (О. Островського). Якщо всі відхилення D_ν $(-\infty<$ $<\nu<\infty)$ ряду Лорана (1) задовольняють нерівності $D_\nu>u^2$, де u — додатний корінь рівняння $2\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}u^{-\nu^2}=1$, то функція $f(z)$ має точно один простий корінь в кожному кільці

$$\frac{R_\nu}{u}<|z|<R_\nu u$$

і не має нулів зовні цих кіл.

Згідно з умовою теореми всі відхилення $D_\nu>1$. Як відомо, в цьому випадку $\mathfrak{M}_f(z)=\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} T_\nu z^\nu\equiv\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty}|A_\nu|z^\nu=f_{\mathrm{mod}}(z)$. Значить, умови теореми можуть задовольняти тільки ряди Лорана, у яких ряди, складені з модулів коефіцієнтів, є нормальні ряди.

Припустимо, що для індекса k_j виконується нерівність $D_{k_j}>1$, тоді $|A_{k_j}|=T_{k_j}>0$, де T_{k_j} — коефіцієнти $\mathfrak{M}_f(z)$. З рівняння $f(z)=$ $=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu z^\nu=0$ одержимо $(|z|=R_k u)$

$$2\leqslant 1+\sum_{\binom{\nu=-\infty}{\nu\neq k_j}}^{\infty}\left|\frac{A_\nu}{A_{k_j}}\right||z|^{\nu-k_j}\leqslant 1+\sum_{\binom{\nu=-\infty}{\nu\neq 0}}^{\infty}\frac{T_{k-\nu}}{T_{k_j}}(R_k u)^\nu\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\nu=-\infty}^{-1}(D_{k_j-\nu+1}^{-1}\ldots D_{k_j-\alpha}^{\nu+\alpha}\ldots D_{k_j-1}^{\nu+1})\,u^\nu+1+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}(D_{k_j+1}^{-\nu+1}\ldots D_{k_j+\alpha}^{-\nu+\alpha}\ldots D_{k_j+\nu-1}^{-1})\left(\frac{u}{D_k}\right)^\nu. \tag{3}$$

Припустимо, що для цілого додатного числа h для послідовності індексів $k_j=k+jh$ $(j=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots)$ мають місце нерівності $D_{k_j}>u^2$, де константа u більша одиниці.

Підставимо замість відхилень D_{k_j} $(j=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots)$ в (3) величини u^2, а всі останні відхилення замінимо одиницями; в результаті підстановки одержимо нерівність

$$3<2\sum_{\mu=0}^{\infty}\ \sum_{\nu=\mu h}^{(\mu+1)h-1}u^{-(2\mu+1)\nu+h\mu(\mu+1)}=H_{k_j}(u). \tag{4}$$

Неважко перевірити, що

$$H_{k_j}(u)\equiv H_{k_i}(u)\equiv H_k(u). \tag{5}$$

Теорема 2. Нехай відхилення D_{k_j} ряду Лорана (1) задовольняють нерівності

$$D_{k_j}=D_{k+jh}>u_k^2\quad (j=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots), \tag{6}$$

де h — довільне додатне ціле число, а u_k — додатний корінь рівняння

$$H_k(u)=3. \tag{7}$$

(див. (4), (5)). Тоді функція $f(z)$ має h нулів в кожному кільці

$$\frac{R_{k_j+1}}{u_k}<|z|<R_{k_{j+1}}u_k\quad (j=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots) \tag{8}$$

і не має нулів в кільцях

$$R_{k_j}u_k\leqslant|z|\leqslant\frac{R_{k_j+1}}{u_k}\quad (j=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots). \tag{9}$$

В (6) можна вимагати виконання нерівності $D_{k_j}\geqslant u_k^2$, в цьому випадку в (8) треба знаки нерівностей $<$ замінити знаками $\leqslant$, а в (9), навпаки, знаки нерівностей $\leqslant$ треба замінити на $<$.

Доведення теореми будемо провадити від супротивного. Припустимо, що функція $f(z)$ має нулі на колі $|z|=R_k u_k$. Підставляючи значення u_k в нерівність (4), приходимо до протиріччя $3<3$, отже, функція $f(z)$ не має нулів на колі $|z|=R_k u_k$. Зробивши заміну змінної z на z^{-1}, аналогічно встановимо, що $f(z)$ не має нулів на колі $|z|=\frac{R_{k+1}}{u_k}$.

Далі вводимо допоміжну функцію, що залежить від параметра t, $0 \leqslant |t| \leqslant 1$:

$$g_{mn}(z, t) = \sum_{\nu=-\infty}^{-1} t^{-\nu(h+1)} A_{m+\nu} z^{\nu-h} + A_m z^{-h} + A_{m+1} z^{-h+1} + \ldots$$

$$\ldots + A_{n-1} z^{-1} + A_n + \sum_{\nu=1}^{\infty} t^{\nu} A_{n+\nu} z^{\nu} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_{\nu}(t) z^{\nu} \quad (h=n-m),$$

де $m=k_j$ і $n=k_{j+1}$. Функція $g_{mn}(z, t)$ задовольняє всі умови теореми, отже, за доведеним, вона не має нулів на окружності $|z|=R_n(t)u_k$ і окружності $|z|=\frac{R_{m+1}(t)}{u_k}$. Тому функція $g_{mn}(z, t)$ при будь-якому значенні t, $0 \leqslant |t| \leqslant 1$ має в колах одну і ту ж кількість нулів. Очевидно, $z^n g_{mn}(z, 1) \equiv f(z)$ і $z^n g_{mn}(z, 0) = A_m + A_{m+1}z + \ldots + A_n z^h$. Якщо взяти до уваги, що $R_m(0)=0$ і $R_n(0)=\infty$, то відразу робимо висновок, що $f(z)$ має в колі (8) h нулів.

Примітка. Теорема 2 може бути справедливою і для рядів Лорана, у яких ряд, складений з модулів його коефіцієнтів, може бути ненормальним рядом. При $h=1$ одержимо теорему О. Островського.

В загальному вигляді теорема може бути сформульована так (в цьому випадку ряд Лорана може мати полюс скінченного порядку принаймні в одній з точок $z=0$, $z=\infty$):

Теорема 3. Нехай для ряду Лорана $f(z) = \sum_{\nu=p}^{q} A_{\nu} z^{\nu}$ $(-\infty \leqslant p < q \leqslant \infty)$ мають місце нерівності

$$D_{k_j} = D_{k+jh} > u^2 \quad (-\infty \leqslant p \leqslant \alpha \leqslant k_j \leqslant \beta \leqslant q \leqslant \infty),$$

де α, β — задані цілі числа; $u = \max\limits_{\alpha \leqslant k_j \leqslant \beta} (u_{k_j})$; u_{k_j} — додатний корінь рівняння

$$H_{k_j}(u) = \sum_{\mu=k_j-p}^{0} \sum_{\nu=\mu h}^{(\mu+1)h-1} u^{-(2\mu+1)\nu - h\mu(\mu+1)} + \sum_{\mu=0}^{q-k_j} \sum_{\nu=\mu h}^{(\mu+1)h-1} u^{-(2\mu+1)\nu - h\mu(\mu+1)} = 3.$$

Тоді функція $f(z)$ має h нулів в кожному кільці (8) для $\alpha \leqslant k_j < k_{j+1} \leqslant \beta$ і не має нулів в кільцях (9) для $\alpha \leqslant k_j < \beta$. Якщо вимагати в умові теореми $D_{k_j} \geqslant u^2$, то треба зробити заміну знаків нерівностей так само, як це робилось в теоремі 2.

Доведення теореми проводиться аналогічно доведенню теореми 2.

Додатні корені u_k $(h=1, 2, \ldots)$ для $-p=q=\infty$ відповідно мають значення

h	u_k	h	u_k	h	u_k
1	2,193304	6	2,997455	11	2,999990
2	2,760572	7	2,999154	12	2,999997
3	2,926598	8	2,999718	13	2,999999
4	2,976505	9	2,999906	$\geqslant 14$	3,000000
5	2,992 07	10	2,999969		

ЛІТЕРАТУРА

1. A. Ostrowski. Recherches sur la méthode de Graeffe et les zéros des polynomes et des séries de Laurent. Acta Math. **72**, 99—257 (1940).

А. Н. КОСТОВСКИЙ

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ОСТРОВСКОГО О ЛОКАЛИЗАЦИИ ПО МОДУЛЯМ НУЛЕЙ РЯДОВ ЛОРАНА

(резюме)

В работе обобщается классическая теорема А. Островского о локализации нулей по модулям в зависимости от величин отклонений мажоранты Ньютона заданного ряда. С помощью обобщенной теоремы можно для некоторых классов рядов Лорана (степенных рядов и многочленов) выделять кольцевые области, не содержащие нулей исследуемой функции. Можно строить кольцевые области, содержащие определенное число нулей этой функции.