ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1965 *Серія механіко-математична* *Випуск 2*

Б. В. ВАЛЬКО, І. О. ПРУСОВ, Л. О. РОМАНІВ

ОСЕСИМЕТРИЧНИЙ ПОТЕНЦІАЛ СИСТЕМИ ЕЛЕКТРОДІВ МАЛОЇ ТОВЩИНИ

Звичайно визначення потенціалу електродів зводиться до визначення густини зарядів на їх поверхні. Якщо густина $q(S)$ на поверхні електродів знайдена, то потенціал зовні електродів, як відомо, обчислюється за формулою

$$U=\iint\limits_{S}\frac{q\,(S)\,dS}{r'}, \tag{1}$$

де S — сукупність поверхонь всіх електродів; r' — віддаль між фіксованою точкою зовні електродів і довільною точкою елемента поверхні dS. Надалі будемо вважати, що електродами є тіла обертання малої товщини, які з невеликою похибкою можна прийняти за розімкнуті поверхні обертання з спільною віссю обертання для всіх електродів системи.

В розглянутому випадку формула (1) в циліндричній системі координат набере вигляду

$$U\,(r,\,z)=\int\limits_{s}\frac{q\,(s)\,K\,(k)\,ds}{\sqrt{\alpha^2+(R+r)^2}}, \tag{2}$$

де s — твірна поверхні обертання; $\alpha=\xi-z$, r і z — координати фіксованої точки зовні електродів, R і ξ — циліндричні координати довільної точки елемента твірної ds,

$$K\,(k)=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}},\qquad k^2=\frac{4Rr}{\alpha^2+(R+r)^2}.$$

У випадку, коли густина $q(s)$ невідома, формула (2) для точок $M(r,z)$ на поверхні S є інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду, розв'язок якого зв'язаний з великим обсягом обчислювальних робіт.

Як показали приклади розрахунку потенціалу системи конкретних електродів малої товщини (електронних лінз), найбільш раціональним є розв'язок, оснований на припущенні, що густина $q(s)$ розподілена на деякій поверхні всередині електрода, а задоволення граничних умов здійснюється в точках, дещо віддалених від цієї поверхні [2]. Поряд з цим ефективність числових розрахунків істотно залежить від способу зображення густини $q(s)$. Тут ми відзначимо два з них, які, на нашу думку, найбільш ефективні.

1. Зображення густини $q(s)$ у вигляді суми кільцевих зарядів на краях поверхні

$$\sum_j \frac{C_j K(r, z, R_j, z_j)}{\sqrt{(z_j-z)^2+(R_j+r)^2}} \tag{3}$$

і неперервно розподіленої густини

$$q_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k b_k}{b_k^2 + (s_k - s)^2} \tag{4}$$

на поверхні S, де R_j і z_j — циліндричні координати, які визначають положення кінців дуги s; s_k — дугові координати на дузі s; b_k — наперед задані нелінійні параметри; C_j і a_k — довільні лінійні параметри.

2. Зображення густини у вигляді суми кільцевих зарядів (3) і кусочно рівномірно розподіленої густини

$$q_0 = a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \ldots + a_n\eta_n \tag{5}$$

на поверхні S, де $\eta_k=1$ на деякій частині дуги s і $\eta_k=0$ на всіх інших частинах цієї дуги.

Обравши одне з цих зображень, знаходимо довільні постійні, які входять в нього, задовольняючи граничні умови в окремих точках (по можливості в точках максимумів потенціалу від відповідних доданків густини). Можна використати метод найменших квадратів, взявши кількість рівнянь в 1,5—2 рази більше ніж кількість невідомих.

На відміну від [2], де густини зображаються у вигляді (4), введення запропонованих вище кільцевих зарядів приводить до значного зменшення затрат часу розрахунку. Те ж саме стосується зображення густини у вигляді (5).

У випадку, коли який-небудь електрод лінзи має прямолінійну твірну, паралельну осі симетрії лінзи, його потенціал на основі другого зображення густини має вигляд

$$U(r, z) = \frac{C_1 K(r, z, R, z_1)}{\sqrt{(z_1-z)^2+(R+r)^2}} + \frac{C_2 K(r, z, R, z_2)}{\sqrt{(z_2-z)^2+(R+r)^2}} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k F(r, z, \xi, R), \Big|_{\xi=\xi_k}^{\xi_{k+1}} \tag{6}$$

де R — радіус циліндра; z_1 і z_2 — параметри, які визначають кінці твірної циліндра; (ξ_k, ξ_{k+1}) — відрізки постійної густини; $\xi_0=z_1$; $\xi_n=z_2$;

$$\begin{gathered} F(r, z, \xi, R) = I_0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+b^2}}{\alpha+\sqrt{\alpha^2+b_0^2}}\, d\Theta; \\ b^2 = (R-r)^2 + 4Rr\sin^2\Theta; \\ b_0^2 = (R-r)^2 + 4Rr\Theta^2, \quad \alpha = \xi - z; \\ I_0 = \frac{\pi}{2}\ln(\alpha+n) + \frac{\alpha}{\sqrt{4Rr}} \ln\frac{1-k_1}{1+k_1} + \frac{R-r}{\sqrt{Rr}} \operatorname{arc\,tg} \frac{(R-r)k_1}{\alpha+m}; \\ k_1 = \frac{\pi\sqrt{Rr}}{m+n}; \quad m = \sqrt{\alpha^2+(R-r)^2}; \quad n = \sqrt{m^2+n^2 Rr}. \end{gathered} \tag{7}$$

Характерною особливістю першого зображення густини є можливість збільшення точності задоволення граничних умов, при незмінній кількості невідомих параметрів, що досягається зміною значень нелінійних параметрів b_k після провірки граничних умов в проміжних точках. Це особливо важливо тому, що у зв'язку з накопиченням похибок округлення може виявитися неможливим збільшити точність задоволення граничних умов шляхом збільшення кількості невідомих у зображенні густини. Крім того, перше зображення густини більш вигідне для розрахунків траєкторій електронів.

Відзначимо, що розглянута задача визначення потенціалу є задачею, некоректно поставленою. Внаслідок цього густина, визначена вказаним вище способом, може деякою мірою відрізнятися від дійсної фізичної густини на електродах. Тому тоді, коли нас цікавить не тільки потенціал, як у даному випадку, але і фактичний розподіл густини на електродах, можна використати метод регуляризації А. М. Тихонова [1].

Примітка. У випадку, коли твірна s на поверхні S, на якій розподілена густина $q(s)$, задана в параметричній формі

$$\xi=\xi(\tau), \quad R=R(\tau),$$

формули (2) і (4) можна записати у вигляді

$$U(r, z)=\int_{\tau_1}^{\tau_2} q(\tau) \frac{K(k)\, d\tau}{\sqrt{[\xi(\tau)-z]^2+[R(\tau)+r]^2}}; \tag{8}$$

$$k^2=\frac{4R(\tau)\, r}{[\xi(\tau)-z]^2+[R(\tau)+r]^2}, \quad K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\Theta}}; \tag{9}$$

$$q_0(\tau)=\sum_{(k)} \frac{a_k b_k}{b_k^2+(\tau-\tau_k)^2}, \quad \tau_1\leqslant\tau_k\leqslant\tau_2, \tag{10}$$

де $\xi=\xi(\tau)$ і $R=R(\tau)$ — однозначні диференційовані функції; τ_1 і τ_2 — значення параметра τ, які відповідають кінцям твірної.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. Н. Тихонов. О регуляризации некоректно поставленных задач. ДАН СССР, 42—53, 153, № 1 (1963).
2. Б. В. Валько, І. О. Прусов, Й. В. Людкевич. Визначення осесиметричного потенціалу системи електродів методом нелінійних параметрів. Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 1, 1965.

Б. В. ВАЛЬКО, И. А. ПРУСОВ, Л. Е. РОМАНИВ

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ СИСТЕМЫ ЭЛЕКТРОДОВ МАЛОЙ ТОЛЩИНЫ

(резюме)

Рассматривается задача об определении осесимметричного потенциала системы металлических электродов малой толщины h, обращающихся при $h\to 0$ в разомкнутые поверхности вращения. Полагается, что неизвестные плотности имеют лишь вспомагательное значение для определения потенциала и распределены на некоторой поверхности внутри электродов по закону (4) или (5) с кольцевыми зарядами (3) вблизи торцов электродов на окружностях внутри электродов. Произвольные коэффициенты, входящие в эти представления плотностей, могут быть найдены путем удовлетворения граничным условиям в отдельных точках или методом наименьших квадратов.