ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1965 *Серія механіко-математична* *Випуск 2*

О. О. ІВАНОВА

НАБЛИЖЕННЯ СУМОВНИХ ФУНКЦІЙ КРАТНИМИ СИНГУЛЯРНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ

П. Л. Бутцер [1] розглядає наближення функцій $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ сингулярними інтегралами, використовуючи при цьому перетворення Фур'є. В даній роботі встановлені аналогічні результати для функції двох змінних. В п. 1 виводяться допоміжні твердження, необхідні для основних теорем.

1. Позначимо через $C_0(R^2)$ простір функцій $f(x, y)$, неперервних на всій площині і таких, що

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x, y) = \lim_{y\to\pm\infty} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to\pm\infty \\ y\to\pm\infty}} f(x, y) = f(\infty, \infty) = 0. \qquad (1)$$

Знайдемо загальний вигляд лінійного функціоналу, означеного на класі таких функцій. Для цього спочатку виведемо відповідну формулу для функціоналу $\Phi(\varphi)$, заданого на просторі $C_{[2\pi]}$ неперервних функцій $\varphi(x, y)$, 2π-періодичних відносно кожного аргумента.

Розширимо функціонал $\Phi(\varphi)$ на простір $C_{2\pi}$ всіх неперервних функцій, заданих на квадраті $[-\pi, \pi; -\pi, \pi]$, причому норма залишиться та ж сама. Відомо [2], що

$$\Phi(\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x, y)\, dg(x, y), \quad \|\Phi\|_{C_{2\pi}} = \operatorname{var} g(x, y), \quad -\pi \leq x, y \leq \pi \qquad (2)$$

де $g(x, y)$ — функція обмеженої варіації на квадраті $[-\pi, \pi; -\pi, \pi]$, тобто

$$\sup \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{l} |g(x_k, y_i) + g(x_{k-1}, y_{i-1}) - g(x_k, y_{i-1}) - g(x_{k-1}, y_i)| < \infty \qquad (2^*)$$

при будь-якому розбитті квадрата $[-\pi, \pi; -\pi, \pi]$ на прямокутники.

Формулу (2) можна звести до вигляду

$$\Phi(\varphi) = \varphi(\pi, \pi)[g(\pi, \pi) + g(\pi-0, \pi-0) - g(\pi, \pi-0) - g(\pi-0, \pi)] +$$
$$+ \varphi(\pi, -\pi)[g(\pi, -\pi+0) + g(\pi-0, -\pi+0) - g(\pi, -\pi) - g(\pi-0, -\pi)] +$$
$$+ \varphi(-\pi, \pi)[g(-\pi+0, \pi) + g(-\pi, \pi) - g(-\pi+0, \pi-0) - g(-\pi, -\pi+0)] +$$
$$+ \varphi(-\pi, -\pi)[g(-\pi+0, -\pi+0) + g(-\pi, -\pi) - g(-\pi+0, \pi) -$$
$$- g(-\pi, -\pi+0)] + \int_{-\pi+0}^{\pi-0} \varphi(-\pi, y)\, d[g(-\pi+0, y) - g(-\pi, y)] +$$

$$+\int_{-\pi+0}^{\pi-0}\varphi(x,-\pi)\,d\,[g(x,-\pi+0)-g(x,-\pi)]+$$

$$+\int_{-\pi+0}^{\pi-0}\varphi(\pi,y)\,d\,[g(\pi,y)-g(\pi-0,y)]+$$

$$+\int_{-\pi+0}^{\pi-0}\varphi(x,\pi)\,d\,[g(x,\pi)-g(x,\pi-0)]+\int_{-\pi+0}^{\pi-0}\int_{-\pi+0}^{\pi-0}\varphi(x,y)\,dg(x,y), \quad (3)$$

причому

$$\|\Phi\|_{C_{2\pi}}=|\mu_1|+|\mu_2|+|\mu_3|+|\mu_4|+\operatorname{var} g(x,y)+$$
$$+\operatorname{var}_y[g(-\pi+0,y)-g(-\pi,y)]+\operatorname{var}_x[g(x,-\pi+0)-g(x,-\pi)]+$$
$$+\operatorname{var}_y[g(\pi,y)-g(\pi-0,y)]+\operatorname{var}_x[g(x,\pi)-g(x,\pi-0)], \quad (3^*)$$

де var_x, var_y означають варіації функції по x або по y відповідно, а μ_i — скорочені позначення відповідних виразів, які стоять в квадратних дужках в перших чотирьох доданках в (3).

Якщо функція $\varphi(x,y)\in C_{[2\pi]}$, то (3) набуває вигляду

$$\Phi(\varphi)=\varphi(\pi,\pi)(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4)+\sum_{i=1}^{\varphi}I_i+\int_{-\pi+0}^{\pi-0}\int_{-\pi+0}^{\pi-0}\varphi(x,y)\,dg(x,y), \quad (4)$$

де I_i $(i=\overline{1,4})$ — відповідні одновимірні інтеграли з (3). Міркуючи, як в [3], одержимо, що

$$\|\Phi\|_{C_{[2\pi]}}=|\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4|+V+\operatorname*{var}_{-\pi<x,\,y<\pi}+\,g(x,y),$$

де V — сукупність одновимірних варіацій з (3^*).

Тепер нехай задано довільний лінійний функціонал Lf на просторі $C_0(R^2)$. Тоді, використовуючи заміну змінних $x=\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$; $y=\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}$; $t=2\operatorname{arc\,tg}x$; $u=2\operatorname{arc\,tg}y$, одержимо з (4)

$$Lf(x,y)=L\varphi(t,u)=\varphi(\pi,\pi)(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4)+\sum_{i=1}^{4}I_i+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi,\eta)\,dg(\xi,\eta)=f(\infty,\infty)(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4)+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}f(-\infty,\eta)\,d\,[\omega(-\infty+0,\eta)-\omega(-\infty,\eta)]+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi,-\infty)\,d\,[\omega(\xi,-\infty+0)-\omega(\xi,-\infty)]+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty} f(\infty, \eta)\, d[\omega(\infty, \eta)-\omega(\infty-0, \eta)]+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \infty)\, d[\omega(\xi, \infty)-\omega(\xi, \infty-0)]+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta)\, d\omega(\xi, \eta). \quad (5)$$

Але в силу умови (1) звідси маємо

$$Lf(x, y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta)\, d\omega(\xi, \eta), \quad \|L\|=\underset{-\infty<\xi,\, \eta<\infty}{\operatorname{var}} \omega(\xi, \eta). \quad (6)$$

У формулі (6) функція $\omega(\xi, \eta)$ задана на всій площині, і ми рахуємо, що $\omega(\pm\infty, y)=g\left(\pm\frac{\pi}{2}, y\right)$, $\omega(x, \pm\infty)=g\left(x, \pm\frac{\pi}{2}\right)$,

$$\omega(-\infty+0, y)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} g(x, y), \quad \omega(x, \infty-0)=\lim_{y\to\frac{\pi}{2}} g(x, y)$$

і т. д.

Аналогічно, як формулу (6), можна довести формулу для загального вигляду лінійного функціоналу, заданого на просторі неперервних на всій площині функцій $f(x, y)$, таких, що границі $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f x, y)=f(\pm\infty, y)$, $\lim\limits_{y\to\pm\infty} f(x, y)=f(x, \pm\infty)$, $\lim\limits_{\substack{x\to\pm\infty\\ y\to\pm\infty}} f(x, y)=f(\pm\infty, \pm\infty)$ існують.

Деякі означення:

1. Скажемо, що функція $P(u, v)\in F$, якщо

$$P(u, v)=\hat{f}(u, v)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixu-iyv} f(x, y)\, dx\, dy,$$

де $f(x, y)\in L_1(R^2)$.

2. Функція $P(u, v)\in F\mathfrak{S}$, якщо

$$P(u, v)=\check{g}(u, v)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixu-iyv}\, dg(x, y),$$

де $g(x, y)$ — функція обмеженої варіації в сенсі (2*) на всій площині.

Для $P(u, v)\in F\mathfrak{S}$ вводимо норму $\|P\|=\|\check{g}\|=\frac{1}{2\pi}\operatorname{var} g\Big|_{-\infty}^{\infty}$, а для $P(u, v)\in F$ маємо $\|P\|=\|\hat{f}\|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x, y)|\, dx\, dy=\|f\|\, L_1$. Легко перевірити, що якщо $P(u, v)\in F\mathfrak{S}$, то

$$\left|\sum_{i, j=1}^{r, l} c_{i, j} P(u_i, v_j)\right| \leqslant \|P\|\cdot\left\|\sum_{i, j=1}^{r, l} c_{i, j} e^{-iu_i x-iv_j y}\right\|_{\infty}, \quad (7)$$

де $c_{i, j}$ — довільні комплексні, а u_i, v_j — дійсні числа.

Як обернення (7) можна довести таке твердження:

Теорема 1. Якщо $\varphi(u, v)$ вимірна функція на всій площині і існує така константа $M>0$, що $\left|\sum_{i,j=1}^{r,l} c_{i,j}\varphi(u_i, v_j)\right| \leqslant M\left\|\sum_{i,j=1}^{r,l} c_{i,j}e^{-iu_ix-iv_jy}\right\|_\infty$, то $f(u, v)$ майже всюди дорівнює $Q(u, v)\in F\mathfrak{S}$ і $\|Q\|=M$.

Для доведення використовуємо формулу (6). Застосовуються аналогічні міркування, як в (4) при доведенні відповідної теореми для функції однієї змінної. Зауважимо, що замість функції $\chi_\varepsilon(\tau)$, введеної в (4), нам потрібно ввести функцію $\chi_\varepsilon(\tau, \delta)=\chi_\varepsilon(\tau)\cdot\chi_\varepsilon(\delta)$, де $\chi_\varepsilon(\tau) = |\tau|(2\pi\varepsilon)^{-1}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ для $2\pi(n-1)\leqslant|\tau|\leqslant 2\pi n\varepsilon$.

2. Розглянемо двократний сингулярний інтеграл

$$I_\rho(x, y)=\frac{\rho_1\rho_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u, y-v)\, K(\rho_1 u; \rho_2 v)\, du\, dv, \tag{8}$$

де $f(u, v)\in L_1(R^2)$, а ρ_i $(i=1, 2)$ — додатні числа.
Нехай ядро $k(u, v)$ задовольняє умови

а) $K(u, v)\in L_1(R^2)$;

б) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(u, v)\, du dv=1.$

Відомо [5], що $I_\rho(x, y)$ існує майже для всіх точок (x, y) і належить до класу $L_1(R^2)$. Позначимо через $\hat{I}_\rho(x, y)$ перетворення **Фурье** інтеграла $I_\rho(x, y)$:

$$\hat{I}_\rho(u, v)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} I_\rho(x, y)\, e^{-iux-ivy}\, dx dy.$$

За теоремою про згортку функцій [5] маємо

$$\hat{I}_\rho(u, v)=\hat{f}(u, v)\hat{K}\left(\frac{u}{\rho_1}; \frac{v}{\rho_2}\right).$$

Позначимо через $U(\gamma_1, \gamma_2)$ клас функцій $f(x, y)$, які належать до $L_1(R^2)$, причому $\|I_\rho-f\|=0(\rho_1^{\gamma_1}\rho_2^{\gamma_2})$, $\gamma_1>0$, $\gamma_2>0$. Введемо функцію

$$H^0_{\gamma_1, \gamma_2}=\begin{cases}\dfrac{1-\hat{K}(u, v)}{|u^{\gamma_1}v^{\gamma_2}|} & uv\neq 0\\ 0 & uv=0.\end{cases} \tag{9}$$

Якщо $H^0_{\gamma_1, \gamma_2}\to C$ при $u^2+v^2\to 0$, покладемо

$$H_{\gamma_1, \gamma_2}=\begin{cases}\dfrac{1-\hat{K}(u, v)}{u^{\gamma_1}v^{\gamma_2}} & uv\neq 0\\ C & uv=0.\end{cases}$$

Далі

$$\hat{f}(u, v)-\hat{I}_\rho(u, v)=\hat{f}(u, v)\left[1-\hat{K}\left(\frac{u}{\rho_1}; \frac{v}{\rho_2}\right)\right]. \tag{10}$$

Комбінуючи (9) і (10), одержимо, що функція

$$\rho_1^{\gamma_1}\rho_2^{\gamma_2}\hat{f}(u, v)\left[1-\hat{K}\left(\frac{u}{\rho_1}; \frac{v}{\rho_2}\right)\right] = |u^{\gamma_1}v^{\gamma_2}|\hat{f}(u, v)H^0_{\gamma_1, \gamma_2}\left(\frac{u}{\rho_1}; \frac{v}{\rho_2}\right)$$

є перетворення Фур'є від функції $\rho_1^{\gamma_1}\rho_2^{\gamma_2}(f-I_\rho)$.

Застосовуючи (10) та рівність $\|\hat{f}(u, v)\| = \|f(x, y)\|$, маємо, що

$$\left\| |u^{\gamma_1}v^{\gamma_2}|\hat{f}(u, v)H^0_{\gamma_1, \gamma_2}\left(\frac{u}{\rho_1}; \frac{u}{\rho_2}\right)\right\| = \rho_1^{\gamma_1}\rho_2^{\gamma_2}\|I_\rho - f\|. \tag{11}$$

Із теореми 1 одержуємо такий результат:

Теорема 2. Функція $f(u, v) \in L_1(R^2)$ входить в клас $U(\gamma_1, \gamma_2)$, тоді і тільки тоді, коли існує число $M>0$, причому

$$\left|\sum_{i, j=1}^{k, l} c_{i, j}|u_i^{\gamma_1}, v_j^{\gamma_2}|\hat{f}(u_i, v_j)H^0_{\gamma_1, \gamma_2}\left(\frac{u_i}{\rho_1}; \frac{v_j}{\rho_2}\right)\right| \leqslant M\left\|\sum_{i, j=1}^{k, l} c_{i, j}e^{-iu_ix-iv_jy}\right\|_\infty \tag{12}$$

для всіх $c_{i, j}$ комплексних, u_i, v_j дійсних і ρ_1, $\rho_2>0$.

Тепер можна встановити деякі прямі та обернені теореми.

Теорема 3. Нехай $H^0_{\gamma_1, \gamma_2}(u, v)\to C$ при $u^2+v^2\to 0$. Тоді з того, що $f\in U(\gamma_1, \gamma_2)$ випливає $|u^{\gamma_1}v^{\gamma_2}|\hat{f}(u, v)\in F\mathfrak{S}$.

Доведення. За теоремою 2 має місце нерівність (12). Перейдемо до границі в (12) при $\rho_i\to\infty$ і застосуємо теорему 1 до функції $|u^{\gamma_1}v^{\gamma_2}|\hat{f}(u, v)$.

Теорема 4. Нехай функція H_{γ_1, γ_2} існує і входить в $F\mathfrak{S}$. Тоді кожна $f\in L_1(R^2)$ така, що $|u^{\gamma_1}v^{\gamma_2}|\hat{f}(u, v)\in F\mathfrak{S}$, входить в $U(\gamma_1, \gamma_2)$.

Теорема 5. Нехай $U(\gamma_1, \gamma_2)$ містить таку функцію $f(u, v) \in L_1(R^2)$, що $|u^{\gamma_1}v^{\gamma_2}|\hat{f}(u, v)\to R\neq 0$ при $u^2+v^2\to\infty$. Тоді H_{γ_1, γ_2} існує і входить в клас $F\mathfrak{S}$.

Доведення цих теорем подібне до доведення теорем 2 і 3 з [1].

Теорема 6. Нехай кожна функція $f(u, v) \in L_1(R^2)$ така, що $|u^{\gamma_1}v^{\gamma_2}|\hat{f}(u, v)\in F\mathfrak{S}$ входить в клас $U(\gamma_1, \gamma_2)$. Тоді H_{γ_1, γ_2} існує і міститься в $F\mathfrak{S}$.

Доведення. Розглянемо $f(u, v)\in L_1(R^2)$ такого вигляду: $f(u, v)= f_1(u)f_2(v)$, де $f_1(u)$ і $f_2(v)$ сумовні на $(-\infty, \infty)$ і їх перетворення Фур'є є

$$\hat{f}_1(u) = \frac{1}{1+|u|^{\gamma_1}}; \quad \hat{f}_2(v) = \frac{1}{1+|v|^{\gamma_2}},$$

де $\gamma_1, \gamma_2 > 0$. Тоді

$$\hat{f}(u, v) = \hat{f}_1(u)\hat{f}_2(v); \quad |u^{\gamma_1}v^{\gamma_2}|\hat{f}(u, v) = |u^{\gamma_1}|\hat{f}_1(u)(v)^{\gamma_2}\hat{f}_2(v). \tag{13}$$

Відомо [1], що $|u^{\gamma_i}|\hat{f}_i(u)\in F\mathfrak{S}$, тобто

$$|u^{\gamma_i}|\hat{f}_i(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma u}\,dg_i(\sigma) \quad (i=1, 2). \tag{14}$$

Внаслідок (14) і (13)

$$|u^{\gamma_1}v^{\gamma_2}|\hat{f}(u, v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma u-i\delta v}\,dg_1(\sigma)\,dg_2(\delta), \tag{15}$$

де $g_1(\sigma)$ і $g_2(\delta)$ — функції обмеженої варіації на $(-\infty, \infty)$. Вираз (15) можна переписати у формі

$$|u^{\gamma_1}v^{\gamma_2}|\hat{f}(u, v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma u - i\delta v}\, d\omega(\sigma, \delta),$$

де $\omega(\sigma, \delta) = g_1(\sigma)\, g_2(\delta)$ і є функцією обмеженої варіації на всій площині.

Далі, $|u^{\gamma_1}v^{\gamma_2}|\hat{f}(u, v) = [1-\hat{f}_1(u)]\cdot[1-\hat{f}_2(v)] \to 1$ при $u^2+v^2 \to 0$. Застосовуючи теорему 5, доводимо теорему 6.

ЛІТЕРАТУРА

1. P. L. Butzer. Approximation and Fourier—Stieltjes Transforms. Archive Rat. Meshan. and Anal., 5, № 5, 415—419 (1960).
2. P. Lévy. Leçons d'Analyse fonctionnelle. Paris, 1922.
3. Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимаций. Гостехиздат, 1947.
4. Phillips. On Fourier—Stieltjes integrals. Trans. Amer. Math. Soc., 69, № 2 (1950).
5. S. Bochner and K. Chandrasekharan. Fourier transforms. Prinston, 1949.

О. А. ИВАНОВА

ПРИБЛИЖЕНИЕ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ КРАТНЫМИ СИНГУЛЯРНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

(резюме)

В работе обобщаются результаты Бутцера о приближении суммируемых функций сингулярными интегралами на случай функций многих переменных. Попутно установлен общий вид линейных функционалов, определенных на классе непрерывных на всей плоскости и таких, что $\lim\limits_{y\to\pm\infty} f(x, y) = \lim\limits_{y\to\pm\infty} f(x, y) = \lim\limits_{\substack{x\to\pm\infty\\ y\to\pm\infty}} f(x, y) = 0$.