ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1965 *Серія механіко-математична* *Випуск 2*

Т. Л. МАРТИНОВИЧ

ДО ПИТАННЯ ПРО ПІДКРІПЛЕННЯ АНІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ ПРУЖНИМ СТЕРЖНЕМ

Анізотропна пластинка з круговим отвором, підкріпленим тонким ізотропним стержнем (кільцем) сталого перерізу, розглядалась у працях М. П. Шереметьєва [1, 2]. В цих працях підкріплювальний стержень вважався досить вузьким і при аналітичному записі умов спряження припускалося, що дотик пластинки із стержнем відбувається вздовж осі стержня, тобто нехтувалося відстанню осі стержня від фактичної лінії дотику.

В цій статті, як і в роботі [3] для ізотропної пластинки, ми не робимо цього припущення, а вважаємо, що пластинка дотикається стержня вздовж його крайньої поверхні. Підкріплювальний стержень може бути такої ширини, щоб до нього ще була застосовна гіпотеза нормального плоского перерізу. При складанні рівнянь рівноваги елемента стержня враховуються його розміри.

Позначимо компоненти вектора внутрішнього (усередненого по висоті) напруження, що передається на стержень з боку пластинки, по осях натуральної системи $n\tau$ через $N^{(i)}$, $T^{(i)}$.

На контурі спаю пластинки із стержнем L повинні справджуватися такі умови, подані в комплексній формі:

$$\begin{aligned} u_1+iv_1&=u+iv, \\ N_1^{(i)}+iT_1^{(i)}&=N^{(i)}+iT^{(i)}, \end{aligned} \tag{1}$$

де через u_1 і v_1 позначені компоненти вектора зміщення точок контура L в декартових координатах xy, які відносяться до пластини, а через u і v — ті самі величини для стержня.

Контурні рівності (1) можна виразити через дві аналітичні в своїх площинах функції $\varphi_1(z_1)$ і $\psi_1(z_2)$ комплексного змінного $z_1=x+s_1y$ та $z_2=x+s_2y$ у такому вигляді

$$\frac{d}{dt}[(p_1+iq_1)\varphi_1(z_1)+(\bar{p}_1+\bar{i}\bar{q}_1)\overline{\varphi_1(z_1)}+(p_2+iq_2)\psi_1(z_2)+(\bar{p}_2+\bar{i}\bar{q}_2)\overline{\psi_1(z_2)}]=$$
$$=-ie^{-i\alpha}\frac{d}{ds}(u+iv);$$
$$\frac{d}{dt}[(s_1-i)\varphi_1(z_1)+(\bar{s}_1-i)\overline{\varphi_1(z_1)}+(s_2-i)\psi_1(z_2)+(\bar{s}_2-i)\overline{\psi_1(z_1)}]=$$
$$=-i(N^{(i)}+iT^{(i)}) \quad \text{на } L, \tag{2}$$

де s_1, s_2, p_1, p_2, q_1, q_2 — відомі сталі величини, що залежать від пружних характеристик пластинки; α — кут, утворений зовнішньою нормаллю $\vec{n}$ з додатним напрямком осі x. Осі $n\tau$ орієнтовані так само, як і осі xy; t — афікс точки межі області.

В основу розрахунків стержня покладено гіпотезу нормального жорсткого перерізу. Виходячи з цієї гіпотези в праці [3], ми дістали залежність між переміщеннями точок крайнього волокна стержня, що контактує з пластинкою, відносним подовженням його осі e_0 і кутом повороту поперечного перерізу кільця θ у такій формі

$$e^{-i\alpha}\frac{d}{ds_1}(u+iv)=-\left[\theta-i\left(\frac{r_0}{r_1}e_0-\varepsilon_1\frac{d\theta}{ds_1}\right)\right]. \tag{3}$$

З рівнянь рівноваги елемента кільця з врахуванням його розмірів знаходимо [3]

$$N^{(i)}+iT^{(i)}=-\frac{1}{2h}\left[\frac{d}{ds_1}(V_n+iV_\tau)+\frac{i}{r_1}(V_n+iV_\tau)\right]+\frac{h^*}{h}\frac{r_2}{r_1}(N+iT); \tag{4}$$

$$V_n=\frac{dM}{ds_1}+\varepsilon_1\frac{dV_\tau}{ds_1}-2h^*b\frac{r_2}{r_1}T. \tag{5}$$

Тут позначено: V_n і V_τ — компоненти головного вектора внутрішніх зусиль, що діють в довільному перерізі стержня; N і T — компоненти вектора зовнішнього (усередненого по висоті) напруження, прикладеного до стержня, по осях натуральної системи $n\tau$; M — момент внутрішніх зусиль у довільному перерізі стержня; r_1 і r_2 — радіуси кривини крайніх волокон стержня, причому під r_1 ми будемо розуміти радіус кривини того крайнього волокна, вздовж якого пластинка дотикається стержня; елемент дуги цього волокна ми позначили через ds_1; ε_1 — віддаль крайнього волокна стержня, що контактує з пластинкою, від його осі в площині їх кривини; $2h$ — висота пластинки; $2h^*$ — висота того краю стержня, що не контактує з пластинкою; b — ширина стержня в площині його осі; r_0 — радіус кривини осі стержня.

При малих деформаціях, приймаючи гіпотезу нормального перерізу, закон Гука для криволінійного стержня зводиться до співвідношень [6]

$$\begin{aligned} e_0&=\frac{V_\tau}{g_1}+\frac{M}{r_0g_1};\\ \frac{d\theta}{ds_1}&=\frac{r_0}{r_1}\left[\frac{M}{g_2}+\frac{M}{r_0^2g_1}+\frac{V_\tau}{r_0g_1}\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

де $g_1=E^*F$ — жорсткість стержня на розтяг; $g_2=E^*I'$ — жорсткість стержня на згин; F — площа нормального перерізу стержня; E^* — модуль Юнга для стержня;

$$I'=\int\limits_F\frac{r_0}{r_0+y}y^2dF,$$

де y — змінна величина, відраховувана від осі стержня. Для прямокутного перерізу стержня $2h^*\times b$ величина I' дорівнює

$$I'=\lambda I_z,$$

де $I_z=\dfrac{h^*b^3}{6}$ — момент інерції перерізу стержня; b — ширина стержня;

$$\lambda=12\left(\frac{r_0^3}{b^3}\ln\frac{2r_0+b}{2r_0-b}-\frac{r_0^2}{b^2}\right),$$

або у формі ряду

$$\lambda=1+\frac{3b^2}{20r_0^2}+\frac{3b^4}{112r_0^4}+\frac{3b^6}{576r_0^6}+\ldots .$$

Нормальні напруження в перерізі стержня визначаються за формулою

$$\sigma=\frac{V_\tau}{F}+\frac{M}{r_0F}+\frac{My}{I'}\,\frac{r_0}{r_0+y}. \tag{7}$$

На підставі співвідношень (3), (4) та (6) крайові умови (2) набувають вигляду

$$\frac{d}{dt}[(p_1+iq_1)\,\varphi_1(z_1)+(\bar{p}_1+i\bar{q}_1)\,\overline{\varphi_1(z_1)}+(p_2+iq_2)\,\psi_1(z_2)+(\bar{p}_2+i\bar{q}_2)\overline{\psi_1(z_2)}]=$$

$$=\left(\frac{V_\tau}{g_1}+i\int\limits_0^{s_1}\frac{V_\tau}{r_1g_1}ds_1\right)+\left(MG_1+i\int\limits_0^{s_1}MG_2ds_1\right)+i\theta_0; \tag{8}$$

$$\frac{d}{dt}[(s_1-i)\,\varphi_1(z_1)+(\bar{s}_1-i)\,\overline{\varphi_1(z_1)}+(s_2-i)\,\psi_1(z_2)+(\bar{s}_2-i)\,\overline{\psi_1(z_2)}]=$$

$$=-i\frac{h^*}{h}\,\frac{r_2}{r_1}(N+iT)+\frac{i}{2h}\left[\frac{d}{ds_1}(V_n+iV_\tau)+\frac{i}{r_1}(V_n+iV_\tau)\right]\ \text{на } L, \tag{9}$$

де

$$V_n=\frac{dM}{ds_1}+\varepsilon_1\frac{dV_\tau}{ds_1}-2h^*b\frac{r_2}{r_1}T;$$

$$G_1=\frac{1}{r_0g_1}-\varepsilon_1\frac{r_0}{r_1g_2};\quad G_2=\frac{1}{r_1r_0g_1}+\frac{r_0}{r_1g_2}; \tag{10}$$

θ_0 — значення кута повороту перерізу стержня при $s=0$. У тому випадку, коли радіус кривини волокна, вздовж якого пластинка спаяна зі стержнем, більший від радіуса кривини стержня, тобто $r_1>r_0$, у виразах (10) потрібно знаки при ε_1 і b замінити на зворотні.

Одержані контурні умови (8) та (9) будуть вихідними при розв'язуванні задач про пружну рівновагу анізотропної пластинки, край якої прикріплений ізотропним стержнем. Поперечний переріз стержня може бути довільної форми, але симетричний відносно площини кривини осі, тобто площини пластинки.

Для прикладу розглянемо нескінченну анізотропну пластинку з круговим отвором радіуса r_1, край якого підкріплений замкнутим ізотропним стержнем сталого перерізу. Для простоти викладу будемо вважати, що кільце вільне від дії зовнішніх зусиль і напруження на нескінченності обмежені:

$$X_x^\infty=p,\quad Y_y^\infty=q;\quad X_y^\infty=0.$$

Область зміни z, зайняту пластинкою, відобразимо на зовнішність одиничного кола функцією:

$$z=\omega(\zeta)=r_1\zeta;\quad t=r_1\sigma;\quad \sigma=e^{i\vartheta}. \tag{11}$$

Тоді, очевидно, функції

$$z_1=\omega_1(\zeta_1)=\frac{r_1}{2}\left[(1-is_1)\,\zeta_1+(1+is_1)\frac{1}{\zeta_1}\right];$$

$$z_2=\omega_2(\zeta_2)=\frac{r_1}{2}\left[(1-is_2)\,\zeta_2+(1+is_2)\frac{1}{\zeta_2}\right] \tag{12}$$

будуть також конформно переводити відповідні області зміни z_1 і z_2 на зовнішність одиничного кола, причому для контурних точок змінні ζ_1 і ζ_2 набувають одного і того самого значення $\sigma=e^{i\theta}$.

Якщо ввести позначення

$$\varphi_1[\omega_1(\zeta_1)]=\varphi(\zeta_1); \quad \psi_1[\omega_2(\zeta_2)]=\psi(\zeta_2);$$
$$\varphi'(\sigma)=\Phi(\sigma); \quad \psi'(\sigma)=\Psi(\sigma),$$

то контурні умови (8) та (9) в перетвореній області зведуться до такого вигляду

$$\frac{1}{r_1}\left[(p_1+iq_1)\Phi(\sigma)-(\bar{p}_1+i\bar{q}_1)\frac{1}{\sigma^2}\overline{\Phi(\sigma)}+(p_2+iq_2)\Psi(\sigma)-(\bar{p}_2+i\bar{q}_2)\frac{1}{\sigma^2}\overline{\Psi(\sigma)}\right]=$$
$$=\frac{V_\tau}{g_1}+\int_1^\sigma\frac{V_\tau}{g_1}\frac{d\sigma}{\sigma}+MG_1+\int_1^\sigma MG_2r_1\frac{d\sigma}{\sigma}+i\theta_0;$$

$$\frac{1}{r_1}\left[(s_1-i)\Phi(\sigma)-(\bar{s}_1-i)\frac{1}{\sigma^2}\overline{\Phi(\sigma)}+(s_2-i)\Psi(\sigma)-(\bar{s}_2-i)\frac{1}{\sigma^2}\overline{\Psi(\sigma)}\right]=$$
$$=\frac{i}{2h}\left\{\varepsilon_1\frac{\sigma}{r_1^2}\left(\sigma\frac{d^2V_\tau}{d\sigma^2}+2\frac{dV_\tau}{d\sigma}\right)-\frac{\sigma}{r_1^2}\left(\sigma\frac{d^2M}{d\sigma^2}+2\frac{dM}{d\sigma}\right)-\frac{1}{r_1}\left(\sigma\frac{dV_\tau}{d\sigma}+V_\tau\right)\right\} \text{ на } \gamma; \quad (13)$$

$$V_n=\frac{i\sigma}{r_1}\left(\frac{dM}{d\sigma}-\varepsilon_1\frac{dV_\tau}{d\sigma}\right); \quad G_1=\frac{1}{r_0g_1}+\varepsilon_1\frac{r_0}{r_1g_2};$$

$$N^{(l)}=-\frac{i}{2hr_1}\left(\sigma\frac{dV_n}{d\sigma}+iV_\tau\right);$$
$$T^{(l)}=-\frac{i}{2hr_1}\left(\sigma\frac{dV_\tau}{d\sigma}-iV_n\right). \quad (14)$$

Функції $\varphi(\zeta_1)$ і $\psi(\zeta_2)$, що визначають напружений стан в анізотропній пластинці, в розглядуваному прикладі в змінних ζ_1 і ζ_2 будуть мати вигляд

$$\varphi(\zeta_1)=\frac{r_1(1-is_1)}{2}A_0^*\zeta_1+\varphi_0(\zeta_1);$$
$$\psi(\zeta_2)=\frac{r_1(1-is_2)}{2}(B_0^*+iC_0^*)\zeta_2+\psi_0(\zeta_2), \quad (15)$$

де $\varphi_0(\zeta_1)$ та $\psi_0(\zeta_2)$ — регулярні в своїх областях функції, включаючи нескінченно віддалену точку; A_0^*, B_0^*, C_0^* — відомі сталі величини, які виражаються через напруження на нескінченності відомим чином [5].

Тому функції $\Phi(\sigma)$ і $\Psi(\sigma)$ можемо подати у вигляді таких рядів:

$$\Phi(\sigma)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sigma^{-n}; \quad \Psi(\sigma)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\sigma^{-n}, \quad (16)$$

причому

$$A_0=\frac{r_1(1-is_1)}{2}A_0^*; \quad B_0=\frac{r_1(1-is_2)}{2}(B_0^*+iC_0^*); \quad A_1=0; \quad B_1=0. \quad (17)$$

Вирази внутрішніх зусиль у перерізі кільця подамо у формі комплексних рядів Фур'є:

$$V_\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sigma^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_n \sigma^{-n};$$
$$M = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \sigma^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta}_n \sigma^{-n}. \tag{18}$$

Підставляючи (16) та (18) в крайові умови (13) і зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях σ, приходимо до таких систем алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів:

$$(\bar{p}_1 + i\bar{q}_1)\bar{A}_2 + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2)\bar{B}_2 = (p_1 + iq_1)A_0 + (p_2 + iq_2)B_0 - \frac{r_1}{g_1}\alpha_0 -$$
$$- r_1 G_1 \beta_0 - \frac{r_1}{g_1} C_1 - r_1^2 G_2 C_2 - ir_1\theta_0;$$
$$(\bar{s}_1 - i)\bar{A}_2 + (\bar{s}_2 - i)\bar{B}_2 = (s_1 - i)A_0 + (s_2 - i)B_0 + \frac{i}{2h}\alpha_0;$$
$$\frac{\alpha_0}{g_1} + G_2 r_1 \beta_0 = 0; \quad \bar{\beta}_1 = 0; \tag{19}$$
$$\frac{r_1}{2g_1}\bar{\alpha}_2 + \frac{r_1}{2}(2G_1 - r_1 G_2)\bar{\beta}_2 - (p_1 + iq_1)A_2 - (p_2 + iq_2)B_2 = -(\bar{p}_1 + i\bar{q}_1)\bar{A}_0 -$$
$$-(\bar{p}_2 + i\bar{q}_2)\bar{B}_0;$$
$$\frac{1}{2h}\left(1 + \frac{2\varepsilon_1}{r_1}\right)\bar{\alpha}_2 - \frac{2}{2hr_1}\bar{\beta}_2 + i(\bar{s}_1 - i)A_2 + i(\bar{s}_2 - i)B_2 = i(\bar{s}_1 - i)\bar{A}_0 + i(\bar{s}_2 - i)\bar{B}_0;$$
$$\frac{1}{r_1}[(\bar{p}_1 + i\bar{q}_1)\bar{A}_{n+2} + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2)\bar{B}_{n+2}] = -\left[\frac{1}{g_1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\alpha_n + \left(G_1 + \frac{r_1 G_2}{n}\right)\beta_n\right];$$
$$\frac{1}{r_1}[(\bar{s}_1 - i)\bar{A}_{n+2} + (\bar{s}_2 - i)\bar{B}_{n+2}] = \frac{i}{2hr_1}\left[\frac{n(n+1)}{r_1}\beta_n + (n+1)\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{r_1}n\right)\alpha_n\right],$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots;$$
$$\frac{1}{r_1}[(p_1 + iq_1)A_n + (p_2 + iq_2)B_n] = \frac{1}{g_1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\bar{\alpha}_n + \left(G_1 - \frac{r_1 G_2}{n}\right)\bar{\beta}_n;$$
$$\frac{1}{r_1}[(s_1 - i)A_n + (s_2 - i)B_n] = -\frac{i}{2hr_1}\left[\frac{n(n-1)}{r_1}\bar{\beta}_n - (n-1)\left(1 + \frac{\varepsilon_1}{r_1}n\right)\bar{\alpha}_n\right],$$
$$n = 3, 4, 5, \ldots$$

Тут C_1 та C_2 — сталі інтегрування:

$$C_1 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n - \bar{\alpha}_n}{n}; \quad C_2 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n - \bar{\beta}_n}{n}. \tag{20}$$

Із системи рівнянь (19) випливає, що всі непарні коефіцієнти A_n, B_n, α_n і β_n $(n = 1, 3, 5, \ldots)$ рівні нулеві.

Якщо матеріал пластинки є ортотропним і напрямки осей координат x і y збігаються з головними напрямками пружності, то коефіцієнти $a_{16}=0$, $a_{26}=0$, а останні виражаються через модулі Юнга, коефіцієнти Пуассона і модуль зсуву (головні) [4]:

$$a_{11}=\frac{1}{E_1};\quad a_{22}=\frac{1}{E_2};\quad a_{12}=-\frac{\nu_1}{E_1}=-\frac{\nu_2}{E_2};\quad a_{66}=\frac{1}{G}. \tag{21}$$

Для багатьох ортотропних матеріалів параметри s_1 і s_2 чисто уявні:

$$s_1=i\beta_1^*;\quad s_2=i\beta_2^*. \tag{22}$$

Тоді величини p_1 і p_2 будуть дійсними, а величини q_1 і q_2 — чисто уявними [4]:

$$\begin{aligned} p_1&=-\frac{\beta_1^{*2}+\nu_1}{E_1};\quad q_1=-i\,\frac{1+\nu_2\beta_1^{*2}}{\beta_1^*E_2};\\ p_2&=-\frac{\beta_2^{*2}+\nu_1}{E_1};\quad q_2=-i\,\frac{1+\nu_2\beta_2^{*2}}{\beta_2^*E_2}. \end{aligned} \tag{23}$$

Сталі A_0^*, B_0^* при умові (22) виражаються через напруження на нескінченності такими формулами [5]:

$$A_0^*=-\frac{\sigma_x^{(\infty)}+\beta_2^{*2}\sigma_y^{(\infty)}}{2(\beta_1^{*2}-\beta_2^{*2})};\quad B_0^*=\frac{\sigma_x^{(\infty)}+\beta_1^{*2}\sigma_y^{(\infty)}}{2(\beta_1^{*2}-\beta_2^{*2})};\quad C_0^*=\frac{\tau_{xy}^{(\infty)}}{2\beta_2^*}. \tag{24}$$

Із системи (19), з врахуванням (23), випливає, що для ортотропної пластинки при $\tau_{xy}^{(\infty)}=0$ коефіцієнти A_n, B_n, α_n і β_n будуть величинами дійсними; тому можемо покласти

$$C_1=0;\ C_2=0,\ \theta_0=0.$$

Для кільця прямокутного перерізу $2h^*\times b$ систему рівнянь (19) запишемо в безмірних величинах δ і γ, поклавши

$$\delta=\frac{b}{r_1};\quad \gamma=\frac{h^*}{h};\quad I'=\lambda I_z=\lambda\frac{h^*b^3}{6};\quad \varepsilon_1=\frac{b}{2};$$

$$g_1=2h^*bE^*;\quad g_2=\lambda E^*\frac{h^*b^3}{6}. \tag{25}$$

Враховуючи (23) і (25), система рівнянь (19) набуде вигляду

$$\begin{gathered}
(\bar{p}_1+i\bar{q}_1)A_2+(\bar{p}_2+i\bar{q}_2)B_2=(p_1+iq_1)A_0+(p_2+iq_2)B_0-\alpha_0'a_0;\\
(1+\beta_1^*)A_2+(1+\beta_2^*)B_2=(1-\beta_1^*)A_0+(1-\beta_2^*)B_0-\gamma\alpha_0';\\
\frac{1}{2E^*\delta}\alpha_2'+a_2\beta_2'=(p_1+iq_1)A_2+(p_2+iq_2)B_2-(\bar{p}_1+i\bar{q}_1)A_0-(\bar{p}_2+i\bar{q}_2)B_0;\\
\gamma(1+\delta)\alpha_2'-2\gamma\delta\beta_2'=-(1+\beta_1^*)A_2-(1+\beta_2^*)B_2+(1+\beta_1^*)A_0+(1+\beta_2^*)B_0;\\
(\bar{p}_1+i\bar{q}_1)A_{n+2}+(\bar{p}_2+i\bar{q}_2)B_{n+2}=-\frac{1}{E^*\delta}\left(1+\frac{1}{n}\right)\alpha_n'-\left(b_0+\frac{1}{n}b_2\right)\beta_n';\\
(1+\beta_1^*)A_{n+2}+(1+\beta_2^*)B_{n+2}=-\gamma\delta n(n+1)\beta_n'-\frac{\gamma}{2}(n+1)(2-\delta n)\alpha_n';\\
(n=2,4,\ldots)\\
(p_1+iq_1)A_n+(p_2+iq_2)B_n=\frac{1}{E^*\delta}\left(1-\frac{1}{n}\right)\alpha_n'+\left(b_0-\frac{1}{n}b_2\right)\beta_n';\\
(1-\beta_1^*)A_n+(1-\beta_2^*)B_n=\gamma\delta n(n-1)\beta_n'-\frac{\gamma}{2}(n-1)(2+\delta n)\alpha_n',\\
(n=4,6,\ldots)
\end{gathered} \tag{26}$$

де

$$a_0=\frac{3(2-\delta)^3}{2E^*\delta\,[3(2-\delta)^2+\lambda\delta^2]};\quad \beta_0^1=-\frac{\lambda(2-\delta)\delta}{2\,[\lambda\delta^2+3(2-\delta)^2]}\alpha_0';$$

$$a_2=\frac{\lambda\delta^2-3(2-\delta)^2(1-\delta)}{\lambda E^*(2-\delta)\delta^2};\tag{27}$$

$$b_0=\frac{2\lambda\delta+3(2-\delta)^2}{\lambda E^*\delta(2-\delta)};\quad \lambda=3\frac{(2-\delta)^2}{\delta^2}\left[\frac{2-\delta}{2\delta}\ln\frac{1}{1-\delta}-1\right];$$

$$b_2=\frac{2\,[\lambda\delta^2+3(2-\delta)^2]}{\lambda E^*\delta(2-\delta)};\quad \alpha_n=2h^*\alpha_n';\quad \beta_n=2h^*b\beta_n'.$$

Розв'язуючи систему (26), знайдемо коефіцієнти A_n, B_n, α_n і β_n; ці коефіцієнти залежатимуть від параметра α_0'.

Внаслідок голоморфності функцій $\Phi(\zeta_1)$ і $\Psi(\zeta_2)$ коефіцієнти розкладу їх A_n і B_n з ростом номера n прямують до нуля. Тому знайдеться такий номер N, починаючи з якого всі коефіцієнти A_n і B_n з наперед заданим ступенем точності можна покласти рівними нулеві, тобто

$$A_N(\alpha_0')=0;\quad B_N(\alpha_0')=0.\tag{28}$$

Номер «N» повинен бути підібраний так, щоб параметр α_0', знайдений з першої і другої умов (28), а також з умов $\alpha_N'(\alpha_0')=0$ і $\beta_N'(\alpha_0')=0$, з прийнятим ступенем точності збігався.

Для кільця прямокутного перерізу формула (7) в безмірних величинах запишеться

$$\sigma=\frac{V_\tau}{2h^*b}+\frac{\eta M}{2h^*b^2},\tag{29}$$

де

$$\eta=\frac{2k(1-\delta)[\delta^2(\lambda+3)-12\delta+12]-3(2-\delta)^3}{\lambda k\delta(1-\delta)(2-\delta)};$$

$$k=\frac{r}{r_2};\quad \frac{r_1}{r}=\frac{1}{k(1-\delta)}.$$

Розглянемо числовий приклад. За ортотропну пластинку візьмемо склотекстоліт КАСТ-В товщиною 1 *см* з пружними даними $E_1=1{,}97\cdot10^5$ *кг/см²*; $E_2=1{,}36\cdot10^5$ *кг/см²*; $G=0{,}33\cdot10^5$ *кг/см²*; $\nu_2=0{,}12$.

Підкріплюване кільце прямокутного поперечного перерізу з дюралюміна з модулем пружності $E^*=7{,}2\cdot10^5$ *кг/см²*.

Пластинка розтягується в напрямі осі x зусиллям $\sigma_x^{(\infty)}=p$ ($\sigma_y^{(\infty)}=0$ $\tau_{xy}^{(\infty)}=0$). Обчислення проводились при $\gamma=1$, $\delta=0{,}2$. Числові значення кільцевих напружень σ_ϑ в пластинці і σ — в кільці в окремих точках вздовж лінії спаю наведені в таблиці.

ϑ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
σ_ϑ/p	0,348	0,284	0,199	0,244	0,438	0,707	0,929	0,979	0,821	0,689
σ/p	1,597	1,619	1,684	1,779	1,891	2,001	2,099	2,173	2,219	2,235
$\sigma_\vartheta^{(0)}/p$	−0,831	−0,688	−0,356	0,029	0,432	0,896	1,508	2,350	3,328	3,834

Тут через $\sigma_\vartheta^{(0)}$ позначені напруження, що виникають в пластинці з круговим отвором без підкріплення.

ЛІТЕРАТУРА

1. М. П. Шереметьев. Плоско-напряженное состояние пластинки с подкрепленным круговым отверстием. Инженер. сб., т. XIV, Изд-во АН СССР, 1953.
2. М. П. Шереметьев. Пластинки с подкрепленным краем. Изд-во Львов. ун-та, 1960.
3. Т. Л. Мартинович. Пружна рівновага пластинки з криволінійним контуром, підкріпленим пружним кільцем. Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 1, 1965.
4. С. Г. Лехніцький. Анізотропні пластинки. Держтехвидав, 1957.
5. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около отверстий. Гостехтеориздат, 1951.
6. М. М. Филоненко-Бородич. Курс сопротивления материалов, ч. I, Гостехтеориздат, 1955.

Т. Л. МАРТЫНОВИЧ

К ВОПРОСУ О ПОДКРЕПЛЕНИИ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ УПРУГИМ СТЕРЖНЕМ

(резюме)

Рассматривается задача о подкреплении анизотропной пластинки с криволинейным отверстием упругим стержнем постоянного сечения. В отличие от аналогичных работ других авторов, здесь учитывается расстояние оси стержня от фактической линии касания. Приводятся граничные условия задачи. В качестве примера рассмотрена анизотропная пластинка с круговым отверстием, подкрепленным упругим стержнем.