ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1965 *Серія механіко-математична* *Випуск 2*

Б. В. КОВАЛЬЧУК, Г. П. ГУБАНОВ

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ ЗРІЗАНИМИ СЕРЕДНІМИ СУМАМИ ВІД ПОЛІНОМІВ, НАЙКРАЩИХ В ЗАДАНІЙ СИСТЕМІ ТОЧОК

Нехай H_{ω_1, ω_2} є клас 2π-періодичних відносно x та y функцій $f(x, y)$, які задовольняють умову

$$|f(x_2, y_2)-f(x_1, y_1)| \leqslant \omega_1(|x_2-x_1|)+\omega_2(|y_2-y_1|), \tag{1}$$

де $\omega_1(t)$, $\omega_2(z)$ — задані опуклі модулі неперервності.

Через $\overline{H}_{\omega_1, \omega_2}$ позначаємо клас функцій $f(x, y)$ періоду 2π по x та y, які, крім умови (1), володіють властивістю

$$|f(x_2, y_2)-f(x_2, y_1)-f(x_1, y_2)+f(x_1, y_1)| \leqslant C\omega_1(|x_2-x_1|)\,\omega_2(|y_2-y_1|),$$

причому модулі неперервності $\omega_1(t)$, $\omega_2(z)$ задовольняють додаткову умову

$$\lim_{\delta \to 0}\left[\omega_i(\delta)\ln\frac{1}{\delta}\right]=0 \quad (i=1, \text{ або } i=2).$$

Зрізані середні арифметичні суми від поліномів, які найкраще наближають неперервну 2π-періодичну відносно x та y функцію $f(x, y)$ в системі точок (x_k, y_l),

де
$$x_k=\frac{k\pi}{m} \quad (k=1, 2, \ldots, 2m),$$
$$y_l=\frac{l\pi}{n} \quad (l=1, 2, \ldots, 2n),$$

мають вигляд

$$\sigma_{m, n}^{(p, q)}(f; x, y)=\frac{1}{4mn(p+1)(q+1)}\sum_{k=1}^{2m}\sum_{l=1}^{2n} f(x_k, y_l)\, G_m^{(p)}(x, k)\, G_n^{(q)}(y, l), \tag{2}$$

де

$$G_r^{(s)}(t, \nu)=\frac{\sin\dfrac{2r-s-1}{2}(t_\nu-t)\sin\dfrac{s+1}{2}(t_\nu-t)}{\sin^2\dfrac{1}{2}(t_\nu-t)}.$$

Нами установлюються асимптотичні оцінки точних верхніх меж відхилень функцій заданих класів від поліномів (2), тобто асимптотичні оцінки величин

$$E_{m,n}^{(p,q)}(H_{\omega_1,\omega_2};\ x,\ y)=\sup_{f\in H_{\omega_1,\omega_2}}|f(x,y)-\sigma_{m,n}^{(p,q)}(f;\ x,\ y)|;$$

$$E_{m,n}^{(p,q)}(\overline{H}_{\omega_1,\omega_2};\ x,\ y)=\sup_{f\in \overline{H}_{\omega_1,\omega_2}}|f(x,y)-\sigma_{m,n}^{(p,q)}(f;\ x,\ y)|.$$

Теорема 1. Для функцій класу H_{ω_1,ω_2} має місце асимптотична рівність

$$E_{m,n}^{(p,q)}(H_{\omega_1,\omega_2};\ x,\ y)=\frac{2}{\pi^2}|\sin mx\sin ny|\ln\frac{m}{p+1}\ln\frac{n}{q+1}\min\left[\omega_1\left(\frac{\pi}{m}\right),\ \omega_2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]+$$
$$+O\left\{\left(\ln\frac{m}{p+1}+\ln\frac{n}{q+1}\right)\left[\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)+\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right\}+O\left[\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)+\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right], \quad (3)$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно p і q $(0\leqslant p\leqslant m,$ $0\leqslant q\leqslant n)$.

Теорема 2. Для функцій класу $\overline{H}_{\omega_1,\omega_2}$ рівномірно відносно p і q $(0\leqslant p\leqslant m,\ 0\leqslant q\leqslant n)$ справедлива асимптотична рівність

$$E_{m,n}^{(p,q)}(\overline{H}_{\omega_1,\omega_2};\ x,\ y)=\frac{|\sin mx|}{\pi}\ln\frac{m}{p+1}\,\omega_1\left(\frac{\pi}{m}\right)+\frac{|\sin ny|}{\pi}\ln\frac{n}{q+1}\,\omega_2\left(\frac{\pi}{n}\right)+$$
$$+O\left[\ln\frac{m}{p+1}\ln\frac{n}{q+1}\,\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right]+O\left[\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)+\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right], \quad (4)$$

причому

$$E_{m,n}^{(p,q)}\left(\overline{H}_{\omega_1,\omega_2};\ \frac{k\pi}{m},\ \frac{l\pi}{n}\right)=O\left[\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)+\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)+\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right];$$

$$E_{m,n}^{(p,q)}\left(\overline{H}_{\omega_1,\omega_2};\ x,\ \frac{l\pi}{n}\right)=\frac{|\sin mx|}{\pi}\ln\frac{m}{p+1}\,\omega_1\left(\frac{\pi}{m}\right)+$$
$$+O\left[\ln\frac{m}{p+1}\,\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)+\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)+\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right];$$

$$E_{m,n}^{(p,q)}\left(\overline{H}_{\omega_1,\omega_2};\ \frac{k\pi}{m},\ y\right)=\frac{|\sin ny|}{\pi}\ln\frac{n}{q+1}\,\omega_2\left(\frac{\pi}{n}\right)+$$
$$+O\left[\ln\frac{n}{q+1}\,\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)+\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)+\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

З а у в а ж е н н я 1. При $p=0$, $q=0$ оцінки (3) і (4) одержані в роботі [4].

З а у в а ж е н н я 2. У випадку $\omega_1(t)=Mt^{\alpha}$, $\omega_2(z)=Nz^{\beta}$ $(0<\alpha,\ \beta\leqslant 1)$ для інтерполяційних тригонометричних поліномів оцінка, аналогічна (3), одержана в роботі [6], а при $p=0$ і $q=0$ — в роботі [1].

З а у в а ж е н н я 3. Теорема 2 у випадку $\omega_1(t)=Mt^{\alpha}$, $\omega_2(z)=Nz^{\beta}(0<\alpha,\ \beta\leqslant 1)$ для інтерполяційних тригонометричних поліномів доведена В. Б. Гришиним [3].

При доведенні цих теорем ми спираємося на результати, одержані в роботах [2] і [5] при розв'язуванні аналогічних задач для одновимірного випадку, а також використовуємо метод, застосований у роботі [3].

ЛІТЕРАТУРА

1. П. Т. Бугаец. ДАН СССР, **79**, 381 (1951).
2. И. М. Ганзбург. Изв. АН СССР, сер. матем., **27**, 485 (1963).
3. В. Б. Гришин. Диссертация. К., 1964.
4. Г. П. Губанов, Б. В. Ковальчук. ДАН УРСР (1965).
5. В. М. Оловянишников. ДАН СССР, **70**, 761 (1956).
6. В. Г. Пономаренко, ДАН УРСР, **7** (1962).

Б. В. КОВАЛЬЧУК, Г. П. ГУБАНОВ

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ УСЕЧЕННЫМИ СРЕДНИМИ СУММАМИ ОТ ПОЛИНОМОВ, НАИЛУЧШИХ В ЗАДАННОЙ СИСТЕМЕ ТОЧЕК

(резюме)

В работе получены асимптотические оценки верхних граней уклонений функций классов H_{ω_1, ω_2} и $\overline{H}_{\omega_1, \omega_2}$ от тригонометрических полиномов (2).