О. О. ІВАНОВА

n-ПАРАМЕТРИЧНА ПІВГРУПА ЛІНІЙНИХ ОБМЕЖЕНИХ ОПЕРАЦІЙ І ЗВ'ЯЗОК З ТЕОРІЄЮ АПРОКСИМАЦІЙ

Нехай $\{T(t)\}$ $(t \geqslant 0)$ — однопараметрична півгрупа лінійних обмежених операцій, які перетворюють деякий банаховий простір сам в себе: $T(t)f \in B$, якщо $f \in B$.

Позначимо через A інфінітезимальну операцію півгрупи $\{T(t)\}$:

$$Af = \lim_{\eta \to 0} A_\eta f,$$

де

$$A_\eta = \frac{T(\eta) - I}{\eta},$$

I — одинична операція в B. Відомо, що для рівномірно неперервної півгрупи [1] $T(t) = e^{tA}$, і що A — обмежена операція. Якщо ж $\{T(t)\}$ — сильно неперервна [1] півгрупа, то

$$\lim_{\eta \to 0} e^{\xi A_\eta} f = T(\xi) f, \qquad (\xi \geqslant 0)$$

де

$$e^{\xi A_\eta} f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \xi^n A_\eta^n f.$$

Отже, природно ставити питання про наближення $T(\xi)f$ частинними сумами «узагальненого» ряду Тейлора $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \xi^n A^n f$. Бутцер і Тільман [2] розглядають такі наближення для півгрупи класів $(0, C_1)$ та $(1, C_1)$, (позначення див. в [1] або [2]).

В п. 1 даної роботи розглядаються n-параметричні півгрупи лінійних обмежених операцій певних класів і ставиться питання про наближення їх частинними сумами подвійного ряду Тейлора. Для простоти розглядається двопараметрична півгрупа і доводяться теореми, аналогічні результати Бутцера і Тільмана [2]. В п. 2 даються деякі застосування цих теорем для конкретних півгруп.

1. Нехай X — дійсний простір Банаха, $f \in X$, $\|f\|$ — норма елемента f. Нехай $E(X)$ — алгебра всіх обмежених лінійних перетворень X в X і $\{T(X)\}$ — двопараметрична півгрупа в $E(X)$, тобто параметр $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, $(\alpha_1 \geqslant 0,\ \alpha_2 \geqslant 0,\ (x_1, x_2)$ одиничний вектор), є елементом евклідового простору $E^{(2)}$.

Аналогічно [1] введемо клас C_1. А саме, скажемо, що півгрупа $\{T(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)\}\in C_1$, якщо виконуються умови

$$a_1)\ T(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)\in E(X) \quad \text{для } \alpha_i\geqslant 0 \ (i=1,\,2), \quad T(0)=I;$$

$$a_2)\ T(x+y)=T(x)\,T(y) \quad \text{для } x,\, y\in E^{(2)};$$

$$a_3)\ \lim_{\alpha_i\to 0}\left\|\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\int\limits_0^{\alpha_1}\int\limits_0^{\alpha_2} T(\xi_1 x_1+\xi_2 x_2)\,f d\xi_1 d\xi_2-f\right\|=0,\ f\in X.$$

Далі скажемо, що $\{T(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)\}\in(0,\,C_1)$ або $(1,\,C_1)$ в залежності від того, яка з умов виконується:

$$b_0)\ \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \|T(\xi_1 x_1+\xi_2 x_2)\,f\|\,d\xi_1 d\xi_2<\infty$$

чи

$$b_1)\ \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \|T(\xi_1 x_1+\xi_2 x_2)\|\,d\xi_1 d\xi_2<\infty.$$

Відомо [1], що умови a_3, b_0 і b_1 виконуються, якщо півгрупа сильно неперервна в нулі.

Позначимо через A_i $(i=1,\,2)$ інфінітезимальні оператори відповідних однопараметричних півгруп $\{T(\alpha_i x_i)\}$, через ΔA_i — область означення оператора A_i. Введемо узагальнені кратні поліноми Тейлора

$$S_{n,m}f=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{m}\frac{\alpha_1^k\alpha_2^i}{k!\,i!}A_1^kA_2^if,$$

які мають смисл для

$$f\in\Delta A_1^kA_2^i \quad (k=\overline{0,\,n};\quad i=\overline{0,\,m}). \tag{1}$$

Зауважимо, що умову (1) можна замінити умовою

$$f\in\Delta A_1^nA_2^m\cap\Delta A_1^n. \tag{2}$$

Дійсно, покладемо $A_i^0=I$ $(i=1,\,2)$. Тоді з умови (1) маємо $f\in\Delta A_1^nA_2^m$ при $k=n$, $i=m$, а при $k=n$, $i=0$ матимемо $f\in\Delta A_1^n$. Навпаки, нехай (2) має місце. Тоді з теореми (10, 9, 4) із [1] випливає, що $f\in\Delta A_2^mA_1^n$ і $A_1^nA_2^mf=$ $=A_2^mA_1^nf$.

Тепер нехай $k\leqslant n$, $i\leqslant m$. Із $f\in\Delta A_1^nA_2^m$ випливає $f\in\Delta A_1^kA_2^m$, але оскільки $f\in\Delta A_1^k$, то $A_1^kA_2^mf=A_2^mA_1^kf$, а звідси

$$f\in\Delta A_2^iA_1^k \text{ і } A_2^iA_1^kf=A_1^kA_2^if.$$

Тепер доведемо узагальнену формулу Тейлора, використовуючи відповідну формулу для однопараметричної півгрупи [1]:

$$T(t)\,f-\sum_{k=0}^{p-1}\frac{t^k}{k!}A^kf=\frac{1}{(p-1)\,!}\int\limits_0^t(t-u)^{p-1}\,T(u)\,A^pfdu,\quad (f\in\Delta A^p). \tag{3}$$

Нехай $f \in (2)$. Тоді, застосовуючи двічі (3), одержимо

$$T(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2) f-S_{n-1,\, m-1} f=T(\alpha_1 x_1) \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\alpha_2^i}{i!} A_2^i f-S_{n-1,\, m-1} f+$$

$$+\frac{T(\alpha_1 x_1)}{(m-1)!} \int_0^{\alpha_2} (\alpha_2-\xi_2)^{m-1} T(\xi_2 x_2) A_2^m f d\xi_2=\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_1^k}{k!} A_1^k \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\alpha_2^i}{i!} A_2^i f+$$

$$+\frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\alpha_1} (\alpha_1-\xi_1)^{n-1} T(\xi_1 x_1) A_1^n \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\alpha_2^i}{i!} A_2^i f d\xi_1+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_1^k}{k!} A_1^k \frac{1}{(m-1)!} \int_0^{\alpha_2} (\alpha_2-\xi_2)^{m-1} T(\xi_2 x_2) A_2^m f d\xi_2-S_{n-1,\, m-1} f+$$

$$+\frac{1}{(n-1)!\,(m-1)!} \int_0^{\alpha_1} (\alpha_1-\xi_1)^{n-1} T(\xi_1 x_1) A_1^n \int_0^{\alpha_2} (\alpha_2-\xi_2)^{m-1} T(\xi_2 x_2) \times$$

$$\times A_2^m f d\xi_2 d\xi_1=\frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\alpha_1} (\alpha_1-\xi_1)^{n-1} T(\xi_1 x_1) A_1^n \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\alpha_2^i}{i!} A_2^i f d\xi_1+$$

$$+\frac{1}{(m-1)!} \int_0^{\alpha_2} (\alpha_2-\xi_2)^{m-1} T(\xi_2 x_2) A_2^m \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_1^k}{k!} A_1^k f d\xi_2+$$

$$+\frac{1}{(n-1)!\,(m-1)!} \int_0^{\alpha_1}\int_0^{\alpha_2} (\alpha_1-\xi_1)^{n-1}(\alpha_2-\xi_2)^{m-1} T(\xi_1 x_1+\xi_2 x_2) A_1^n A_2^m f d\xi_2 d\xi_1. \quad (4)$$

Якщо до одновимірних інтегралів в (4) застосувати (3), одержимо

$$T(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2) f-S_{n-1,\, m-1} f=T(\alpha_1 x_1) \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\alpha_2^i}{i!} A_2^i f-S_{n-1,\, m-1} f+$$

$$+T(\alpha_2 x_2) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_1^k}{k!} A_1^k f-S_{n-1,\, m-1} f+$$

$$+\frac{1}{(n-1)!\,(m-1)!} \int_0^{\alpha_1}\int_0^{\alpha_2} (\alpha_1-\xi_1)^{n-1}(\alpha_2-\xi_2)^{m-1} T(\xi_1 x_1+\xi_2 x_2) \times$$

$$\times A_1^n A_2^m f d\xi_1 d\xi_2.$$

Позначивши через

$$S_{m-1}^{(2)} f \text{ і } S_{n-1}^{(1)} f$$

частинні суми

$$\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\alpha_2^i}{i!} A_2^i f \text{ і } \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\alpha_1^k}{k!} A_1^k f,$$

останню рівність запишемо у вигляді

$$T(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2) f-[T(\alpha_1 x_1) S_{m-1}^{(2)} f+T(\alpha_2 x_2) S_{n-1}^{(1)} f-S_{n-1,\, m-1} f]=$$
$$=\frac{1}{(n-1)!\,(m-1)!}\int_0^{\alpha_1}\int_0^{\alpha_2}(\alpha_1-\xi_1)^{n-1}(\alpha_2-\xi_2)^{m-1}\,T(\xi_1 x_1+\xi_2 x_2) A_1^n A_2^m f d\xi_1 d\xi_2. \quad (5)$$

Теорема 1. Якщо

$$\{T(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)\}\in(0,\, C_1) \text{ і } f\in\Delta A_1^n\cap\Delta A_1^n A_2^m,$$

то

$$\lim_{\substack{\alpha_1\to 0\\ \alpha_2\to 0}}\frac{n!\,m!}{\alpha_1^n\,\alpha_2^m}[T(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)-T(\alpha_1 x_1) S_{m-1}^{(2)}-T(\alpha_2 x_2) S_{n-1}^{(1)}-S_{n-1,\, m-1}] f-$$
$$-A_1^n A_2^m f=0. \quad (6)$$

Отже

$$T(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2) f-[T(\alpha_1 x_1) S_{m-1}^{(2)}+T(\alpha_2 x_2) S_{n-1}^{(1)}-S_{n-1,\, m-1}] f=$$
$$=\frac{\alpha_1^n\alpha_2^m}{n!m!} A_1^n A_2^m f+o(\alpha_1^n\alpha_2^m)=O(\alpha_1^n\alpha_2^m).$$

Доведення.

$$\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} T(\xi_1 x_1+\xi_2 x_2)\frac{n!\,m!}{\alpha_1^n\alpha_2^m}\Bigg[T(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2) f+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\alpha_1^k\alpha_2^i}{k!\,i!} A_1^k A_2^i f-$$
$$-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha_1^k}{k!} A_1^k T(\alpha_2 x_2) f-\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\alpha_2^i}{i!} A_2^i T(\alpha_1 x_1) f\Bigg] d\xi_1 d\xi_2=$$
$$=\int_0^{s_1}\int_0^{s_2} T(\xi_1 x_1+\xi_2 x_2)\frac{n!\,m!}{\alpha_1^n\alpha_2^m}\left[T(\alpha_1 x_1)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha_1^k}{k!} A_1^k\right]\cdot\Bigg[T(\alpha_2 x_2)-$$
$$-\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\alpha_2^i}{i!} A_2^i\Bigg] f d\xi_2 d\xi_1=\int_0^{s_1} T(\xi_1 x_1)\,\frac{n!}{\alpha_1^n}\left[T(\alpha_1 x_1)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha_1^k}{k!} A_1^k\right]\times$$
$$\times\int_0^{s_2} T(\xi_2 x_2)\frac{m!}{\alpha_2^m}\left[T(\alpha_2 x_2)-\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\alpha_2^i}{i!} A_2^i\right] f d\xi_2 d\xi_1=\int_0^{s_1} T(\xi_1 x_1)\frac{n!}{\alpha_1^n}\times$$
$$\times\left[T(\alpha_1 x_1)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha_1^k}{k!} A_1^k\right]\cdot[T(s_2 x_2)-I]\frac{m!}{\alpha_2^m}\int_0^{\alpha_2}\left[T(\xi_2 x_2)-\sum_{i=0}^{m-2}\frac{\alpha_2^i}{i!} A_2^i\right] f d\xi_2 d\xi_1=$$
$$=\frac{n!\,m!}{\alpha_1^n\alpha_2^m}\prod_{i=1}^{2}[T(s_i x_i)-I]\int_0^{\alpha_1}\int_0^{\alpha_2}\left[T(\xi_1 x_1)-\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\alpha_1^k}{k!} A_1^k\right]\cdot\Bigg[T(\xi_2 x_2)-$$
$$-\sum_{i=0}^{m-2}\frac{\alpha_2^i}{i!} A_2^i\Bigg] f d\xi_2 d\xi_1=\frac{n!m!}{\alpha_1^n\alpha_2^m}\prod_{i=1}^{2}[T(s_i x_i)-I]\int_0^{\alpha_1}\int_0^{\alpha_2}[T(\xi_1 x_1+\xi_2 x_2) f-$$
$$-(S_{n-2}^{(1)} T(\xi_2 x_2) f+S_{m-2}^{(2)} T(\xi_1 x_1) f-S_{n-2,\, m-2} f]\, d\xi_1 d\xi_2,$$

використовуючи те, що $f \in \Delta A_1^n \cap \Delta A_1^q A_2^m$, формулу (2) із [2] та двічі застосовуючи основну тотожність із [2]:

$$\int_0^s T(u) \frac{q!}{t^q} \left[T(t) f - \sum_{k=0}^{q-1} \frac{t^k}{k!} A^k f \right] du =$$

$$= [T(s) - I] \frac{q!}{t^q} \int_0^t \left\{ T(u) f - \sum_{k=0}^{q-2} \frac{u^k}{k!} A^k f \right\} du$$

для $f \in \Delta A^{q-1}$.

Позначимо через $B_{\alpha_1, \alpha_2}^{n, m} f$ вираз

$$\frac{n!m!}{\alpha_1^n \alpha_2^m} \left[T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\alpha_1^k \alpha_2^i}{k!i!} A_1^k A_2^i f - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_1^k}{k!} A_1^k T(\alpha_2 x_2) f - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\alpha_2^i}{i!} A_2^i T(\alpha_1 x_1) f \right].$$

Тоді

$$\frac{1}{s_1 s_2} \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\alpha_2} T(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) B_{\alpha_1, \alpha_2}^{n, m} f d\xi_2 d\xi_1 =$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{2} [T(s_i x_i) - I]}{s_1 s_2} \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\alpha_2} nm \frac{\xi_1^{n-1} \xi_2^{m-1}}{\alpha_1^n \alpha_2^m} B_{\xi_1, \xi_2}^{n-1, m-1} f d\xi_2 d\xi_1. \tag{7}$$

Перейдемо до границі при $s_1, s_2 \to 0$. Внаслідок умови (a_3) існує подвійна границя лівої частини (7), а значить, і границя правої частини. В силу того, що $f \in \Delta A_i$ $(i = 1, 2)$, існують прості границі правої частини (7) і внаслідок відомої теореми аналізу існує повторна границя (7), і вона дорівнює подвійній. Отже,

$$B_{\alpha_1, \alpha_2}^{n, m} f = \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\alpha_2} nm \frac{\xi_1^{n-1} \xi_2^{m-1}}{\alpha_1^n \alpha_2^m} B_{\xi_1, \xi_2}^{n-1, m-1} A_1 A_2 f d\xi_1 d\xi_2 \tag{8}$$

(тут ми використали те, що $f \in \Delta A_1 A_2$, і те, що $A_1 A_2$ — замкнута операція).

Тепер доведемо теорему 1 методом індукції. Для $n = 1$, $m = 1$ перевіримо вірність (6)

$$\lim_{\substack{\alpha_1 \to 0 \\ \alpha_2 \to 0}} \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} [T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) f - T(\alpha_1 x_1) f - T(\alpha_2 x_2) f + f] =$$

$$= \lim_{\substack{\alpha_1 \to 0 \\ \alpha_2 \to 0}} \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \prod_{i=}^{2} [T(\alpha_i x_i) - I] f = \lim_{\substack{\alpha_1 \to 0 \\ \alpha_2 \to 0}} \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\alpha_2} A_1 A_2 T(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) f d\xi_1 d\xi_2 = A_1 A_2 f$$

в силу інтегрального зображення (10, 9, 6) з [1] і умови (a_3).

Тепер припустимо, що теорема 1 вірна для $n-1$, $m-1$. Тоді з умови (1) випливає, що $A_1A_2f \in \Delta A_1^{n-1}A_2^{m-1}$. Дійсно,

$$A_1^nA_2^mf = A_1^nA_2^{m-1}A_2f = A_2^{m-1}A_1^nA_2f = A_2^{m-1}A_1^{n-1}A_1A_2f.$$

Отже,

$$B_{\alpha_1, \alpha_2}^{n-1, m-1}A_1A_2f$$

прямує до

$$A_1^{n-1}A_2^{m-1}A_1A_2f = A_1^nA_2^mf,$$

тобто

$$B_{\alpha_1, \alpha_2}^{n-1, m-1}A_1A_2f = A_1^nA_2^mf + o(1).$$

Використовуючи (8), маємо

$$B_{\alpha_1, \alpha_2}^{n, m}f = \int_0^{\alpha_1}\int_0^{\alpha_2} \frac{nm}{\alpha_1^n\alpha_2^m}\xi_1^{n-1}\xi_2^{m-1}A_1^nA_2^mf\,d\xi_2d\xi_1 +$$

$$+ o(1)\int_0^{\alpha_1}\int_0^{\alpha_2} \frac{nm}{\alpha_1^n\alpha_2^m}\xi_1^{n-1}\xi_2^{m-1}d\xi_2d\xi_1 = A_1^nA_2^mf + o(1),$$

тобто

$$\lim_{\substack{\alpha_1\to 0\\ \alpha_2\to 0}} \| B_{\alpha_1, \alpha_2}^{n, m}f - A_1^nA_2^mf\| = 0.$$

Якщо норма $\|T(x)\|$ обмежена, з (5) маємо

$$\|T(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)f - \{S_{n-1}^{(1)}T(\alpha_2x_2)f + S_{m-1}^{(2)}T(\alpha_1x_1)f - S_{n-1, m-1}f\}\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha_1^n\alpha_2^m}{n!m!}\|A_1^nA_2^mf\| \sup_{0\leqslant x_i\leqslant\alpha_i}\|T(x)\|, \quad (i=1, 2).$$

Аналогічно, як в [2], можна довести такі твердження.

Теорема 2. Якщо

$$\{T(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\} \in (0, C_1); \quad f_0 \in \Delta A_1^{n-1} \cap \Delta A_1^{n-1}A_2^{m-1};$$

$$\varliminf_{\substack{\alpha_1\to 0\\ \alpha_2\to 0}} \left\| \frac{n!m!}{\alpha_1^n\alpha_2^m}[T(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2) + S_{n-1, m-1} - S_{n-1}^{(1)}T(\alpha_2x_2) - S_{m-1}^{(2)}T(\alpha_1x_1)]f_0 - g_0\right\| = 0,$$

то

$$f_0 \in \Delta A_1^nA_2^m \text{ і } A_1^nA_2^mf_0 = g_0.$$

Теорема 3. Нехай $\{T(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\} \in (1, C_1)$ і X — рефлексивний простір. Тоді, якщо $f_0 \in \Delta A_1^{n-1} \cap \Delta A_1^{n-1}A_2^{m-1}$ і

$$\varliminf_{\substack{\alpha_1\to 0\\ \alpha_2\to 0}} \|B_{\alpha_1, \alpha_2}^{n, m}f_0\| < \infty, \text{ то } f_0 \in \Delta A_1^nA_2^m \cap \Delta A_1^n$$

і

$$\varliminf_{\substack{\alpha_1\to 0\\ \alpha_2\to 0}} B_{\alpha_1, \alpha_2}^{n, m}f_0 = A_1^nA_2^mf_0.$$

Н а с л і д о к 1. Якщо $\{T(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\} \in (0, C_1)$, необхідно для $f_0 \in (1)$ і $A_1^nA_2^mf_0 = g_0$, щоб

$$\varliminf_{\substack{\alpha_1\to 0\\ \alpha_2\to 0}} B_{\alpha_1, \alpha_2}^{n, m}f_0 = g_0$$

і достатньо, щоб

$$\overline{\lim_{\substack{\alpha_1\to 0\\ \alpha_2\to 0}}}\, B^{n,\,m}_{\alpha_1,\,\alpha_2} f_0 = g_0$$

хоча б для однієї послідовності

$$\{\alpha_1^{(i)},\ \alpha_2^{(j)}\};\quad \lim_{i\to\infty}\alpha_1^{(i)}=0,\quad \lim_{j\to\infty}\alpha_2^{(j)}=0.$$

Наслідок 2. Нехай $\{T(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)\}\in(1,\ C_1)$, X — рефлексивний простір, $f_0\in\Delta A_1^{n-1}\cap\Delta A_1^{n-1}A_2^{m-1}$, $f_0\in\Delta A_1^n A_2^m$ тоді і тільки тоді, коли

$$\overline{\lim_{\substack{\alpha_1\to 0\\ \alpha_2\to 0}}}\, \|B^{n,\,m}_{\alpha_1,\,\alpha_2} f_0\| < \infty.$$

Зауважимо, що використавши метод Леу [3] спряженої півгрупи, можна довести наступний результат.

Теорема 3*. Нехай $\{T(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)\}\in(0,\ C_1)$, $f_0\in\Delta(A_1^n)^*\cap\Delta(A_1^{n-1})^*\times$ $\times(A_2^{m-1})^*$ і $\overline{\lim\limits_{\substack{\alpha_1\to 0\\ \alpha_2\to 0}}}\|B^{n,\,m}_{\alpha_1,\,\alpha_2} f_0\| < \infty$. Тоді $f_0\in\Delta(A_1^n)^*(A_2^m)^*$ і $\lim\limits_{\substack{\alpha_1\to 0\\ \alpha_2\to 0}}(B^{n,\,m}_{\alpha_1,\,\alpha_2})^* f_0 =$ $=(A_1^n)^*(A_2^m)^* f_0$.

2. а) Півгрупа зсуву. Нехай $f(t_1, t_2)\in L_p(-\pi,\pi)$, $1<p<\infty$, де $L_p(-\pi,\pi)$ — простір 2π-періодичних функцій, сумовних в p-му степені. Тоді, наприклад, має місце таке твердження, що випливає з наслідку 1 та результатів Леу [3]:

Для того, щоб

$$\frac{\partial^m f(t_1,\ t_2)}{\partial t_2^m},\quad \frac{\partial^{n+m} f(t_1,\ t_2)}{\partial t_1^n \partial t_2^m}\in L_p(-\pi,\ \pi),$$

всі похідні нижчого порядку були абсолютно неперервні в $L_p(-\pi,\pi)$ по кожному змінному і

$$\frac{\partial^{n+m} f(t_1,\ t_2)}{\partial t_1^n \partial t_2^m} = g_0(t_1,\ t_2),$$

необхідно, щоб

$$\lim_{\substack{\alpha_1\to 0\\ \alpha_2\to 0}}\left\|\frac{n!\,m!}{\alpha_1^n\alpha_2^m}\left[f(t_1+\alpha_1,\ t_2+\alpha_2)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha_1^k}{k!}\frac{\partial^k f(t_1,\ t_2+\alpha_2)}{\partial t_1^k}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\alpha_2^i}{i!}\frac{\partial^i f(t_1+\alpha_1,\ t_i)}{\partial t_2^i}+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\alpha_1^k\alpha_2^i}{k!\,i!}\frac{\partial^{k+i} f(t_1,\ t_2)}{\partial t_1^k\partial t_2^i}\right]-\frac{\partial^{n+m} f(t_1,\ t_2)}{\partial t_1^n\partial t_2^m}\right\|_p=0,$$

і достатньо, щоб хоч для однієї послідовності

$$\{\alpha_1^{(i)},\ \alpha_2^{(j)}\},\quad \lim_{i\to\infty}\alpha_1^{(i)}=0,\quad \lim_{j\to\infty}\alpha_2^{(j)}=0$$

мало місце

$$\lim_{\substack{\alpha_1^{(i)}\to 0\\ \alpha_2^{(j)}\to 0}}\left\|\frac{n!\,m!}{\alpha_1^{(i)}\alpha_2^{(j)}}\left[f(t_1+\alpha_1^{(i)},\ t_2+\alpha_2^{(j)})+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\alpha_1^{(i)\,k}\alpha_2^{(j)\,i}}{k!\quad i!}\frac{\partial^{k+i} f}{\partial t_1^k\partial t_2^i}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha_1^{(i)\,k}}{k!}\frac{\partial^k f(t_1,\ t_2+\alpha_2^{(j)})}{\partial t_1}-\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\alpha_2^{(j)\,i}}{i!}\frac{\partial^i f(t_1+\alpha_1^{(i)},\ t_2)}{\partial t_2^i}\right]-g_0(t_1,\ t_2)\right\|_p=0.$$

б) Півгрупа Абеля—Пуассона. Двопараметрична півгрупа Абеля—Пуассона зв'язана з подвійно гармонічними функціями $f(W, Z)$, заданими на біциліндрі $D(|W|<1,\ |Z|<1)$. А саме, якщо функція $f(e^{it_1}, e^{it_2})$ задана на поверхні $T(|W|=1,\ |Z|=1)$, то в $D+T$ можна побудувати подвійно гармонічну функцію $f(W, Z)$ [4]:

$$f(W, Z)=f(r_1e^{i\varphi_1}, r_2e^{i\varphi_2})=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{it_1}, e^{it_2})P_{r_1}(\varphi_1-t_1)P_{r_2}(\varphi_2-t_2)\,dt_1dt_2,$$

де $r_1=e^{-\alpha_1}$, $r_2=e^{-\alpha_2}$, P_r — ядро Пуассона.

Позначимо через $c_{kj}(f)$ коефіцієнт Фур'є функції f:

$$c_{kj}(f)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{is_1}, e^{is_2})\,e^{-iks_1-ijs_2}ds_1ds_2. \tag{9}$$

Тоді теореми 1, 3* та міркування, аналогічні [5], дають нам такий результат.

Нехай $f_0\in L_p(T)$, $1<p\leqslant\infty$ і нехай існують функції $p_1,\ldots,p_k$, $q_1,\ldots,q_l\in L_p(T)$, $(k=\overline{0, n-1};\ l=\overline{0, m-1})$ і $g_{kl}\in L_p(T)$ такі, що $c_{ij}(p_k)=|i^k|c_{ij}(f_0)$, $c_{ij}(q_l)=|j^l|c_{ij}(f_0)$, $c_{ij}(g_{k,l})=|i^kj^l|c_{ij}(f_0)$. Тоді для того, щоб існували функції p_n, q_m та $g_{n,m}\in L_p(T)$ такі, що $c_{ij}(p_n)=|i^n|c_{ij}(f_0)$, $c_{ij}(q_m)=|j^m|c_{ij}(f_0)$, $c_{ij}(g_{n,m})=|i^nj^m|c_{ij}(f_0)$, необхідно і достатньо, щоб

$$\lim_{\substack{\alpha_1\to0\\ \alpha_2\to0}}\Bigg\|\frac{n!m!}{\alpha_1^n\alpha_2^m}\Bigg[f(r_1e^{i\varphi_1}, r_2e^{i\varphi_2})+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1}\frac{\alpha_1^k\alpha_2^l}{k!l!}g_{k,l}(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2})-$$
$$-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha_1^k}{k!}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}p_k(e^{i\varphi_1}, e^{it_2})\Bigg]P_{r_2}(\varphi_2-t_2)\,dt_2-$$
$$-\sum_{l=0}^{m-1}\frac{\alpha_2^l}{l!}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}q_l(e^{it_1}, e^{i\varphi_2})P_{r_1}(\varphi_1-t_2)\,dt_1\Bigg\|_p<\infty.$$

в) Півгрупа Гаусса—Вейєрштрасса. Нехай маємо систему диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(t_1, t_2, x_1, x_2)}{\partial t_1}=4\dfrac{\partial^2u}{\partial x_1^2};\\[2mm] \dfrac{\partial u(t_1, t_2, x_1, x_2)}{\partial t_2}=4\dfrac{\partial^2u}{\partial x_2^2}.\end{cases}\qquad u(0, 0, x_1, x_2)=f(x_1, x_2). \tag{10}$$

Відомо, що розв'язок цієї системи дається півгруповою операцією Гаусса—Вейєрштрасса:

$$u(t_1, t_2, x_1, x_2)=\frac{1}{\pi\sqrt{t_1t_2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi_1, \xi_2)\,e^{-\sum\limits_{k=1}^{2}\frac{(x_k-\xi_k)^2}{t_k}}d\xi_1d\xi_2.$$

Поставимо питання: які властивості повинна мати функція $f(x_1, x_2)$ з початкової умови (10), щоб розв'язок системи наближувався сумами Тейлора з заданою швидкістю? Відповідь дає наступна теорема, яка випливає з теореми 1, 3* і міркувань, аналогічних [5]:

Нехай $f \in L_p(R^2)$, де R^2 — вся площина, $1 < p \leq \infty$. Припустимо, що

$$\frac{\partial^{2k+2l-2} f(x_1, x_2)}{\partial x_1^{2k-1} \partial x_2^{2l-1}} \quad (k=0, \ldots, n-1; \ l=0, \ldots, m-1)$$

абсолютно неперервні по кожній змінній,

$$\frac{\partial^{2k+2l} f(x_1, x_2)}{\partial x_1^{2k} \partial x_2^{2l}} \in L_p(R^2).$$

Тоді для того, щоб $\dfrac{\partial^{2n+2m} f(x_1, x_2)}{\partial x_1^{2n} \partial x_2^{2m}}$ належала до простору $L_p(R^2)$, а похідні нижчого порядку були абсолютно неперервні, необхідно і достатньо, щоб

$$\lim_{\substack{\alpha_1 \to 0 \\ \alpha_2 \to 0}} \left\| \frac{n!\,m!}{\alpha_1^n \alpha_2^m} \left\{ \frac{1}{\pi \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v_1, v_2)\, e^{-\sum_{i=1}^{2} \frac{(u_i - v_i)^2}{\alpha_i}} dv_1 dv_2 - \right.\right.$$

$$- \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_1^k}{k!} \frac{1}{\sqrt{\pi \alpha_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v_1, u_2)\, e^{-\frac{(u_1 - v_1)^2}{\alpha_1}} dv_1 + \right.$$

$$+ \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\alpha_2^i}{i!} \frac{1}{\sqrt{\pi \alpha_2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u_1, v_2)\, e^{-\frac{(u_2 - v_2)^2}{\alpha_2}} dv_2 -$$

$$\left.\left.\left. - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\alpha_1^k \alpha_2^i}{k!\,i!} \frac{\partial^{2k+2i} f(u_1, u_2)}{\partial u_1^{2k} \partial u_2^{2i}} \right] \right\|_p < \infty.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Э. Хилле, Р. Филлипс. Функциональный анализ и полугруппы. Изд-во иностр. л-ры, М., 1962.
2. P. L. Butzer and H. G. Tillman. Mathem. Annalen, **140**, 256—262 (1960).
3. K. Leeuw. On the Adjoint Semigroup and Some Problems in the Theory of Approximation. Math. Z., **73**, № 3 (1960).
4. Б. Л. Фукс. Теория аналитических функций многих комплексных переменных. Гостехтеориздат, 1948.
5. О. А. Иванова. Некоторые теоремы об n-параметрической полугруппе линейных ограниченных операторов и их применения в теории функций (в печати).

О. А. ИВАНОВА

n-ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПОЛУГРУППЫ ЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ И СВЯЗЬ С ТЕОРИЕЙ АППРОКСИМАЦИЙ

(резюме)

В работе доказываются теоремы о приближении n-параметрической полугруппы операторов определенного класса частными суммами обобщенного ряда Тейлора для функции e^{tA}, где A — инфинитезимальный оператор полугруппы. Эти теоремы аналогичны результатам Бутцера и Тильмана, полученным для однопараметрической полугруппы класса $(0, C_1)$ (или $(1, C_1)$. Приводятся примеры.