ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1965 *Серія механіко-математична* *Випуск 2*

Т. О. МЕЛЬНИК

ПРО «СКЛЕЮВАННЯ» РОЗВ'ЯЗКІВ ПАРАБОЛІЧНИХ І ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

В останній час починає виникати інтерес до таких задач для рівнянь в частинних похідних, коли в різних частинах даної області рівняння належить до різних типів. При цьому на зовнішній границі області задаються звичайні граничні (або початкові) умови, а на границях, при переході через які рівняння змінює тип, задаються деякі умови «склеювання» розв'язку, або, як їх часто називають, умови спряження. Вперше такі задачі на «склеювання» розв'язків деяких класів рівнянь параболічного і гіперболічного типів в прямокутнику розглядались в [1, 2, 3] за допомогою методу контурного інтеграла [4]. Застосування цього методу звужує клас розглядуваних задач — коефіцієнти рівнянь, наприклад, можуть залежати тільки від просторових змінних. Крім того, цей метод слабо пристосований до задач в безмежних областях або до задач в областях з криволінійною границею.

В даній роботі розглядається задача на «склеювання» розв'язків загальних двовимірних рівнянь другого порядку параболічного і гіперболічного типу, кожне з яких задане на x-півосі. Для розв'язування задачі застосовується комбінація методу характеристик для гіперболічних рівнянь [5] і методу потенціалів для параболічних рівнянь [6, 7].

Всі величини в даній роботі вважаються дійсними.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Через Π^+ позначимо праву півполосу $\{0\leqslant t\leqslant T;\ 0\leqslant x\leqslant\infty\}$ на площині (x, t); ліву півполосу $\{0\leqslant t\leqslant T;\ -\infty<x<0\}$ позначимо через Π^-. В Π^- розглянемо гіперболічне рівняння

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{i} a_{ij}(x, t)\,\frac{\partial^i u^-}{\partial t^{i-j}\,\partial x^j} = f^-(x, t) \qquad (a_{20}(x, t)\equiv 1), \tag{1$^-$}$$

а в Π^+ — параболічне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=0}^{2} a_i(x, t)\frac{\partial^i u^+}{\partial x^i} = f^+(x, t). \tag{1$^+$}$$

Гіперболічність і параболічність рівнянь (1) розуміється в тому значенні, що виконуються відповідно умови: а) в розкладі

$$\sum_{j=0}^{2} a_{2j}(x, t)\,\lambda^{2-j} = (\lambda-\lambda_1(x, t))(\lambda-\lambda_2(x, t))$$

величини $\lambda_1(x, t)$ і $\lambda_2(x, t)$ дійсні і різні при всіх $(x, t) \in \Pi^-$; б) $a_2(x, t) \geqslant \geqslant \delta > 0$ ($\delta = \text{const}$) при всіх $(x, t) \in \Pi^+$.

Будемо вважати $\lambda_1(x, t) < \lambda_2(x, t)$. Для рівнянь (1) поставимо початкові умови

$$u^-|_{t=0} = g_0(x); \quad \left.\frac{\partial u^-}{\partial t}\right|_{t=0} = g_1(x) \quad (-\infty < x \leqslant 0); \tag{2^-}$$

$$u^+|_{t=0} = g_2(x) \qquad (0 \leqslant x < \infty) \tag{2^+}$$

і умови «склеювання» на лінії $x = 0$, вигляд яких залежить від знаків функцій λ_1 і λ_2. Ці умови будемо задавати за таким правилом:

а) у випадку $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$

$$\begin{gathered} k^-(t)\, u^-(0, t) = k^+(t)\, u^+(0, t) \\ m^-(t) \frac{\partial u^-(0,t)}{\partial x} = m^+(t) \frac{\partial u^+(0,t)}{\partial x} \end{gathered} \quad (0 \leqslant t \leqslant T); \tag{3а}$$

б) у випадку $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

$$k_1^-(t) \frac{\partial u^-(0,t)}{\partial t} + k_2^-(t) \frac{\partial u^-(0,t)}{\partial x} + k_3^-(t)\, u^-(0,t) =$$

$$= m_1^+(t) \frac{\partial u^+(0,t)}{\partial x} + m_2^+(t)\, u^+(0,t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T); \tag{3б}$$

в) у випадку $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

$$k_{1i}^-(t) \frac{\partial u^-(0,t)}{\partial t} + k_{2i}^-(t) \frac{\partial u^-(0,t)}{\partial x} + k_{3i}^-(t)\, u^-(0,t) =$$

$$= m_{1i}^+(t) \frac{\partial u^+(0,t)}{\partial x} + m_{2i}^+(t)\, u^+(0,t) \quad (i = 1, 2, 3;\ 0 \leqslant t \leqslant T); \tag{3в}$$

г) у випадку $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 = 0$ умови «склеювання» задаються так, як у випадку «б», якщо $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$, то ці умови задаються так, як у випадку «а».

Ми детально розглянемо випадок «а», випадки ж «б—г» розглядаються аналогічно.

Зауважимо, що умови (3а) можна було б задати в більш загальному вигляді, наприклад, у вигляді двох рівностей вигляду (3б) або (3г). Таке узагальнення нічого нового не вносить у наведені нижче міркування.

Отже, будемо розглядати задачу (1)—(2)—(3а). Ми поки що не формулюємо ніяких обмежень на дані задачі. Будемо вважати ці обмеження такими, що всі наші викладки будуть законними. У відповідному місці ці обмеження будуть сформульовані.

ЗВЕДЕННЯ ЗАДАЧІ ДО ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо дві допоміжні задачі.

Задача І. В Π^- знайти розв'язок рівняння (1^-), який задовольняє початкову умову (2^-) і граничну умову

$$\frac{\partial u^-(0,t)}{\partial x} = h^-(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T). \tag{4}$$

Задача II. В Π^+ знайти розв'язок рівняння (1^+), який задовольняє початкову умову (2^+) і граничну умову

$$\frac{\partial u^+(0,t)}{\partial x} = h^+(t) \qquad (0 \leqslant t < \infty). \tag{5}$$

Після заміни

$$\frac{\partial u^-}{\partial t} = \frac{\lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2}{\lambda_1 - \lambda_2}; \quad \frac{\partial u^-}{\partial x} = \frac{z_1 - z_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad u^- = z_3,$$

задача 1 зводиться до еквівалентної задачі:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial z_i}{\partial t} = \lambda_i \frac{\partial z_i}{\partial x} + b_{i1} z_1 + b_{i2} z_2 + b_{i3} z_3 + f^- \quad (i=1,\ 2); \\ &\frac{\partial z_3}{\partial t} = \frac{\lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \equiv b_{31} z_1 + b_{32} z_2 + b_{33} z_3 \quad (b_{33} \equiv 0); \end{aligned} \tag{6}$$

$$z_1(x,\ 0) = g_1(x) - \lambda_2(x,\ 0)\, g_0'(x); \quad z_2(x,\ 0) = g_1(x) - \lambda_1(x,\ 0)\, g_0'(x);$$
$$z_3(x,\ 0) = g_0(x) \tag{7}$$

$$z_1(0,\ t) - z_2(0,\ t) = [\lambda_1(0,\ t) - \lambda_2(0,\ t)]\, h^-(t), \tag{8}$$

де $b_{ij}(x, t)$ — відомі функції, які виражаються через коефіцієнти рівняння (1^-).

Задача (6)—(8) в свою чергу еквівалентна системі інтегральних рівнянь [5]:

$$\begin{aligned} z_i(x,\ t) &= G_i^1(x,\ t) + \int_0^t \sum_{j=1}^3 b_{ij}(\varphi_i(\tau,\ x,\ t),\ \tau)\, z_j(\varphi_i(\tau,\ x,\ t),\ \tau)\, d\tau \quad (i=1,\ 2), \\ &\qquad -\infty < x \leqslant \varphi_2(t,\ 0,\ 0); \\ z_1(x,\ t) &= G_1^2(x,\ t) + \int_0^t \sum_{j=1}^3 b_{1j}(\varphi_1(\tau,\ x,\ t),\ \tau)\, z_j(\varphi_1(\tau,\ x,\ t),\ \tau)\, d\tau, \\ &\qquad \varphi_2(t,\ 0,\ 0) \leqslant x \leqslant 0; \\ z_2(x,\ t) &= G_2^2(x,\ t) + \int_{t_2(x,\ t)}^t \sum_{j=1}^3 b_{2j}(\varphi_2(\tau,\ x,\ t),\ \tau)\, z_j(\varphi_2(\tau,\ x,\ t),\ \tau)\, d\tau + \\ &+ \int_0^{t_2(x,\ t)} \sum_{j=1}^3 b_{1j}(\varphi_1(\tau,\ 0,\ t_2(x,\ t)),\ \tau)\, z_j(\varphi_1(\tau,\ 0,\ t_2(x,\ t)),\ \tau)\, d\tau - \\ &- [\lambda_1(0,\ t_2(x,\ t)) - \lambda_2(0,\ t_2(x,\ t))]\, h^-(t_2(x,\ t)); \\ &\qquad \varphi_2(t,\ 0,\ 0) \leqslant x \leqslant 0; \\ z_3(x,\ t) &= G_3^3(x) + \int_0^t \sum_{j=1}^3 b_{3j}(x,\ \tau)\, z_j(x,\ \tau)\, d\tau, \\ &\qquad -\infty < x \leqslant 0 \end{aligned} \tag{9}$$

де $\varphi_i(t, \xi, \tau)$ $(i=1,\ 2)$ є розв'язок рівняння $\dfrac{dx}{dt} = -\lambda_i(x,\ t)$, який проходить через точку $(\xi,\ \tau) \in \Pi^-$; $G_i^j(x, t)$ — відомі функції, які виражаються через дані задачі (6)—(8); $t_2(x, t)$ є функція, яка задовольняє співвідношення

$$\varphi_2(t_2(x, t), x, t) \equiv 0.$$

Очевидно,

$$t_2(0, t) \equiv t.$$

Розв'язок задачі II, згідно з [6, 7], запишемо у вигляді

$$u^+(x, t) = \int_0^\infty G_1(x, \xi, t) g_2(\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} G_2(x, t; \xi, \tau) f^+(\xi, \tau) d\xi +$$

$$+ \int_0^t G_3(x, t, \tau) h^+(\tau) d\tau, \tag{10}$$

де G_i — відомі ядра.

Задача (1)—(2)—(3а), очевидно, переходить в еквівалентну їй задачу про знаходження функцій z_1, z_2, $u^- = z_3$, u^+, які задовольняють рівняння (6), (1^+), початкові умови (7), (2^+) і умови спряження (3а).

Розв'язок цієї останньої задачі шукаємо у вигляді (9), (10), вважаючи там $h^\pm(t)$ невідомими функціями, які будемо підбирати так, щоб задовольнити умови (3а).

Друга умова (3а), очевидно, дає

$$m^-(t) h^-(t) = m^+(t) h^+(t).$$

Звідси

$$h^+(t) = \frac{m^-(t)}{m^+(t)} h^-(t). \tag{11}$$

Враховуючи, що

$$u^-(x, t) = g_0(x) + \int_0^t \frac{\lambda_1(x, \tau) z_1(x, \tau) - \lambda_2(x, \tau) z_2(x, \tau)}{\lambda_1(x, \tau) - \lambda_2(x, \tau)} d\tau$$

і

$$G_3(0, t, \tau) = -\sqrt{\frac{a_2(0, \tau)}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t - \tau}} + G_4(t, \tau) \tag{12}$$

($G_4(t, \tau)$ при $t = \tau$ має особливість порядку меншого, ніж $(t - \tau)^{-\frac{1}{2}}$), з першої умови (3а) одержимо

$$-k^+(t) \int_0^t \sqrt{\frac{a_2(0, \tau)}{\pi}} \frac{m^-(\tau)}{m^+(\tau)} \frac{h^-(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau =$$

$$= k^-(t) \int_0^t \lambda_2(0, \tau) h^-(\tau) d\tau + V(t, z, h^-), \tag{13}$$

де $V(t, z, h^-)$ — лінійний інтегральний оператор Вольтерра від функцій z_1, z_2, z_3, h^-.

З (13) легко отримуємо

$$h^-(t) = V_1(t, z, h^-), \tag{14}$$

де V_1 — оператор з такими ж властивостями, що і V.

Таким чином, відносно невідомих функцій z_1, z_2, z_3, h^-, h^+ ми приходимо до системи інтегральних рівнянь Вольтерра (9), (11), (14).

Має місце така теорема.

Теорема. Нехай виконані умови: а) всі задані функції в (1)—(2)—(3) неперервно диференційовані по своїх змінних не менше двох разів;

б) $k^-(0)\,g_0(0)=k^+(0)\,g_2(0)$; $m^-(0)\,g_0'(0)=m^+(0)\,g_2'(0)$;

в) $m^\pm(t)\neq 0$, $k^\pm(t)\neq 0$ при всіх $t\in[0, T]$.

Тоді система інтегральних рівнянь (9), (11), (14) має єдиний неперервний розв'язок, який можна знайти за методом послідовних наближень.

Функції $z_3=u^-$ і u^+, виражені у вигляді (10), будемо називати узагальненим неперервним розв'язком задачі (1)—(2)—(3а).

ЛІТЕРАТУРА

1. С. И. Гайдук, А. В. Иванов. Об одной задаче на сопряжение уравнений параболического и гиперболического типа. ДАН БССР, № 9 (1964).
2. С. И. Гайдук. Об одной задаче на сопряжение дифференциальных уравнений. ДАН БССР, № 12 (1964).
3. С. И. Гайдук. Применение метода контурного интеграла к решению некоторых задач на сопряжение дифференциальных уравнений параболического и гиперболического типа. Канд. диссертация. Минск, 1964.
4. М. Л. Расулов. Метод контурного интеграла. «Наука», М., 1964.
5. В. Э. Аболиня и А. Д. Мышкис. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости. Уч. зап. Латв. ун-та, **20**, в. 3 (1958).
6. Т. Я. Загорский. Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа. Вид-во ЛДУ, 1961.
7. С. Д. Эйдельман. Параболические системы. «Наука», М., 1964.

Т. Е. МЕЛЬНИК

О «СКЛЕИВАНИИ» РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(резюме)

В работе путем комбинации метода характеристик для гиперболических уравнений и метода потенциала для параболических уравнений доказывается разрешимость гиперболического уравнения (заданного при $x<0$) и параболического уравнения (заданного при $x>0$) при условиях «склеивания» этих решений на линии $x=0$. Задача приводится к системе интегральных уравнений Вольтерра, разрешимой по методу последовательных приближений.