ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1965 Серія механіко-математична Випуск 2

Т. Л. МАРТИНОВИЧ, Б. М. КОРДУБА

ОДИН СПОСІБ РОЗВ'ЯЗКУ ПРОСТОРОВОЇ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ З ОСЬОВОЮ СИМЕТРІЄЮ

Розглянемо граничну задачу Діріхле для рівняння Пуассона з осьовою симетрією

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-q(r, z) \tag{1}$$

в області $-\infty<z<\infty$, $0\leqslant r\leqslant R$ площини r, z при граничних умовах

$$\begin{gathered} u(r, z)\big|_{r=R}=u_R, \qquad \lim_{|z|\to\infty} u(r, z)=0; \\ u\big|_{L_\beta}=u_\beta(r, z), \qquad (\beta=1, 2, \ldots, s), \end{gathered} \tag{2}$$

де L_β — поверхні обертання з спільною віссю $r=0$;

$$q(r, z)=\sum_{\beta=1}^{s} q_\beta(r_\beta(z), z)\,\delta(r-r_\beta(z)); \tag{3}$$

$q_\beta(r_\beta(z), z)$ — функція на поверхні L_β;
$\delta(r-r_\beta(z))$ — функція Дірака;
$r_\beta=r_\beta(z)$ — рівняння поверхні L_β $(\beta=1, 2, \ldots, s)$.

Застосуємо до рівняння (1) в інтервалі $0\leqslant r\leqslant R$ перетворення Ханкеля з скінченними границями [1]

$$\begin{gathered} \bar{u}(z, \xi_i)=\int_0^R r u(r, z) J_0(r\xi_i)\,dr; \\ u(r, z)=\frac{2}{R^2}\sum_i \bar{u}(z, \xi_i)\frac{J_0(r\xi_i)}{[J_1(R\xi_i)]^2}, \end{gathered} \tag{4}$$

де сума береться по всіх додатних корнях рівняння

$$J_0(R\xi_i)=0; \tag{5}$$

$J_0(z)$, $J_1(z)$ — функції Бесселя першого роду нульового і першого порядку.

Із рівності

$$\int_0^R r\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) J_0(r\xi_i)\,dr=\left[r\frac{\partial u}{\partial r}J_0(r\xi_i)\right]_0^R-\xi_i\,[ruJ_0'(r\xi_i)]_0^R-\xi_i^2\bar{u}(z,\xi_i),$$

одержаної інтегруванням по частинах, граничних умов задачі і рівності (5), знаходимо

$$\int_0^R r\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) J_0(r\xi_i)\,dr=-\xi_i^2\overline{u}(z,\xi_i). \qquad (6)$$

Помножаючи обидві частини рівняння (1) на $rJ_0(r\xi_i)$ і інтегруючи по r від 0 до R, враховуючи (6), знаходимо, що трансформанта Ханкеля задовольняє звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d^2\overline{u}(z,\xi_i)}{dz^2}-\xi_i^2\overline{u}(z,\xi_i)=-\overline{q}(z,\xi_i), \qquad (7)$$

де

$$\overline{q}(z,\xi_i)=\int_0^R rq(r,z)\,J_0(r\xi_i)\,dr.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (7), що зникає на нескінченності, візьмемо у вигляді

$$\overline{u}(z,\xi_i)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{d\lambda}{\lambda^2+\xi_i^2}\int_{-\infty}^\infty\overline{q}(t,\xi_i)\cos\lambda(t-z)\,dt. \qquad (8)$$

Враховуючи (8), формула (4) після обчислення інтеграла по λ набуде вигляду

$$u(r,z)=\frac{1}{R^2}\sum_i\frac{J_0(r\xi_i)}{\xi_i[J_1(R\xi_i)]^2}\int_{-\infty}^\infty e^{-\xi_i|t-z|}dt\int_0^R uq(u,t)\,J_0(u\xi_i)\,du. \qquad (9)$$

У випадку ненульових граничних умов задачі при $r=R$ на розв'язок (9) необхідно накласти розв'язок однорідного рівняння (1). Цей розв'язок при граничних умовах

$$u_0(r,z)\big|_{r=R}=u_R(z); \qquad \lim_{|z|\to\infty}u(R,z)=0$$

має вигляд

$$u_0(r,z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{I_0(r\lambda)}{I_0(R\lambda)}\left\{\int_{-\infty}^\infty u(R,t)\cos\lambda(t-z)\,dt\right\}d\lambda. \qquad (10)$$

Функція $u(R,t)$ повинна задовольняти умови, що забезпечують збіжність інтеграла. $I_0(z)$ — модифікована функція Бесселя першого роду нульового порядку.

Враховуючи (3) і операцію

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\delta(x-a)\,dx=f(a),$$

з (9) одержуємо

$$u(r,z)=\frac{1}{R^2}\sum_{\beta=1}^s\sum_i\frac{J_0(r\xi_i)}{\xi_i[J_1(R\xi_i)]^2}\int_{a_\beta}^{b_\beta}r_\beta(t)\,J_0(r_\beta(t)\,\xi_i)\,q(r_\beta(t),t)\,e^{-\xi_i|t-z|}dt. \qquad (11)$$

Якщо в останній формулі неперервну функцію $q(r_\beta, z)$ на кожній з поверхонь L_β замінити значеннями в окремих точках, поклавши

$$q(r_\beta, t) = \sum_{\alpha=1}^{m_s} q_\beta^{(\alpha)} \delta(t - z_\alpha), \tag{12}$$

то одержимо приблизне зображення $u(r, z)$ у вигляді

$$u(r, z) = \frac{1}{R^2} \sum_{\beta=1}^{s} \sum_{\alpha=1}^{m_s} q_\beta^{(\alpha)} r_\beta^{(\alpha)} \sum_i \frac{J_0(r_\beta^{(\alpha)} \xi_i)\, J_0(r\xi_i)}{\xi_i [J_1(R\xi_i)]^2} e^{-\xi_i |z_\alpha - z|}, \tag{13}$$

де внутрішня сума береться по всіх додатних корнях рівняння

$$J_0(R\xi_i) = 0.$$

Викладений вище метод застосовувався до розрахунку електростатичного поля, створеного електронно-оптичною системою, що складається з трьох циліндричних електродів з спільною віссю $r=0$ (розміри вказані на рис. 1).

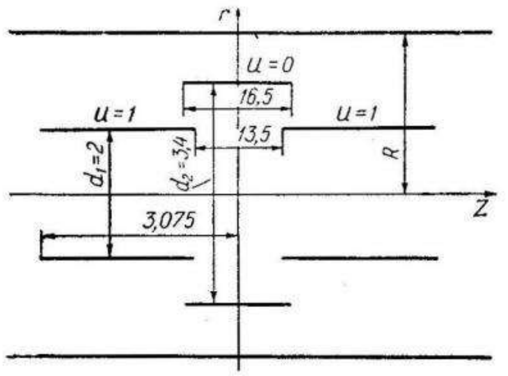

Рис. 1.

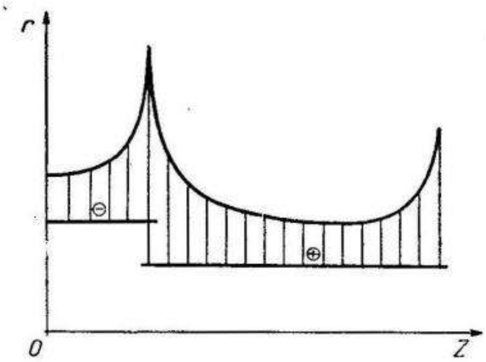

Рис. 2.

На крайніх електродах потенціал дорівнює одиниці, на середньому — нулю. Вся система вміщувалась в заземлений циліндр радіуса R. Задача розв'язувалась при $R=10$, 15, 20. Підрахунок при цих значеннях R вказує, що значення потенціалу в області, що являє найбільший інтерес (всередині циліндрів), збігаються з двома знаками.

Завдяки симетрії системи відносно площини $z=0$ мають місце співвідношення

$$q_\beta^{(\alpha)} = q_\beta^{(m_\beta + 1 - \alpha)}; \quad r_\beta^{(\alpha)} = r_\beta^{(m_\beta + 1 - \alpha)} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m_\beta). \tag{14}$$

На рис. 2 зображено чверть осьового перетину даної системи.

Скориставшись заданими значеннями потенціалу на електродах з формули (14), складаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь n-го порядку (в нашому випадку $n=22$) для визначення невідомих густин зарядів $q_\beta^{(\alpha)}$.

На рис. 2 дано графік розподілу цих густин на кожному з електродів при різних значеннях $r=R$. Аналогічна задача розв'язувалась нами методом прямих [2]. Криві розподілу густин зарядів, одержані методом прямих і викладеним вище методом, при різних значеннях R в прийнятому масштабі повністю збігаються.

При відомих значеннях густин зарядів $q_\beta^{(\alpha)}$ потенціал поля в будь-якій точці розглядуваної області визначається за формулою (14).

Розрахунок проводився на машині «Урал-1».

ЛІТЕРАТУРА

1. И. Снеддон. Преобразование Фурье. М., 1955.
2. Т. Л. Мартынович, Б. М. Кордуба. Применение метода прямых в сочетании с методом интегральных преобразований к расчету электростатических полей с осевой симметрией. Журн. вычисл. математики и матем. физики, 5, № 6 (1965).

Т. Л. МАРТЫНОВИЧ, Б. М. КОРДУБА

ОДИН СПОСОБ РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ

(резюме)

Рассматривается метод расчета пространственной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в цилиндрической системе координат. В качестве иллюстрации метода приводится расчет поля потенциала электронно-оптической системы, состоящей из трех цилиндрических электродов.