ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1965 *Серія механіко-математична* *Випуск 2*

Є. С. ДОРОЖОВСЬКИЙ, В. Г. КОСТЕНКО

ПОЛЕ ПОТЕНЦІАЛУ ЕЛЕКТРОННОЇ ЛІНЗИ З ПОРУШЕНОЮ ОСЬОВОЮ СИМЕТРІЄЮ

В заводських умовах не можна виготовити ідеальні осесиметричні електронні лінзи. Тому виникає питання про вплив незначних дефектів виготовлення, тобто незначних відхилень від осьової симетрії, на роботу таких лінз.

В даній замітці буде розглядатися лише випадок так званої еліптичної дисторсії осесиметричної електронної лінзи, тобто випадок, при якому поверхні кругових циліндричних електродів незначно деформовані в поверхні еліптичних циліндрів. Знаходження поля потенціалу такої лінзи методом збурень буде зведене до послідовності задач Діріхле для рівнянь в частинних похідних на площині, взагалі кажучи, з розривними граничними умовами, а останні розв'язуються наближено комбінацією методу прямих та методу спряжень.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ДЕЯКІ ЗАУВАЖЕННЯ

Нехай електроди лінзи l_1, l_2, l_3 є кусками еліптичних циліндрів з спільною віссю oz (рис. 1). Задача знаходження поля потенціалу цієї лінзи полягає в знаходженні розв'язку рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \quad (1)$$

який би на електродах дорівнював заданим значенням

$$u\big|_{l_1, l_3}=1; \quad u\big|_{l_2}=0. \quad (2)$$

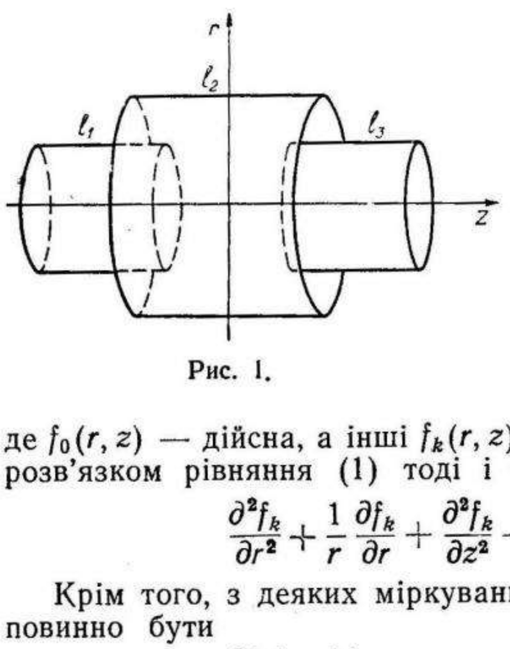

Рис. 1.

Будемо шукати $u(r, z, \theta)$ у вигляді

$$u(r, z, \theta)=\sum_{k=0}^{\infty}\{\overline{f}_k(r, z)\, e^{ik\theta}+ f_k(r, z)\, e^{-ik\theta}\}, \quad (3)$$

де $f_0(r, z)$ — дійсна, а інші $f_k(r, z)$ — комплексні функції. Ряд (3) буде розв'язком рівняння (1) тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{\partial^2 f_k}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f_k}{\partial r}+\frac{\partial^2 f_k}{\partial z^2}-\frac{k^2}{r^2}f_k=0 \quad (k=0, 1, \ldots). \quad (4)$$

Крім того, з деяких міркувань симетрії [1] випливає, що на осі oz повинно бути

$$\left.\frac{\partial f_0(r, z)}{\partial r}\right|_{r=0}=0, \quad f_k(0, z)=0 \quad (k=1, 2, \ldots). \quad (5)$$

ЗБУРЕННЯ ПОЛЯ ВНАСЛІДОК ЗБУРЕННЯ ЕКВІПОТЕНЦІАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ

В припущенні, що електроди лінзи є еквіпотенціальні поверхні, потрібно дослідити вплив зміщень поверхонь електродів на поле її потенціалу, тобто з'ясувати, яким чином можна знайти збурення поля внаслідок збурення його еквіпотенціальних поверхонь, якщо відоме поле ідеальної осесиметричної лінзи та геометричний вигляд збурення її електродів.

Нехай $u(P)$ — потенціал в довільній точці P простору, який задовольняє рівняння Лапласа $\Delta u=0$. Нехай, крім того, α_1, α_2, α_3 — еквіпотенціальні поверхні функції $u(P)$, тобто мають місце рівності

$$u(A_\nu)=C_\nu \quad (\nu=1,\,2,\,3), \tag{6}$$

де A_ν — довільна точка поверхні α_ν; C_ν — константа.

Щоб дослідити всі можливі випадки еліптичної дисторсії розглядуваної лінзи, припустимо, на відміну від [1], що переміщення поверхні α_ν в близьке положення α_ν^* залежить від двох параметрів λ і μ $(0<\lambda,\ \mu<1)$. Проведемо в точці A_ν поверхні $\alpha_\nu\,(\nu=1,\,2,\,3)$ нормаль до перетину з поверхнею α_ν^* в точці A_ν^* і припустимо, що віддаль $h(A_\nu$ між точками A_ν і A_ν^* виражається по степенях λ і μ у вигляді

$$n(A_\nu)=\lambda n_1(A_\nu)+\mu n_2(A_\nu)+\frac{\lambda^2}{2}n_{11}(A_\nu)+\lambda\mu n_{12}(A_\nu)+$$
$$+\frac{\mu^2}{2}n_{22}(A_\nu)+O(\lambda^m\mu^n) \quad (m+n=3). \tag{7}$$

Величини $n_1(A_\nu),\ \ldots,\ n_{22}(A_\nu)$ називаються коефіцієнтами переміщень.

Якщо переміщення еквіпотенціальних поверхонь залежать від параметрів λ і μ, то і збурення потенціалу при цьому також залежатиме від λ і μ. Позначивши потенціал збуреної лінзи в точці P через $u^*(P)$, будемо мати

$$u^*(P)=u(P)+\lambda u_1(P)+\mu u_2(P)+\frac{\lambda^2}{2}u_{11}(P)+\lambda\mu u_{12}(P)+$$
$$+\frac{\mu^2}{2}u_{22}(P)+O(\lambda^m\mu^n), \tag{8}$$

де $u_1(P),\ldots,\ u_{22}(P)$ — збурення, а $u(P)$ — потенціал ідеальної (незбуреної) осесиметричної лінзи.

Потенціал $u^*(P)$ повинен задовольняти рівняння Лапласа при довільних λ і μ, а тому

$$\Delta u_i(P)=0, \quad \Delta u_{ij}(P)=0 \qquad (i,\,j=1,\,2). \tag{9}$$

A_ν^* — довільна точка еквіпотенціальної поверхні α_ν^* для збуреної лінзи, і, отже,

$$u^*(A_\nu^*)=C_\nu. \tag{10}$$

Розкладаючи потенціал $u^*(A_\nu^*)$ в ряд Тейлора в околі точки A_ν, одержимо

$$u^*(A_\nu^*)=u^*(A_\nu)+u_n^*(A_\nu)\,n(A_\nu)+\frac{1}{2!}u_{nn}^*(A_\nu)\,[n(A_\nu)]^2+\ldots,$$

де індекс n означає диференціювання по зовнішній нормалі. Використовуючи (7), матимемо

$$u^*(A_\nu^*)=u^*(A_\nu)+$$
$$+u_n^*(A_\nu)\left[\lambda n_1(A_\nu)+\mu n_2(A_\nu)+\frac{\lambda^2}{2}n_{11}(A_\nu)+\lambda\mu n_{12}(A_\nu)+\frac{\mu^2}{2}n_{22}(A_\nu)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\{\lambda^2[n_1(A_\nu)]^2+2\lambda\mu n_1(A_\nu)n_2(A_\nu)+\mu^2[n_2(A_\nu)]^2\}u_{nn}^*(A_\nu)+O(\lambda^m\mu^n) \quad (11)$$
$$(m+n=3).$$

Якщо підставити $u^*(A_\nu)$ із (8) в (11) і врахувати (6) та (10), одержимо тотожність по λ і μ, з якої випливає

$$\left.\begin{aligned}
&u_1(A_\nu)=-n_1(A_\nu)u_n'(A_\nu), \quad u_2(A_\nu)=-n_2(A_\nu)u_n'(A_\nu),\\
&u_{11}(A_\nu)=-n_{11}(A_\nu)u_n'(A_\nu)-2n_1(A_\nu)u_{1n}'(A_\nu)-\\
&\qquad\qquad -[n_1(A_\nu)]^2u_{nn}''(A_\nu),\\
&u_{12}(A_\nu)=-n_{12}(A_\nu)u_n'(A_\nu)-n_1(A_\nu)u_{2n}'(A_\nu)-\\
&\qquad -n_2(A_\nu)u_{1n}'(A_\nu)-n_1(A_\nu)n_2(A_\nu)u_{nn}''(A_\nu),\\
&u_{22}(A_\nu)=-n_{22}(A_\nu)u_n'(A_\nu)-2n_2(A_\nu)u_{2n}'(A_\nu)-\\
&\qquad\qquad -[n_2(A_\nu)]^2u_{nn}''(A_\nu)
\end{aligned}\right\}. \quad (12)$$

Можна було б одержати відповідні співвідношення і для збурень більш високого порядку, але фактично вони для наших цілей не потрібні. У випадку еліптичної дисторсії виявляється, що досить врахувати лише збурення 1-го порядку $u_1(P)$ та $u_2(P)$, а збурення 2-го порядку $u_{11}(P)$, $u_{12}(P)$, $u_{22}(P)$ треба враховувати при інших порушеннях осьової симетрії електронних лінз (паралельний зсув осей та перекос осей електродів).

Тепер ми маємо можливість знайти збурення поля у вигляді (8), розв'язуючи послідовно задачі Діріхле для рівнянь Лапласа (9) з відповідними граничними умовами (12), якщо відоме поле потенціалу для ідеальної (незбуреної) лінзи та коефіцієнти переміщень $n_1(A_\nu),\ldots$ $\ldots, n_{22}(A_\nu)$.

Нехай еквіпотенціальні поверхні L_1, L_2, L_3 — електроди незбуреної осесиметричної лінзи — є кусками кругових циліндричних поверхонь відповідно радіуса a_1 і a_2, симетричних відносно осей oz і or. Деформацію електродів L_1, L_3 і L_2 відповідно в електроди l_1, l_3 і l_2 задамо рядами Фур'є:

$$r=a_1+\sum_{k=1}^{\infty}\{\bar{R}_k(z,\lambda,\mu)e^{ik\theta}+R_k(z,\lambda,\mu)e^{-ik\theta}\}, \quad (13')$$

де $R_k(z,\lambda,\mu)$ визначені для $z_1\leqslant|z|\leqslant z_2$ (електроди l_1 і l_3), і

$$r=a_2+\sum_{k=1}^{\infty}\{\bar{P}_k(z,\lambda,\mu)e^{ik\theta}+P_k(z,\lambda,\mu)e^{-ik\theta}\}, \quad (13'')$$

де $P_k(z,\lambda,\mu)$ визначені для $0\leqslant|z|\leqslant z_3$ (електрод l_2). Будемо вважати, що мають місце розклади в ряд Тейлора:

$$R_k(z,\lambda,\mu)=\lambda R_{k\lambda}'(z)+\mu R_{k\mu}'(z)+\frac{\lambda^2}{2}R_{k\lambda^2}''(z)+\lambda\mu R_{k\lambda\mu}''(z)+\frac{\mu^2}{2}R_{k\mu^2}''(z)+O(\lambda^m\mu^n),$$
$$(14)$$
$$P_k(z,\lambda,\mu)=\lambda P_{k\lambda}'(z)+\mu P_{k\mu}'(z)+\frac{\lambda^2}{2}P_{k\lambda^2}''(z)+\lambda\mu P_{k\lambda\mu}''(z)+\frac{\mu^2}{2}P_{k\mu^2}''(z)+O(\lambda^m\mu^n).$$

Коефіцієнти розкладів (14) є похідні 1-го і 2-го порядків по λ і μ відповідно від $R_k(z, \lambda, \mu)$ і $P_k(z, \lambda, \mu)$ при $\lambda=\mu=0$.

Будемо називати еліптичну дисторсію симетричною, якщо перетини, перпендикулярні до осі oz, для електродів l_1, l_2, l_3, є еліпси, в яких великі і малі осі відповідно паралельні. Така симетрична еліптичність буде характеризуватися, наприклад, значеннями

$$R'_{2\lambda}(z)=a_1, \quad R'_{2\mu}(z)=\pm a_1, \quad P'_{\lambda}(z)=a_2, \quad P'_{2\mu}(z)=\pm a_2 \tag{15}$$

при нульових значеннях інших коефіцієнтів розкладу (14). Легко переконатися, що при цій умові в перетинах електродів l_1, l_3 і l_2 будуть відповідно еліпси з центром на осі oz:

$$r=a_1[1+2(\lambda\pm\mu)\cos 2\theta] \text{ і } r=a_2[1+2(\lambda\pm\mu)\cos 2\theta].$$

Поверхні електродів лінзи є еквіпотенціальні поверхні поля потенціалу, і тому для електродів l_1 і l_3 з (7) і (13′) випливає

$$n(A_\nu)=\lambda n_1(A_\nu)+\mu n_2(A_\nu)+\frac{\lambda^2}{2}n_{11}(A_\nu)+\lambda\mu n_{12}(A_\nu)+\frac{\mu^2}{2}n_{22}(A_\nu)+O(\lambda^m\mu^n)=$$

$$=-\sum_{k=1}^{\infty}\{\bar{R}_k(z, \lambda, \mu)e^{ik\theta}+R_k(z, \lambda, \mu)e^{-ik\theta}\}.$$

Користуючись тепер розкладом (14) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях λ і μ, одержимо коефіцієнти переміщень

$$\begin{aligned}
n_1(A_\nu)&=-\sum_{k=1}^{\infty}\{\bar{R}'_{k\lambda}(z)e^{ik\theta}+R'_{k\lambda}(z)e^{-ik\theta}\};\\
n_2(A_\nu)&=-\sum_{k=1}^{\infty}\{\bar{R}'_{k\mu}(z)e^{ik\theta}+R'_{k\mu}(z)e^{-ik\theta}\};\\
n_{11}(A_\nu)&=-\sum_{k=1}^{\infty}\{\bar{R}''_{k\lambda^2}(z)e^{ik\theta}+R''_{k\lambda^2}(z)e^{-ik\theta}\};\\
n_{12}(A_\nu)&=-\sum_{k=1}^{\infty}\{\bar{R}''_{k\lambda\mu}(z)e^{ik\theta}+R''_{k\lambda\mu}(z)e^{-ik\theta}\};\\
n_{22}(A_\nu)&=-\sum_{k=1}^{\infty}\{\bar{R}''_{k\mu^2}(z)e^{ik\theta}+R''_{k\mu^2}(z)e^{-ik\theta}\}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Такі ж самі вирази коефіцієнтів переміщень одержимо і для електрода l_2 з заміною в (16) похідних від $R_k(z, \lambda, \mu)$ по λ і μ при $\lambda=\mu=0$ відповідними похідними від $P_k(z, \lambda, \mu)$.

Граничні умови (12) з врахуванням умов (15) і (16) при нульових значеннях всіх інших коефіцієнтів розкладу (14) дають для електродів l_1 і l_3

$$u_1(A_\nu)=-n_1(A_\nu)u'_n(A_\nu)=\sum_{k=1}^{\infty}\{\bar{R}'_{k\lambda}(z)e^{ik\theta}+R'_{k\lambda}(z)e^{-ik\theta}\}2\frac{\partial f_0}{\partial n}=$$

$$=2a_1(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta})\frac{\partial f_0}{\partial n}. \tag{17′}$$

Тут $u_n'(A_\nu)$ — нормальна похідна потенціалу незбуреної лінзи і, як легко бачити з (3), збігається з $2\frac{\partial f_0}{\partial n}$.

Аналогічно на l_2

$$u_1(A_\nu)=2a_2(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta})\frac{\partial f_0}{\partial n}. \qquad (17'')$$

Вважаючи в розкладі (3) $f_k(r, z)$ $(k=1, 2, \ldots)$ функціями параметрів λ і μ такими, що

$$f_k(r, z, \lambda, \mu)=\lambda f'_{k\lambda}(r, z, 0, 0)+\mu f'_{k\mu}(r, z, 0, 0)+O(\lambda^m\mu^n),$$

одержимо збурений потенціал у вигляді

$$u^*(r, z, \theta)=2f_0(r, z)+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\{\bar{f}'_{k\lambda}(r, z)e^{ik\theta}+f'_{k\lambda}(r, z)e^{-ik\theta}\}+$$

$$+\mu\sum_{k=1}^{\infty}\{\bar{f}'_{k\mu}(r, z)e^{ik\theta}+f'_{k\mu}(r, z)e^{-ik\theta}\}+O(\lambda^m\mu^n)=$$

$$=u(r, z, \theta)+\lambda u_1(r, z, \theta)+\mu u_2(r, z, \theta)+O(\lambda^m\mu^n). \qquad (17)$$

Звідки

$$\left.\begin{aligned} u(r, z, \theta)&=2f_0(r, z),\\ u_1(r, z, \theta)&=\sum_{k=1}^{\infty}\{\bar{f}'_{k\lambda}(r, z)e^{ik\theta}+f'_{k\lambda}(r, z)e^{-ik\theta}\},\\ u_2(r, z, \theta)&=\sum_{k=1}^{\infty}\{\bar{f}'_{k\mu}(r, z)e^{ik\theta}+f'_{k\mu}(r, z)e^{-ik\theta}\}\end{aligned}\right\}. \qquad (18)$$

Для визначення $f_0(r, z)$, враховуючи (4) і (5), одержимо задачу — знайти розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f_0}{\partial r}+\frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2}=0 \qquad (19)$$

зовні L_1, L_2, L_3, який би задовольняв умови

$$f_0(r, z)=\frac{1}{2} \text{ на } L_1, L_3; \quad f_0(r, z)=0 \text{ на } L_2; \quad \frac{\partial f_0(0, z)}{\partial r}=0. \qquad (20)$$

Тому що на електродах лінзи вирази (17'), (17'') і (18) повинні збігатися, потрібно у (18) вважати $f'_{2\lambda}(r, z)\not\equiv 0$, $f'_{k\lambda}(r, z)=0$ для всіх $k\neq 2$, і для визначення $f'_{2\lambda}(r, z)$ одержуємо (з врахуванням (4) і (5)) задачу — знайти розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 f'_{2\lambda}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f'_{2\lambda}}{\partial r}+\frac{\partial^2 f'_{2\lambda}}{\partial z^2}-\frac{2^2}{r^2}f'_{2\lambda}=0 \qquad (21)$$

зовні електродів L_1, L_2, L_3, який би задовольняв умови

$$\begin{aligned} f'_{2\lambda}(r, z)&=2a_1\frac{\partial f_0}{\partial n} \text{ на } L_1 \text{ і } L_3;\\ f'_{2\lambda}(r, z)&=2a_2\frac{\partial f_0}{\partial n} \text{ на } L_2;\\ f'_{2\lambda}(0, z)&=0.\end{aligned} \qquad (22)$$

Таку ж саму задачу (21), (22) матимемо для знаходження функції $f'_{2\mu}(r, z)$, що дозволяє у випадку симетричної еліптичної дисторсії користуватися лише одним параметром збурення. Наведемо приклад, коли необхідно вводити два параметри збурення: $R'_{2\lambda}(z) = R'_{2\mu}(z) = a_1$ на l_1 і l_3, $P'_{2\lambda}(z)=a_2$, $P'_{2\mu}(z)=-a_2$ на l_2.

Тоді за використаною вже схемою для знаходження $f'_{2\lambda}(r, z)$ і $f'_{2\mu}(r, z)$ одержимо задачі, які будуть відрізнятися знаком в граничних умовах на l_2.

СХЕМА ЗНАХОДЖЕННЯ ЗБУРЕННЯ ПОТЕНЦІАЛУ

Задачі (19), (20) і (21), (22) можуть бути розв'язані комбінацією методів прямих і спряжень. Т. Л. Мартинович і Б. М. Кордуба нещодавно розв'язали задачу (19), (20) комбінацією методу прямих та інтегральних перетворень [2].

Розглянемо задачу (21), (22), позначивши шукану функцію $f'_{2\lambda}(r, z)$ через $\Psi(r, z)$ і вважаючи відомим розв'язок задачі (19), (20). Враховуючи, що розв'язок просторової задачі Діріхле для рівняння Лапласа прямує до нуля на нескінченності, завжди можна в межах точності, яка вимагається, замінити задачу (21), (22) такою ж задачею для симетричної відносно осі or полоси Q з границею $l \cup l_1 \cup l_2 \cup l_3$ (рис. 2), а саме: знайти в полосі Q розв'язок рівняння

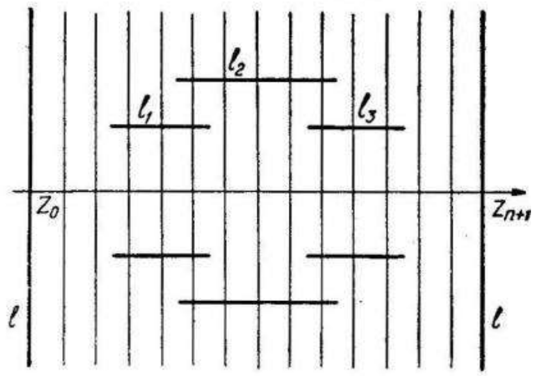

Рис. 2.

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{4}{r^2}\Psi = 0, \tag{21}$$

який задовольняє умови

$$\begin{aligned} &\Psi(r, z) = 2a_1 \frac{\partial f_0}{\partial n} \quad \text{на } l_1 \text{ і } l_3; \\ &\Psi(r, z) = 2a_2 \frac{\partial f_0}{\partial n} \quad \text{на } l_2; \\ &\Psi(r, z) = 0 \qquad\quad \text{на } l; \\ &\Psi(0, z) = 0. \end{aligned} \tag{22'}$$

З симетрії функції $f_0(r, z)$ відносно осей or і oz випливає і симетрія відносно тих же осей функції $\Psi(r, z)$. Тому достатньо знайти $\Psi(r, z)$ в чверті полоси Q, що знаходиться, наприклад, між додатними напрямками осей or і oz.

Розв'язок $f_0(r, z)$ задачі (19), (20) зображується потенціалом простого шару, нормальна похідна якого розривна при переході через електроди лінзи. Шукана функція $\Psi(r, z)$ задачі (21), (22′) на електродах лінзи виражається через $\frac{\partial f_0}{\partial n}$, і тому природно під $\frac{\partial f_0}{\partial n}$ в умовах (22′) розуміти граничні значення $\frac{\partial f_0}{\partial n^-}$ і $\frac{\partial f_0}{\partial n^+}$ при наближенні до електродів по нормалі знизу і зверху відповідно.

Розіб'ємо полосу Q множиною рівновіддалених паралельних прямих $z=z_k$ $(k=0, 1, \ldots, n+1)$ так, щоб $z=z_0$ і $z=z_{n+1}$ збіглися з границею l полоси Q. Розглядаючи рівняння (21) при $z=z_k$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ і заміняючи в останньому

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\cong\frac{\Psi(r, z_{k+1})-2\Psi(r, z_k)+\Psi(r, z_{k-1})}{h^2},$$

де $h=z_{k+1}-z_k$, і позначаючи потім $\Psi(r, z_k)$ через $\Psi_k(r)$, одержимо систему диференціально-різницевих рівнянь, яка за допомогою матриць

$$T=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{\Psi}(r)=\begin{pmatrix}\Psi_1(r)\\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Psi_n(r)\end{pmatrix}$$

набуде вигляду

$$\frac{\partial^2\vec{\Psi}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial r}+\frac{1}{h^2}T\vec{\Psi}-\frac{4}{r^2}\vec{\Psi}=0. \tag{23}$$

Відомо [3], що $T=P\Lambda P$, $PP=E$ (одинична матриця),

$$P=\sqrt{\frac{2}{n+1}}\left\|\sin\frac{ij\pi}{n+1}\right\|_1^n,$$

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}, \quad \lambda_k=-4\sin^2\frac{k\pi}{2(n+1)} \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Домножаючи рівняння (23) на матрицю P зліва і позначаючи $P\vec{\Psi}$ через $\vec{\tilde{\Psi}}$, одержимо

$$\frac{d^2\vec{\tilde{\Psi}}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\vec{\tilde{\Psi}}}{dr}+\frac{1}{h^2}\Lambda\vec{\tilde{\Psi}}-\frac{4}{r^2}\vec{\tilde{\Psi}}=0, \tag{24}$$

або

$$\frac{d^2\tilde{\Psi}_k}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\tilde{\Psi}_k}{dr}+\frac{\lambda_k}{h^2}\tilde{\Psi}_k-\frac{4}{r^2}\tilde{\Psi}_k=0 \quad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{24'}$$

Після позначення $\frac{\lambda_k}{h^2}=-\frac{4\sin^2\frac{k\pi}{2(n+1)}}{h^2}=-\mu_k^2$ і заміни $r=it$ рівняння (24') перейде в рівняння Бесселя

$$t^2\frac{d^2\tilde{\Psi}_k}{dt^2}+t\frac{d\tilde{\Psi}_k}{dt}+(\mu_k^2t^2-4)\tilde{\Psi}_k=0,$$

і, таким чином, лінійно незалежними розв'язками рівняння (24') при всіх $k=1, \ldots, n$ будуть модифіковані функції Бесселя другого порядку $I_2(\mu_k r)$ і $K_2(\mu_k r)$.

Рівняння системи (23) повинні задовольнятись шуканим розв'язком на всіх прямих $z=z_k$ $(1\leqslant k\leqslant n)$, крім точок перетину прямих з електродами l_1, l_2, l_3. У нашому випадку збурення $u_1(r, z, \theta)$ може бути зображене сумою потенціалів подвійного і простого шару. Як відомо, потенціал подвійного шару розривний при переході через границю, а різниця граничних значень його нормальних похідних при наближенні до границі з різних сторін дорівнює нулеві. Щодо потенціалу простого шару, то він при цьому неперервний, а його нормальна похідна розривна. Отже,

$$u_1(r, z, \theta) = \overline{\Psi}(r, z)\, e^{2i\theta} + \Psi(r, z)\, e^{-2i\theta};$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial r} = \frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial r} e^{2i\theta} + \frac{\partial \Psi}{\partial r} e^{-2i\theta}$$

при переході через електроди лінзи зазнають розривів. Ця ж властивість, очевидно, переноситься на $\Psi(r, z)$ і $\dfrac{\partial \Psi}{\partial r}$. Позначимо через q_k і σ_k стрибки відповідно функцій $\Psi(r, z)$ і $\dfrac{\partial \Psi}{\partial r}$ при переході через електроди лінзи по прямій $z = z_k$. Із рівності $P\vec{\Psi}(r) = \vec{\tilde{\Psi}}(r)$ маємо

$$\tilde{\Psi}_k(r) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{i=1}^{n} \sin\frac{ki\pi}{n+1}\, \Psi_i(r) \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{25}$$

звідки випливає, що всі рівняння системи (24) або (24′) повинні задовольнятися для всіх $0 \leqslant r < \infty$, крім $r = a_1$ і $r = a_2$. Якщо через $\tilde{q}_k(r)$ і $\tilde{\sigma}_k(r)$ позначити розриви функцій $\tilde{\Psi}_k(r)$ и $\dfrac{\partial \tilde{\Psi}_k}{\partial r}$ при переході через прямі $r = a_1$ і $r = a_2$ відповідно, то

$$\begin{aligned} \tilde{q}_k(r) &= \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{i=1}^{n} \sin\frac{ki\pi}{n+1}\, q_i(r); \\ \tilde{\sigma}_k(r) &= \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{i=1}^{n} \sin\frac{ki\pi}{n+1}\, \sigma_i(r) \quad (k = 1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{26}$$

Таким чином, приходимо до необхідності знаходження розв'язку рівнянь

$$\frac{d^2\tilde{\Psi}_k^{(s)}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\tilde{\Psi}_k^{(s)}}{dr} - \left(\mu_k^2 + \frac{4}{r^2}\right)\tilde{\Psi}_k^{(s)} = 0 \quad (k = 1, \ldots, n) \quad s = 1, 2, 3, \tag{27}$$

де $\tilde{\Psi}_k^{(1)}(r)$, $\tilde{\Psi}_k^{(2)}(r)$, $\tilde{\Psi}_k^{(3)}(r)$ — розв'язки рівняння (27) відповідно для $0 \leqslant r < a_1$; $a_1 < r < a_2$; $a_2 < r < \infty$. Ці розв'язки повинні задовольняти граничні умови та умови спряження:

$$\begin{aligned} &\tilde{\Psi}_k^{(1)}(0) = 0, \quad \tilde{\Psi}_k^{(3)}(\infty) = 0; \\ &\tilde{\Psi}_k^{(1)}(a_1 - 0) - \tilde{\Psi}_k^{(2)}(a_1 + 0) = \tilde{q}_k(a_1); \\ &\left.\frac{d\tilde{\Psi}_k^{(1)}}{dr}\right|_{r=a_1-0} - \left.\frac{d\tilde{\Psi}_k^{(2)}}{dr}\right|_{r=a_1+0} = \tilde{\sigma}_k(\alpha_1); \\ &\tilde{\Psi}_k^{(2)}(a_2 - 0) - \tilde{\Psi}_k^{(3)}(a_2 + 0) = \tilde{q}_k(a_2); \\ &\left.\frac{d\tilde{\Psi}_k^{(2)}}{dr}\right|_{r=a_2-0} - \left.\frac{d\tilde{\Psi}_k^{(3)}}{dr}\right|_{r=a_2+0} = \tilde{\sigma}_k(a_2) \quad (k = 1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{28}$$

Загальний розв'язок рівнянь (27) має вигляд

$$\tilde{\Psi}_k^{(1)}(r)=A_k I_2(\mu_k r)+M_k K_2(\mu_k r) \qquad (0\leq r<a_1);$$

$$\tilde{\Psi}_k^{(2)}(r)=B_k I_2(\mu_k r)+C_k K_2(\mu_k r) \qquad (a_1<r<a_2);$$

$$\tilde{\Psi}_k^{(3)}(r)=N_k I_2(\mu_k r)+D_k K_2(\mu_k r) \qquad (a_2<r<\infty).$$

Використовуючи відомі властивості функцій $I_2(\mu_k r)$ і $K_2(\mu_k r)$ при $r\to 0$ і $r\to\infty$, а також те, що

$$I_2(t)\frac{dK_2(t)}{dt}-K_2(t)\frac{dI_2(t)}{dt}=-\frac{1}{t},$$

одержимо

$$\begin{aligned}
&M_k=N_k=0;\\
&A_k=a_1\left[\tilde{\sigma}_k(a_1)K_2(\mu_k a_1)-\tilde{q}_k(a_1)\frac{dK_2(\mu_k r)}{dr}\bigg|_{r=a_1}\right]+\\
&\qquad+a_2\left[\tilde{\sigma}_k(a_2)K_2(\mu_k a_2)-\tilde{q}_k(a_2)\frac{dK_2(\mu_k r)}{dr}\bigg|_{r=a_2}\right];\\
&B_k=a_2\left[\tilde{\sigma}_k(a_2)K_2(\mu_k a_2)-\tilde{q}_k(a_2)\frac{dK_2(\mu_k r)}{dr}\bigg|_{r=a_2}\right];\\
&C_k=a_1\left[\tilde{\sigma}_k(a_1)I_2(\mu_k a_1)-\tilde{q}_k(a_1)\frac{dI_2(\mu_k r)}{dr}\bigg|_{r=a_1}\right];\\
&D_k=a_1\left[\tilde{\sigma}_k(a_1)I_2(\mu_k a_1)-\tilde{q}_k(a_1)\frac{dI_2(\mu_k r)}{dr}\bigg|_{r=a_1}\right]+\\
&\qquad+a_2\left[\tilde{\sigma}_k(a_2)I_2(\mu_k a_2)-\tilde{q}_k(a_2)\frac{dI_2(\mu_k r)}{dr}\bigg|_{r=a_2}\right].
\end{aligned} \tag{29}$$

Але

$$\vec{\Psi}(r)=PP\vec{\Psi}(r)=P\vec{\tilde{\Psi}}(r)$$

і, отже,

$$\Psi_j(r)=\sqrt{\frac{2}{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{kj\pi}{n+1}\tilde{\Psi}_k(r).$$

Враховуючи тепер розв'язок задачі (27), (28), маємо

$$\Psi_j(r)=\sqrt{\frac{2}{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\left\{\begin{array}{ll}A_k I_2(\mu_k r) & (0\leq r<a_1)\\ B_k I_2(\mu_k r)+C_k K_2(\mu_k r) & (a_1<r<a_2)\\ D_k K_2(\mu_k r) & (a_2<r<\infty)\end{array}\right\}\sin\frac{kj\pi}{n+1}, \tag{30}$$

$$(j=1, 2, \ldots, n)$$

де A_k, B_k, C_k і D_k визначаються за (29).

Функції

$$q_k(r)\big|_{r=a_1,a_2}=\left[\frac{\partial f_0(r,z_k)}{\partial r^-}-\frac{\partial f_0(r,z_k)}{\partial r^+}\right]_{r=a_1,a_2}$$

будуть відомі, якщо відповідна задача (19), (20) для незбуреної лінзи розв'язана, а для функцій $\sigma_k(r)\big|_{r=a_1,a_2}$ можна скласти систему алгебраїчних рівнянь, задовольняючи розв'язком (30) граничні умови (22′) на електродах l_1, l_2, l_3, розуміючи під $\frac{\partial f_0}{\partial n}$ відповідно $\frac{\partial f_0}{\partial \vec{r}^-}$ або $\frac{\partial f_0}{\partial \vec{r}^+}$. Якщо при цьому врахувати симетрію матриць (стовпців) $\vec{q}(r)$ і $\vec{\sigma}(r)$ на електродах відносно осі or, а саме:

$$\begin{gathered}\vec{q}(a_1)=(q_1(a_1),\ldots,q_n(a_1))=\\=(0,\ldots,0,q_s(a_1),\ldots,q_m(a_1),0,\ldots,0,q_m(a_1),\ldots,q_s(a_1),0,\ldots,0);\\ \vec{q}(a_2)=(0,\ldots,0,q_l(a_2),\ldots,q_{l+p}(a_2),\ q_{l+p+1}(a_2),q_{l+p}(a_2),\ldots,q_l(a_2),0,\ldots,0);\\ \vec{\sigma}(a_1)=(\sigma_1(a_1),\ldots,\sigma_n(a_1))=\\=(0,\ldots,0,\sigma_s(a_1),\ldots,\sigma_m(a_1),0,\ldots,0,\sigma_m(a_1),\ldots,\sigma_s(a_1),0,\ldots,0);\\ \vec{\sigma}(a_2)=(0,\ldots,0,\sigma_l(a_2),\ldots,\sigma_{l+p}(a_2),\sigma_{l+p+1}(a_2),\sigma_{l+p}(a_2),\ldots,\sigma_l(a_2),0,\ldots,0),\end{gathered}\tag{31}$$

і провести елементарні спрощення, то система алгебраїчних рівнянь для визначення $\sigma_k(r)\big|_{r=a_1,\,a_2}$ набере вигляду

$$\begin{gathered}\frac{4}{n+1}\sum_{\alpha=1}^{\frac{n+1}{2}}\left\{a_1\left[K_2(\mu_{2\alpha-1}a_1)\sum_{\beta=s}^{m}\sin\frac{\beta(2\alpha-1)\pi}{n+1}\sigma_\beta(a_1)-\frac{dK_2(\mu_{2\alpha-1}r)}{dr}\bigg|_{r=a_1}\times\right.\right.\\ \left.\times\sum_{\beta=s}^{m}\sin\frac{\beta(2\alpha-1)\pi}{n+1}q_\beta(a_1)\right]+a_2\left[K_2(\mu_{2\alpha-1}a_2)\sum_{\gamma=l}^{l+p+1}\sin\frac{\gamma(2\alpha-1)\pi}{n+1}\sigma_\gamma(a_2)-\right.\\ \left.\left.-\frac{dK_2(\mu_{2\alpha-1}r)}{dr}\bigg|_{r=a_2}\sum_{\gamma=l}^{l+p+1}\sin\frac{\gamma(2\alpha-1)\pi}{n+1}q_\gamma(a_s)\right]\right\}I_2(\mu_{2\alpha-1}a_1)\sin\frac{(2\alpha-1)j\pi}{n+1}=\\ =\frac{\partial f_0}{\partial r^-}\bigg|_{\substack{z=z_j\\ r=a_1-0}}\qquad(j=s,\ldots,m);\end{gathered}\tag{32}$$

$$\begin{gathered}\frac{4}{n+1}\sum_{\alpha=1}^{\frac{n+1}{2}}\left\{a_2\left[K_2(\mu_{2\alpha-1}a_2)\sum_{\gamma=l}^{l+p+1}\sin\frac{\gamma(2\alpha-1)\pi}{n+1}\sigma_\gamma(a_2)-\frac{dK_2(\mu_{2\alpha-1}r)}{dr}\bigg|_{r=a_2}\times\right.\right.\\ \left.\times\sum_{\gamma=l}^{l+p+1}\sin\frac{\gamma(2\alpha-1)\pi}{n+1}q_\gamma(a_2)\right]I_2(\mu_{2\alpha-1}a_2)+a_1\left[I_2(\mu_{2\alpha-1}a_1)\sum_{\beta=s}^{m}\sin\frac{\beta(2\alpha-1)\pi}{n+1}\times\right.\\ \left.\left.\times\sigma_\beta(a_1)-\frac{dI_2(\mu_{2\alpha-1}r)}{dr}\bigg|_{r=a_1}\sum_{\beta=s}^{m}\sin\frac{\beta(2\alpha-1)\pi}{n+1}q_\beta(a_1)\right]K_2(\mu_{2\alpha-1}a_2)\right\}\times\\ \times\sin\frac{(2\alpha-1)j\pi}{n+1}=\frac{\partial f_0}{\partial r^-}\bigg|_{\substack{z=z_j\\ r=a_2-0}}\qquad(j=l,\ldots,l+p+1).\end{gathered}$$

Тут під $\sigma_{l+p+1}(a_2)$ і $q_{l+p+1}(a_2)$ треба розуміти відповідно $\frac{1}{2}\sigma_{l+p+1}(a_2)$ і $\frac{1}{2}q_{l+p+1}(a_2)$.

Таким чином, наближений розв'язок задачі (21), (22′) на кожній з прямих $z=z_i$ одержимо за формулою (30) з врахуванням (29) і розв'язку системи (32), а розв'язок задачі (1), (2) у випадку симетричної еліптичної дисторсії можна записати у вигляді

$$u(r, z, \theta)=2f_0(r, z)+2\lambda\Psi(r, z)\cos 2\theta+O(\lambda^2), \tag{33}$$

де $f_0(r, z)$ і $\Psi(r, z)$ — розв'язки відповідно задач (19), (20) і (21), (22′).

ЛІТЕРАТУРА

1. P. A. Sturrock. Phil. Trans., **A243**, 868 (1951).
2. Т. Л. Мартынович, Б. М. Кордуба. Расчет электростатических полей с осевой симметрией методом прямых и интегральных преобразований. Журн. вычисл. матем. и матем. физ., **5**, № 6 (1965).
задач математической физики и функции дискретного аргумента. Изд-во Киев, ун-та, 1962.
3. Г. Н. Положий. Численное решение двумерных и трехмерных краевых

Е. С. ДОРОЖОВСКИЙ, В. Г. КОСТЕНКО

ПОЛЕ ПОТЕНЦИАЛА ЭЛЕКТРОННОЙ ЛИНЗЫ С НАРУШЕННОЙ ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ

(резюме)

В работе дается схема нахождения потенциала электронной линзы, мало отличающейся от осесимметрической (случай эллиптической дисторсии), с применением метода возмущений и метода прямых.