ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1965 *Серія механіко-математична* *Випуск 2*

Г. Л. БУЙМОЛА

ДЕЯКІ ПИТАННЯ ГЕОМЕТРОГРАФІЇ n-ВИМІРНОГО ЕВКЛІДОВОГО ПРОСТОРУ

Задачі на побудову 1-го і 2-го степеня в двовимірній евклідовій площині розв'язуються за допомогою циркуля і лінійки і зводяться до креслення прямих ліній і кіл — єдиних кривих сталої кривини в цій площині.

Дані і побудовані фігури в двовимірній площині складаються з точок, прямих і кіл та їх сполук. Побудова прямої в цій площині здійснюється звичайною лінійкою. Лемуанів символ побудови буде $Op(2R_1+R_2)$ і простота $\bar{S}=3$ [1, 2].

Коло в двовимірній площині може бути заданим фіксованою точкою (центром) і радіусом (у вигляді відрізка AB). Побудова його здійснюється за допомогою циркуля. Лемуанів символ побудови буде $Op(3C_1+C_2)$, простота $S=4$.

До цих приладів побудови нам здається доцільним долучити найпростіший прилад, за допомогою якого відзначають (будують) точки на прямій або на площині. Цей прилад будемо називати *точкографом* і уявляти у вигляді гостро підструганого олівця або вістря (наприклад, ніжки циркуля). Лемуанів символ «побудови» (фіксування) точки буде $Op(T_1+T_2)$; $S=2$, де T_1 — підготовча операція встановлення вістря точкографа в точку, а T_2 — фіксування точки.

У просторі n-вимірів Π^n, крім точок Π^0, прямих Π^1 і кіл K^1, з якими ми маємо справу при розв'язуванні задач у двовимірній площині Π^2, з'являються ще нові елементи. В тривимірному просторі — площини і сфери, що є аналогами прямої і кола в Π^2, а в просторах вищого числа виміру — їх узагальнення, площини і сфери вищого виміру.

Оскільки площина і сфера є поверхнями сталої кривини в тривимірному просторі, то виникає думка про такі побудови, які здійснювалися б шляхом «проведення» (побудови) поверхонь сталої кривини, тобто не тільки побудови точок, прямих і кіл, але і двовимірних площин і сфер, а в просторах вищого числа вимірів — площин і сфер вищого виміру, аналогів двовимірної площини і сфери. Для таких побудов необхідні вже спеціальні прилади. Крім лінійки і циркуля, за допомогою яких здійснюється в площині Π^2 побудова прямих і кіл, ми будемо користуватися приладами, що не вживалися досі, — площинографом і сферографом.

Площинограф — прилад, за допомогою якого в тривимірному просторі Π^3 будується двовимірна площина, задана трьома точками, що не лежать на одній прямій, або двома прямими, які або перетинаються або паралельні (взагалі кажучи, по заданому симплексу). Так само як для побудови прямої в площині Π^2, лінійка прикладається до двох заданих точок $Op(2R_1)$, а потім креслиться лінія $Op(R_2)$, в тривимірному просторі Π^3 ми прикладаємо до трьох точок A, B, C (або «настроюємо на три точки») площинограф $Op(3P_1)$, а потім проводимо площину $Op(P_2)$.

Площинограф можна уявити собі як прилад, що складається з двох лінійок, які перетинаються в точці A і шарнірно закріплені в ній. Одна з цих лінійок (базисна), яку позначимо через AB, закріплюється нерухомо в точках A і B, а друга лінійка «настроюється» на точку C, і потім обертанням її навколо точки A «описується» площина. Можна, звичайно, цей прилад уявляти собі інакше, наприклад у вигляді деякої пластинки, що «креслить» площину [4].

Сферограф. Аналогом до кола в площині Π^2 в тривимірному просторі є сфера. Побудова сфери в Π^3 здійснюється за допомогою сферографа і мислиться так само, як і побудова кола в площині Π^2.

В тривимірному просторі сферограф можна уявити собі як деяке півколо, що спирається на діаметр AB. Точка O — центр цього кола — фіксована. Точки A і B змінюють своє положення на прямій AB в залежності від заданого радіуса сфери. Відповідно до радіуса змінюється і дуга півкола. Обертанням цього півкола навколо діаметра AB, як навколо осі, описується сфера K^2 заданого радіуса.

Для «побудови» сфери досить помістити точку O сферографа в центр сфери $Op(Q_1)$. «Настройка» приладу на заданий радіус позначається символом $Op(3Q_1)$. Для цього треба задати, крім точки O — центра сфери, ще одну довільну точку M сфери. Операція «побудови» сфери позначається так: $Op(Q_2)$.

Отже, загальний Лемуанів символ побудови сфери за допомогою сферографа буде $Op(4Q_1+Q_2)$.

При всіх побудовах за допомогою в''азаних приладів (зокрема, площинографа і сферографа) припускається також, що площини і сфери, «описані» (чи побудовані) цими приладами, залишаються десь у просторі Π^3 побудованими.

У просторах більшого числа вимірів Π^4, $\Pi^5, \ldots, \Pi^n$ для побудови площин і сфер більшого ніж Π^2 і K^2 вимірів ми повинні ввести нові уявлювані прилади — аналоги площинографа і сферографа. Ми будемо називати їх гіперплощинографами і гіперсферографами і позначати відповідно Γ_P^{n-1} і Γ_Q^{n-1}. Уявний прилад Γ_P^{n-1} дає можливість побудувати в n-вимірному просторі Π^n n—1-вимірну площину (гіперплощину) шляхом прикладання цього приладу до n точок, що не належать одній n—2-вимірній площині. Лемуанів символ цієї побудови буде $Op(nU_1+$ $+U_2)$, де U_1 позначає підготовчу операцію прикладання приладу до даних точок, а U_2 — побудову (креслення) гіперплощини Π^{n-1}.

Гіперсферограф Γ_Q^{n-1} ми уявляємо як прилад, що дає можливість «будувати» гіперсфери в n-вимірному просторі шляхом обертання його навколо деякої «осі», якщо задано центр і радіус її. (Тут «радіус» можна уявляти як частину простору Π^{n-1}, що обертається навколо Π^{n-2} як центра). Символ побудови буде $Op[(n+1)V_1+V_2]$, де V_1 — операція прикладання приладу до точки, а V_2 — «побудова» гіперсфери.

Зауважимо таке.

На прямій Π^1 елементами побудови є точки Π^0, «побудова» яких здійснюється за допомогою *одного* лише приладу — *точкографа*.

На двовимірній площині Π^2 елементами побудови є точки Π^0, прямі Π^1 і кола K^1. Для побудови їх використовуємо три прилади: *точко-*

граф, лінійку і *циркуль*. За допомогою цих же приладів ми здійснюємо в Π^2 побудови різних геометричних фігур, що складаються з точок, прямих і кіл.

У тривимірному просторі Π^3 до вказаних елементів простору додаються ще двовимірні площини Π^2 і сфери K^2, для побудови яких вводиться *площинограф* і *сферограф*. За допомогою вказаних п'яти приладів ми можемо уявно здійснювати в Π^3 різні гаометричні побудови.

У просторах більшого числа вимірів $\Pi^4, \Pi^5, \ldots, \Pi^n$ ми маємо більше елементів — об'єктів нашої побудови, і відповідно використовується більше число приладів побудови, названих нами гіперплощинографами і гіперсферографами відповідних просторів. Число їх, як неважко бачити, дорівнює $2n-1$.

Отже, за допомогою $2n-1$ приладів можна побудувати всі основні елементи n-вимірного евклідового простору.

Обгрунтування теорії геометричних побудов в n-вимірному евклідовому просторі можна провести за тією ж схемою, що і обгрунтування геометричних побудов у двовимірній площині Π^2 (планіметрії) і тривимірній Π^3 (стереометрії) [5, 6].

У цій статті робиться спроба узагальнити на n-вимірний простір деякі відомі визначення, що встановлюють клас конструктивних елементів площини Π^2 і тривимірного простору Π^3.

Нехай M — скінчена множина точок, прямих, кіл, площин, сфер, гіперплощин і гіперсфер n-вимірного евклідового простору, що містить принаймні $n+1$ точок, які не лежать в одній $n-1$-вимірній площині. Елементи цієї множини будемо називати *даними*.

Сукупність всіх геометричних образів, які можуть бути одержаними із даних застосуванням скінченного числа можливих операцій обраного комплекса приладів побудови, прийнято називати класом K конструктивних елементів, що відповідає даній задачі. Якщо мати на увазі вказані нами вище прилади, як прилади побудови в n-вимірному евклідовому просторі Π^n, то можна встановити клас конструктивних елементів цього простору за допомогою наступних визначень.

1. Всі дані в задачі на побудову елементи, а також довільні точки n-вимірного простору (які необхідні для побудови як допоміжні елементи), є *конструктивними*.

2. Будь-який простір Π^i $(i=1, 2, \ldots, n)$ є конструктивним в Π^n, якщо конструктивні елементи, які визначають його положення в просторі Π^n, тобто, якщо заданий (конструктивний) симплекс $S(i+1)$ простору Π^i.

3. Всі елементи конструктивного простору (в тому числі кола, сфери, гіперсфери...), що входять у клас конструктивних елементів цього простору, є конструктивними.

4. Будь-який простір Π^m є конструктивним у просторі Π^n, якщо він є перетином двох конструктивних просторів (у тому числі кіл, сфер, гіперсфер і т. д.) Π^k і Π^l, що належать простору Π^n, тобто $\Pi^k \times \Pi^l = \Pi^m$, де $m=k+l-n>0$.

Всі «побудови» в n-вимірному евклідовому просторі проводяться уявно, але для полегшення, де можна, використовується рисунок, що наочно ілюструє процес побудови.

У наведеній нижче таблиці подано результати розгляду деяких основних операцій побудови за допомогою вказаних приладів: Лемуанів символ і простота цих побудов.

Елемент побудови в $П^n$	Симплекс (чим визначається)	Прилад побудови	Символ побудови	Простота побудови
$П^0$	$S(1)$	Точкограф	$Op(T_1+T_2)$	2
$П^1$	$S(2)$	Лінійка	$Op(2R_1+R_2)$	3
$П^2$	$S(3)$	Площинограф	$Op(3P_1+P_2)$	4
....	....	....	....	....
$П^{n-1}$	$S(n)$	Гіперплощинограф	$Op[(n-1+1)U_1+U_2]$	$(n-1)+2=n+1$
K^0	$O(r^0)$	Точкограф	$Op(2T_1+T_2)$	3
K^1	$O(r^1)$	Циркуль	$Op(3C_1+C_2)$	4
K^2	$O(r^2)$	Сферограф	$Op(4Q_1+Q_2)$	5
....	....	....	....	....
K^{n-1}	$O(r^{n-1})$	Гіперсферограф	$Op[(n-1+2)V_1+V_2]$	$(n-1)+3=n+2$

Лемуанів символ і простоту $\bar{S}$ побудови перетину двох фігур, елементів n-вимірного простору, можна записати так: в $П^2$ — перетин двох прямих $П^1 \times П^1 = П^0$. Символ цієї побудови і простота буде $Op(4R_1+2R_2+T_2)$; $\bar{S}=7$. В n-вимірному просторі дві площини будь-якого числа вимірів m і l перетинаються по площині виміру $l+m-n$ при $l+m>n$. Символ побудови

$$Op[(m+1)U_1+(l+1)U_1+2U_2],\ \bar{S}=m+l+4.$$

Перетин двох гіперсфер різного виміру m і l дає гіперсферу виміру $m+l-n$ при $m+l>n$,

$$K^m \times K^l = K^{m+l-n}.$$

Символ побудови і простота буде мати вигляд

$$Op[(m+2)V_1+V_2+(l+2)V_1+V_2];\ \bar{S}=m+l+6.$$

Розглянемо задачі.

Задача 1. Визначити простоту побудови спільної площини двох просторів $П_1^3$ і $П_2^3$, що належать одному чотиривимірному простору $П^4$ [3].

Розв'язання. Що така площина існує, видно з того, що

$$П_1^3 \times П_2^3 = П^2.$$

Нехай простір $П^4$ визначається симплексом $ABCДE$ (див. рисунок). Простори $П_1^3$ і $П_2^3$ задані відповідно симплексами $(ABDE)$ і $(BCDE)$. Всі точки A, B, C, D, E симплексів $П_1^3$ і $П_2^3$, крім точки F симплекса $П_2^3$, є в той же час вершинами основного симплекса $(ABCDE)$ чотиривимірного простору. Тому точка F повинна бути визначеною відносно симплекса $(ABCDE)$. Спроектуємо точку F з вершини A симплекса $(ABCDE)$ на гіпергрань $\Pi_3^3=(BCDE)$. Точку перетину AF з гіпергранню Π_3^3 позначимо через M_1. Символ і простота цієї побудови буде

$$Op(2R_1+R_2+4P_1+P_2+T_2),\ \bar{S}=9.$$

Далі проектуємо точку M_1 в просторі $\Pi_3^3=(BCDE)$ з вершини B як центра на гіпергрань (CDE). Точку перетину променя BM_1 з гіпергранню (CDE) позначимо через M_2. Будемо мати:

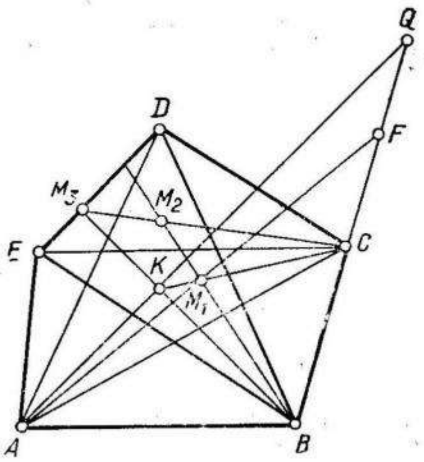
$$Op(2R_1+R_2+3P_1+P_2+T_2),\ \bar{S}=8.$$

Потім проектуємо точку M_2 площини (CDE) на пряму DE з точки C як центра. Позначимо одержану точку перетину CM_2 і DE через M_3. Символ і простота цієї побудови буде

$$Op(4R_1+2R_2+T_2),\ \bar{S}=7.$$

Таким чином, точка F повністю визначена відносно симплекса $(ABCDE)$ своїми афінними координатами:

$$x=(DEM_3);\ y=(CM_3M_2);\ z=(BM_2M_1);$$
$$t=(AM_1F),$$



Зауважимо, що дані гіперплощини $\Pi_1^3=(ABDE)$ і $\Pi_2^3=(BCDF)$ мають спільну пряму BD. Тому для побудови спільної їм площини досить побудувати будь-яку спільну точку гіперплощин Π_1^3 і Π_2^3, не інцидентну прямій BD. Побудуємо, наприклад, точку Q перетину прямої CF, що належить гіперплощині Π_2^3 з гіперплощиною Π_1^3. Проведемо пряму CM_1. Вона повністю лежить в гіперплощині $\Pi_3^3=(BCDE)$. Площина (BDE) є основою гіперплощини Π_1^3, оскільки гіперплощина Π_1^3 є проектуючою і належить гіперплощині Π_3^3.

Точку K перетину прямої CM_1 з площиною (BDE) дістанемо, провівши пряму BM_3:

$$K=BM_3\times CM_1;\ Op(4R_1+2R_2+T_2),\ \bar{S}=7.$$

Отже, точка K є основою шуканої точки Q на гіперплощині $(BCDE)$. Далі знаходимо

$$Q=CF\times AK;\ Op(4R_1+2R_2+T_2),\ \bar{S}=7,$$

Точка Q перетину прямої CF з гіперплощиною $(ABCDE)$ є спільною точкою гіперплощин $(ABDE)$ і $(BCDF)$.

Спільна площина цих гіперплощин визначається точками B, D і Q.

$$Op(3P_1+P_2),\ \bar{S}=4.$$

Загальний символ проведеної побудови можна записати у вигляді:

$$Op(16R_1+8R_2+10P_1+3P_2+5T_2),\ \bar{S}=42.$$

Задача 2. Через дану точку A простору Π^3 провести площину, перпендикулярну даній прямій BC.

Розв'язання. (Розглядається випадок, коли точка A не інцидентна прямій BC). З двох точок N_1 і N_2 прямої BC як центрів будуємо дві сфери $N_1(N_1A)$ і $N_2(N_2A)$; $Op(4Q_1+2Q_2), S=6$. Ці сфери перетнуться по деякому колу K^1, яке лежатиме в шуканій площині γ. Прикладаючи до будь-яких трьох точок цього кола площинограф, проводимо площину $\gamma: Op(3P_1+P_2)$. Загальний символ цієї побудови:

$$Op(4Q_1+2Q_2+3P_1+P_2),\ \bar{S}=10.$$

Побудова складається з двох сфер і одної площини.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. Адлер. Теория геометрических построений. Одесса, 1910.
2. E. Lemoine. Géometrographie ou art des constructions géométrigues. Paris, «Scientia», 18.
3. Е. А. Глазунов и Н. Ф. Четверухин. Аксонометрия, 1953.
4. Н. Ф. Четверухин. Вопросы методологии и методики геометрических построений в школьном курсе геометрии. Изв. Акад. пед. наук, вып. 6.
5. А. Л. Пикус. Об одном способе обоснования геометрических построений на плоскости и в пространстве, «Математическое просвещение», 3 (1958).
6. Е. С. Кочеткова. Обоснование геометрических построений в пространстве. «Математика в школе», 2 (1942).

Г. Л. БУЙМОЛА

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГЕОМЕТРОГРАФИИ n-МЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

(резюме)

В статье рассмотрены некоторые задачи на построение в 3- и 4-мерном пространстве с помощью введенного автором комплекса инструментов: точкограф, плоскограф, сферограф, гиперплоскографы и гиперсферографы. Составлены символы элементарных операций этими инструментами в n-мерном пространстве, а также указана простота построения по Лемуану.