ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1965 *Серія механіко-математична* *Випуск 2*

Є. С. ДОРОЖОВСЬКИЙ, Г. І. КОНИК, О. М. КОСТОВСЬКИЙ

ВИЗНАЧЕННЯ ДОДАТНОГО КОРЕНЯ ОСНОВНОГО РІВНЯННЯ ЛОКАЛІЗАЦІЇ ЗА МОДУЛЕМ НУЛІВ РЯДІВ ЛОРАНА

В роботі [1] введено рівняння

$$H_{kpq}(u)=\sum_{\nu=m}^{n} u^{-\mu_\nu}-2=1+\sum_{\substack{\nu=m\\(\nu\neq 0)}}^{n} u^{-\sum\limits_{j=1}^{|\nu|-1}(|\nu|-1)\tau_{k+j\operatorname{sign}\nu}}\left(\frac{1}{u}\right)^{|\nu|}-2=0, \quad (1)$$

$$(-\infty\leqslant p\leqslant k\leqslant q\leqslant\infty),$$

де $-\infty\leqslant m=p-k\leqslant 0$, $0<n=q-k\leqslant\infty$; τ_ν набирає дійсних невід'ємних значень. Це рівняння називається основним рівнянням в теорії локалізації нулів за модулем рядів Лорана (степеневих рядів і многочленів). Рівняння (1) складається для кожного індекса k, для якого відхилення мажоранти Ньютона $\mathfrak{M}_f(z)$ ряду Лорана

$$f(z)=\sum_{\nu=p}^{q} A_\nu z^\nu \quad (-\infty\leqslant p<q\leqslant\infty,\quad A_p,\ A_q\neq 0) \quad (2)$$

більше чотирьох.

Ряд, що стоїть в лівій частині рівності (1), збігається в колі $|z|>1$.

Можна просто довести таку теорему.

Теорема 1. Ряд $H_{kpq}(u)$ при $m\leqslant -1$ і $n\geqslant 1$ має єдиний простий додатний корінь $u_k=u_{mn}$. Всі інші його корені з кола $|u|>1$ по модулю не більші цього додатного кореня.

Д о в е д е н н я. Функція при додатних значеннях u $(u>1)$ строго спадає від $H_{kpq}(1)$ до -1 $(0\leqslant H_{kpq}(u)\leqslant\infty)$. Отже, H_{kpq} обертається в нуль тільки при одному додатному значенні змінної $u_k>1$. Корінь u_k — простий, бо $H'_{kpq}(u_k)<0$.

Припустимо тепер, що $\tilde{u}$ належить колу $|u|>1$ і є коренем рівняння (1), причому $\tilde{u}\neq u_k$, тоді

$$2=\sum_{\nu=m}^{n}\tilde{u}^{-\mu_\nu}\leqslant\sum_{\nu=m}^{n}|\tilde{u}|^{-\mu_\nu}.$$

і

$$0=\sum_{\nu=m}^{n}\tilde{u}^{-\mu_\nu}-2\leqslant\sum_{\nu=m}^{n}|\tilde{u}|^{-\mu_\nu}-2=H_{kpq}(|\tilde{u}|).$$

Значить, $0=H_{kpq}(u_k)\leqslant H_{kpq}(|\tilde{u}|)$. Оскільки функція строго спадає, то $|\tilde{u}|\leqslant u_k$.

Можна довести, що завжди додатний корінь u_k задовольняє нерівність $2\leqslant u_k\leqslant 3$, якщо $p<k<q$, і $1\leqslant u_k\leqslant 2$, якщо $k=p$ або $k=q$.

На машині «Урал-1» треба було визначати додатні корені для дуже багатьох рівнянь. Були складені таблиці для деяких класів многочленів, степеневих рядів і рядів Лорана, що вивчались в роботах [1, 2]. При складанні таблиць бралися дискретні значення τ_ν (цілі значення 1, 2, 3, . . .).

Для цього рівняння було зведено до вигляду

$$H_{kpq}(v^{-1})=\sum_{\nu=m}^{n} v^{\mu_\nu}-2=0; \qquad \begin{array}{l} \frac{1}{3}\leqslant v_k=u_k^{-1}\leqslant\frac{1}{2}; \quad (p<k<q) \\ \frac{1}{2}\leqslant v_k\leqslant 1, \quad (k=p \text{ або } k=q) \end{array} \tag{3}$$
$$(-\infty\leqslant m\leqslant 0<\infty) \qquad \mu_0=0$$

заміною змінної $v=\frac{1}{u}$. Це зроблено для того, щоб розв'язувати рівняння в режимі фіксованої коми.

Для узагальнення викладок будемо вважати, що $a\leqslant u_k\leqslant b$, де a і b зображуються в масштабі $1/4$. Це дає змогу вести обчислення в режимі фіксованої коми, що значно скорочує час обчислень порівняно з режимом плаваючої коми.

Знаходження кореня проводимо послідовними наближеннями за методом хорд за формулою

$$u=a+H(a)\frac{a-b}{H(b)-H(a)}. \tag{4}$$

Для даного типу рівнянь метод хорд є набагато простіший, ніж метод дотичних, оскільки вираз для похідної від $H_{kpq}(u)$ значно ускладнює процес обчислень.

Після кожної ітерації по (4) робиться перевірка знака $H(u)$, і в залежності від цього програма засилає u на місце однієї з попередніх границь. Отже, початковий інтервал $[a, b]$ з кожною ітерацією звужується. Ітераційний процес закінчується, якщо виконується умова $|H(u)|\leqslant\varepsilon$ де ε — задана точність.

Для спрощення алгоритму вираховуємо поле P значень всіх степенів v^{μ_ν}, поки $|v^{\mu_\nu}|\leqslant\varepsilon$, а $H_{kpq}(u)$ обчислюється сумуванням потрібних степенів із поля P в залежності від значень k, p, q. Час обчислень кореня одного рівняння знаходиться в межах 30—40 *сек*, а число ітерацій — приблизно 20—25 залежно від заданої точності.

Даний алгоритм можна поширити на випадок рівнянь з дробовими показниками, проте це можна здійснити лише в режимі плаваючої коми.

ЛІТЕРАТУРА

1. О. М. Костовський. Узагальнення теореми Островського про локалізацію по модулям нулів рядів Лорана (див. цей збірник).

2. A. Ostrowski. Recherches sur la méthode de Graeffe et les zéros des polynomes et des séries de Laurent. Acta Math. 72, 99—257 (1940).

Е. С. ДОРОЖОВСКИЙ, Г. И. КОНИК, А. Н. КОСТОВСКИЙ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО КОРНЯ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ ЛОКАЛИЗАЦИИ ПО МОДУЛЯМ НУЛЕЙ РЯДОВ ЛОРАНА

(резюме)

В работе исследуется специальное уравнение, введенное А. Н. Костовским в работе [1]. Доказана теорема, что наибольший по модулю корень является единственным простым положительным корнем. В статье предлагается методика вычисления положительного корня основного уравнения на машине «Урал-1» в режиме фиксированной запятой, приводится оптимальная схема решения задачи.