

Д. Г. ХЛЕБНІКОВ

ДЕЯКІ ЗАДАЧІ ЗГИНУ ПЛАСТИНОК У ФОРМІ СМУГИ З ПІДКРІПЛЕНИМИ КРАЯМИ

Ефективним засобом розв'язку задач згину непідкріплених пластинок у формі півплощини та смуги є метод інтегральних перетворень Фур'є [7]. Цей метод може бути застосований також у випадку пластинок з підкріпленням краєм. Так, у роботі [8] розв'язано задачу згину пластинки-смуги, один з країв якої затиснено, а другий підкріплено тонким пружним стержнем. У даній роботі досліджується згин пластинки у формі смуги з обома підкріпленими краями. Як граничний випадок одержано розв'язок задачі про згин півплощини з підкріпленням краєм, яка іншим шляхом розглядається в роботах А. А. Галасі [1, 2].

1. ЗГИН ПЛАСТИНКИ-СМУГИ З ПІДКРІПЛЕНИМИ КРАЯМИ

Розглянемо ізотропну пластинку в формі смуги $(-\infty < x < \infty, -a \leq y \leq a)$, краї $y = \pm a$ якої підкріплено тонкими пружними стержнями однакової жорсткості (рис. 1). Пластинка перебуває під дією заданого поперечного навантаження інтенсивності $q(x, y)$, що задовольняє умови статички

$$\int_{-a}^a dy \int_{-\infty}^{\infty} q(x, y) dx = 0; \quad (1.1)$$

$$\int_{-a}^a dy \int_{-\infty}^{\infty} xq(x, y) dx = \int_{-a}^a y dy \int_{-\infty}^{\infty} q(x, y) dx = 0.$$

Прогин пластинки $w(x, y)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D} \quad (1.2)$$

і граничні умови [4, стор. 103] *

$$\begin{aligned} \pm \kappa_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}; \\ \pm \kappa_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned} \quad \text{при } y = \pm a, \quad (1.3)$$

* Слід зауважити, що в монографіях [4] (стор. 104, формула (115), [5] (стор. 97, формула (109), [6] (стор. 313, формула (195)) при виводі другої умови допущена помилка в знаку. Для її виправлення в лівих частинах вказаних формул слід замінити мінус на плюс.

причому

$$\kappa_2 = \frac{G_2}{D}, \quad \kappa_3 = \frac{G_3}{D}. \quad (1.4)$$

Тут G_2 і G_3 — жорсткості стержня на згин та кручення, D — циліндрична жорсткість пластинки, ν — коефіцієнт Пуассона. В формулах (1.3) при $y=a$ ($y=-a$) слід брати верхній (нижній) знак.

Трансформанту Фур'є деякої функції $f(x)$ будемо позначати далі через $\tilde{f}(\lambda)$, тобто

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx; \quad (1.5)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda. \quad (1.6)$$

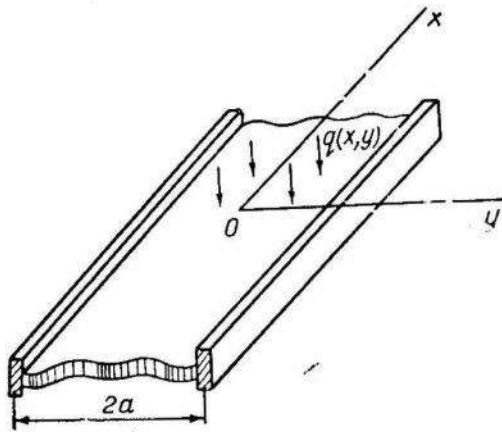


Рис. 1.

($y=0$). У випадку симетричного навантаження пластинки функція $q(x, y)$ є парною по y , і трансформанта прогину має вигляд

$$\tilde{w} = A_1 \operatorname{ch} \lambda y + B_1 \lambda y \operatorname{sh} \lambda y + \tilde{w}_0, \quad (1.7)$$

де $\tilde{w}_0$ — частинний розв'язок перетвореного рівняння (1.2), який дається формулою [7, стор. 88]

$$\tilde{w}_0 = \frac{1}{2D\lambda^3} \int_0^y [\lambda(y-t) \operatorname{ch} \lambda(y-t) - \operatorname{sh} \lambda(y-t)] \tilde{q}(\lambda, t) dt. \quad (1.8)$$

Задовольняючи умови (1.3), одержимо для визначення A_1 і B_1 систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} A_1 [\kappa_2 \lambda \operatorname{ch} \lambda a + (1-\nu) \operatorname{sh} \lambda a] + B_1 [\kappa_2 \lambda^2 a \operatorname{sh} \lambda a - \\ - (1+\nu) \operatorname{sh} \lambda a + (1-\nu) \lambda a \operatorname{ch} \lambda a] = K(\lambda); \\ A_1 [\kappa_3 \lambda \operatorname{sh} \lambda a + (1-\nu) \operatorname{ch} \lambda a] + B_1 [\kappa_3 \lambda (\operatorname{sh} \lambda a + \lambda a \operatorname{ch} \lambda a) + \\ + 2 \operatorname{ch} \lambda a + (1-\nu) \lambda a \operatorname{sh} \lambda a] = -L(\lambda), \end{aligned} \quad (1.9)$$

в яких

$$\begin{aligned} K(\lambda) = \frac{1}{2D\lambda^3} \int_0^a \{ \kappa_2 \lambda [\operatorname{sh} \lambda(a-t) - \lambda(a-t) \operatorname{ch} \lambda(a-t)] + \\ + 2 \operatorname{ch} \lambda(a-t) - (1-\nu) \lambda(a-t) \operatorname{sh} \lambda(a-t) \} \tilde{q}(\lambda, t) dt, \\ L(\lambda) = \frac{1}{2D\lambda^3} \int_0^a \{ \kappa_3 \lambda^2 (a-t) \operatorname{sh} \lambda(a-t) + (1-\nu) \lambda(a-t) \operatorname{ch} \lambda(a-t) + \\ + (1+\nu) \operatorname{sh} \lambda(a-t) \} \tilde{q}(\lambda, t) dt. \end{aligned} \quad (1.10)$$

З системи (1.9) одержимо

$$A_1 = \frac{1}{\Delta_1(\lambda a)} \{ [\kappa_3 \lambda (\operatorname{sh} \lambda a + \lambda a \operatorname{ch} \lambda a) + 2 \operatorname{ch} \lambda a + (1-\nu) \lambda a \operatorname{sh} \lambda a] K(\lambda) + \\ + [\kappa_2 \lambda^2 a \operatorname{sh} \lambda a - (1+\nu) \operatorname{sh} \lambda a + (1-\nu) \lambda a \operatorname{ch} \lambda a] L(\lambda) \}; \quad (1.11)$$

$$B_1 = -\frac{1}{\Delta_1(\lambda a)} \{ [\kappa_3 \lambda \operatorname{sh} \lambda a + (1-\nu) \operatorname{ch} \lambda a] K(\lambda) + \\ + [\kappa_2 \lambda \operatorname{ch} \lambda a + (1-\nu) \operatorname{sh} \lambda a] L(\lambda) \},$$

де

$$\Delta_1(\lambda a) = \kappa_2 \kappa_3 \lambda^2 (\operatorname{ch} \lambda a \operatorname{sh} \lambda a + \lambda a) + 2 \kappa_2 \lambda \operatorname{ch}^2 \lambda a + 2 \kappa_3 \lambda \operatorname{sh}^2 \lambda a + \\ + (3+\nu)(1-\nu) \operatorname{sh} \lambda a \operatorname{ch} \lambda a - (1-\nu)^2 \lambda a. \quad (1.12)$$

Для дослідження збіжності інтеграла, що одержується в результаті обернення за Фур'є виразу (1.7) для трансформанти прогину, зауважимо, що у випадку симетричного навантаження умови рівноваги (1.1) можна записати

$$\int_0^a \tilde{q}(0, y) dy = \int_0^a \tilde{q}'_\lambda(0, y) dy = 0. \quad (1.13)$$

Тому, як впливає з (1.10), при $\lambda \rightarrow 0$ $K(\lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, $L(\lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$ і на основі (1.11) $A_1 = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$.

Таким чином, прогин $w(x, y)$ виражається розбіжним інтегралом. Це пов'язане з тим, що при прийнятій постановці задачі прогин визначається з точністю до жорсткого зміщення пластинки, і для означеності задачі необхідно задати значення w в якій-небудь точці, наприклад, прийняти $w(0, 0) = 0$. Таким шляхом [7] приходимо до остаточного розв'язку у вигляді збіжного інтеграла

$$w = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [(A_1 \operatorname{ch} \lambda y + B_1 \lambda y \operatorname{sh} \lambda y + \tilde{w}_0) e^{-i\lambda x} - A_1] d\lambda, \quad (1.14)$$

причому A_1 і B_1 даються формулами (1.11).

Якщо навантаження на пластинку антисиметричне відносно осі x , то

$$\tilde{w} = A_2 \operatorname{sh} \lambda y + B_2 \lambda y \operatorname{ch} \lambda y + \tilde{w}_0, \quad (1.15)$$

де A_2 і B_2 аналогічним способом визначаються з умов (1.3) і мають вигляд

$$A_2 = \frac{1}{\Delta_2(\lambda a)} \{ [\kappa_3 \lambda (\operatorname{ch} \lambda a + \lambda a \operatorname{sh} \lambda a) + 2 \operatorname{sh} \lambda a + (1-\nu) \lambda a \operatorname{ch} \lambda a] K(\lambda) + \\ + [\kappa_2 \lambda^2 a \operatorname{ch} \lambda a - (1+\nu) \operatorname{ch} \lambda a + (1-\nu) \lambda a \operatorname{sh} \lambda a] L(\lambda) \}; \quad (1.16)$$

$$B_2 = -\frac{1}{\Delta_2(\lambda a)} \{ [\kappa_3 \lambda \operatorname{ch} \lambda a + (1-\nu) \operatorname{sh} \lambda a] K(\lambda) + \\ + [\kappa_2 \lambda \operatorname{sh} \lambda a + (1-\nu) \operatorname{ch} \lambda a] L(\lambda) \},$$

причому

$$\Delta_2(\lambda a) = \kappa_2 \kappa_3 \lambda^2 (\operatorname{sh} \lambda a \operatorname{ch} \lambda a - \lambda a) + 2 \kappa_2 \lambda \operatorname{sh}^2 \lambda a + 2 \kappa_3 \lambda \operatorname{ch}^2 \lambda a + \\ + (3+\nu)(1-\nu) \operatorname{sh} \lambda a \operatorname{ch} \lambda a + (1-\nu)^2 \lambda a. \quad (1.17)$$

З трьох умов статичи (1.1) в даному випадку дві задовольняються тотожно, а третю можна записати

$$\int_0^a y \tilde{q}(0, y) dy = 0. \quad (1.18)$$

Ця умова забезпечує збіжність при $\lambda=0$ інтеграла, який виражає прогин w . Насправді, з (1.15) — (1.17) випливає, що при $\lambda \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= (A_2 + B_2) \lambda y + O(1); \\ A_2 + B_2 &= \frac{2}{\Delta_2(\lambda a)} [\lambda a K(\lambda) - L(\lambda)] + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

Нарешті, на основі (1.18) при $\lambda \rightarrow 0$ $\lambda a K(\lambda) - L(\lambda) = O(1)$, якщо функція $\tilde{q}(\lambda, y)$ є парною по λ , тобто навантаження $q(x, y)$ є симетричним відносно осі y , і $\lambda a K(\lambda) - L(\lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ при антисиметричному навантаженні. Тепер видно, що в обох випадках інтеграл Фур'є для прогину w буде збіжним у точці $\lambda=0$.

Нехай до підкріпленого краю пластинки прикладено розподілені поперечні зусилля $p(x)$ і розподілений момент інтенсивності $m(x)$. Тоді (верхній знак — для симетричної задачі, нижній — для антисиметричної)

$$q(x, y) = p(x) [\delta(y-a) \pm \delta(y+a)] + m(x) [\delta'(y-a) \mp \delta'(y+a)], \quad (1.19)$$

де $\delta(z)$ — імпульсна дельта-функція.

З (1.8), (1.10) випливає, що

$$K(\lambda) = \frac{\tilde{p}(\lambda)}{D\lambda^3}, \quad L(\lambda) = \frac{\tilde{m}(\lambda)}{D\lambda^2}, \quad \tilde{w}_0 = 0. \quad (1.20)$$

Умови рівноваги (1.1) запишуться так: $\tilde{p}(0) = \tilde{p}'(0) = 0$ (симетрична задача), $\tilde{m}(0) = a\tilde{p}(0)$ (антисиметрична задача), що, як і раніше, забезпечує збіжність інтегралів Фур'є.

Як приклад розглянемо пластинку, що знаходиться під дією зосереджених моментів M , які прикладено до підкріплених країв пластинки в точках $(0, a)$ і $(0, -a)$. У цьому випадку

$$p(x) = 0, \quad m(x) = M\delta(x). \quad (1.21)$$

Прогин $w(x, y)$ виражається формулою (1.14), в якій потрібно взяти $\tilde{w}_0 = 0$ і

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{M}{D\lambda^2 \Delta_1(\lambda a)} [\kappa_2 \lambda^2 a \operatorname{sh} \lambda a - (1+\nu) \operatorname{sh} \lambda a + (1-\nu) \lambda a \operatorname{ch} \lambda a]; \\ B_1 &= -\frac{M}{D\lambda^2 \Delta_1(\lambda a)} [\kappa_2 \lambda \operatorname{ch} \lambda a + (1-\nu) \operatorname{sh} \lambda a]. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Наведемо також формули для згинаючого моменту M_y . На середній лінії

$$\begin{aligned} (M_y)_{y=0} &= \frac{M}{\pi} \int_0^\infty \{ \kappa_2 \lambda [2 \operatorname{ch} \lambda a - (1-\nu) \lambda a \operatorname{sh} \lambda a] + \\ &+ (3+\nu)(1-\nu) \operatorname{sh} \lambda a - (1-\nu)^2 \lambda a \operatorname{ch} \lambda a \} \frac{\cos \lambda x d\lambda}{\Delta_1(\lambda a)}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

на контурі підкріплення

$$(M_y)_{y=a} = \frac{M}{\pi} \int_0^\infty [2\kappa_3 \lambda \operatorname{ch}^2 \lambda a + (3+\nu)(1-\nu) \operatorname{ch} \lambda a \operatorname{sh} \lambda a - \\ - (1-\nu)^2 \lambda a] \frac{\cos \lambda x d\lambda}{\Delta_1(\lambda a)}. \quad (1.24)$$

2. ПІВПЛОЩИНА З ПІДКРІПЛЕНИМ КРАЄМ

Результати попереднього параграфа дозволяють шляхом граничного переходу одержати розв'язок задачі про згин пластинки у формі півплощини, край якої підкріплено тонким пружним стержнем.

Нехай до підкріпленого краю $y=0$ пружної ізотропної півплощини ($y \geq 0$) прикладено розподілені поперечні зусилля $p(x)$ та розподілені моменти $m(x)$. Таку задачу було розглянуто А. А. Галасі [1, 2]. Заміняючи в (1.7) (або в (1.15)) y на $a-y$ та враховуючи (1.11) (або (1.16)) і (1.20), одержимо після граничного переходу при $a \rightarrow \infty$

$$\tilde{w} = \frac{e^{-|\lambda| y}}{D |\lambda|^3 \Delta(|\lambda|)} \{ [\kappa_3 |\lambda| (1+|\lambda| y) + (1-\nu) |\lambda| y + 2] \tilde{p}(\lambda) + \\ + [\kappa_2 \lambda^2 y + (1-\nu) |\lambda| y - (1+\nu)] |\lambda| \tilde{m}(\lambda) \}; \quad (2.1)$$

де

$$\Delta(\lambda) = \kappa_2 \kappa_3 \lambda^2 + 2(\kappa_2 + \kappa_3) \lambda + (3+\nu)(1-\nu). \quad (2.2)$$

Для моментів будемо мати формули

$$M_x = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\kappa_3 \lambda [1+\nu + (1-\nu) \lambda y] + (1-\nu)^2 \lambda y + 2(1-\nu^2)}{\lambda \Delta(\lambda)} e^{-\lambda y} d\lambda \int_{-\infty}^\infty p(t) \cos \lambda(t-x) dt + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\kappa_2 \lambda [2\nu + (1-\nu) \lambda y] + (1-\nu)^2 \lambda y - (1-\nu)^2}{\Delta(\lambda)} e^{-\lambda y} d\lambda \int_{-\infty}^\infty m(t) \cos \lambda(t-x) dt; \\ M_y = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\kappa_3 [1+\nu - (1-\nu) \lambda y] - (1-\nu)^2 y}{\Delta(\lambda)} e^{-\lambda y} d\lambda \int_{-\infty}^\infty p(t) \cos \lambda(t-x) dt + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\kappa_2 \lambda [2 - (1-\nu) \lambda y] - (1-\nu)^2 \lambda y + (3+\nu)(1-\nu)}{\Delta(\lambda)} e^{-\lambda y} d\lambda \int_{-\infty}^\infty m(t) \cos \lambda(t-x) dt; \quad (2.3) \\ H_{xy} = \frac{1-\nu}{\pi} \int_0^\infty \frac{\kappa_3 \lambda^2 y + (1-\nu) \lambda y + 1+\nu}{\lambda \Delta(\lambda)} e^{-\lambda y} d\lambda \int_{-\infty}^\infty p(t) \sin \lambda(t-x) dt - \\ - \frac{1-\nu}{\pi} \int_0^\infty \frac{\kappa_2 \lambda (1-\lambda y) - (1-\nu) \lambda y + 2}{\Delta(\lambda)} e^{-\lambda y} d\lambda \int_{-\infty}^\infty m(t) \sin \lambda(t-x) dt,$$

а для перерізуючих сил

$$\begin{aligned}
 N_x = & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\kappa_3 \lambda + 1 - \nu}{\Delta(\lambda)} e^{-\lambda y} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \sin \lambda(t-x) dt + \\
 & + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\kappa_2 \lambda + 1 - \nu}{\Delta(\lambda)} \lambda e^{-\lambda y} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} m(t) \sin \lambda(t-x) dt; \\
 N_y = & -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\kappa_3 \lambda + 1 - \nu}{\Delta(\lambda)} e^{-\lambda y} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \cos \lambda(t-x) dt - \\
 & - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\kappa_2 \lambda + 1 - \nu}{\Delta(\lambda)} \lambda e^{-\lambda y} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} m(t) \cos \lambda(t-x) dt.
 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Якщо на підкріплюючий стержень діє зосереджений момент M , прикладений в початку координат, то на лінії контакту пластинки і стержня ($y=0$) момент M_y розподіляється за законом

$$(M_y)_{y=0} = \frac{M}{\pi \kappa_2} \int_0^{\infty} \frac{[2\lambda + (3+\nu)(1-\nu)] \cos \lambda x' d\lambda}{k\lambda^2 + 2(1+k)\lambda + (3+\nu)(1-\nu)}, \quad (2.5)$$

де безрозмірні величини позначено

$$k = \frac{\kappa_3}{\kappa_2} = \frac{G_3}{G_2}, \quad x' = \frac{x}{\kappa_2}. \quad (2.6)$$

Нескладними перетвореннями вираз (2.5) приводиться до вигляду

$$(M_y)_{y=0} = \frac{M}{\pi \kappa_2} \sum_{n=1}^2 m_n \left\{ \sin(\lambda_n x') \left[\frac{\pi}{2} - \text{Si}(\lambda_n x') \right] - \cos(\lambda_n x') \text{Ci}(\lambda_n x') \right\}. \quad (2.7)$$

Тут

$$\lambda_n = \frac{1+k+(-1)^n \sqrt{(1-k)^2 + (1+\nu)^2}}{k}, \quad m_n = (-1)^n \frac{2\lambda_n - (3+\nu)(1-\nu)}{2\sqrt{(1-k)^2 + (1+\nu)^2}} \quad (n=1, 2). \quad (2.8)$$

У випадку рівних жорсткостей стержня на згин та кручення ($G_2 = G_3$, $k=1$)

$$\lambda_1 = 2m_1 = 1 - \nu, \quad \lambda_2 = 2m_2 = 3 + \nu. \quad (2.9)$$

Відзначимо, що згинаючий момент M_y на лінії контакту пластинки і стержня має в точці $x=0$ логарифмічну особливість.

3. ЗГИН ПЛАСТИНКИ-СМУГИ, ОПЕРТОЇ ВЗДОВЖ ПІДКРІПЛЕНИХ КРАЇВ

Нехай пластинка у формі смуги ($-\infty < x < \infty$, $-a \leq y \leq a$) є вільно опертою вздовж підкріплених країв $y = \pm a$ (рис. 2). Граничні умови мають вигляд

$$\begin{aligned}
 w &= 0, \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \pm \kappa_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \quad \text{при } y = \pm a.
 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Розв'язок поставленої задачі одержується з формул п. 1 шляхом граничного переходу при $\kappa_2 \rightarrow \infty$.

При симетричному навантаженні пластинки трансформанта прогину дається формулою (1.7), причому вирази A_1 і B_1 одержуються з формул (1.10)–(1.12) при $\kappa_2 \rightarrow \infty$ і мають вигляд

$$A_1 = \frac{1}{2D\lambda^3\Delta_1^*(\lambda a)} \int_0^a \{(\kappa_3\lambda \operatorname{sh} \lambda a + 2 \operatorname{ch} \lambda a) [\lambda t \operatorname{ch} \lambda (a-t) + \operatorname{sh} \lambda (a-t)] -$$

$$- [\kappa_3\lambda^2 (a-t) + 2] \lambda a \operatorname{ch} \lambda t - \kappa_3\lambda^2 a \operatorname{sh} \lambda t\} \tilde{q}(\lambda, t) dt; \quad (3.2)$$

$$B_1 = \frac{1}{2D\lambda^3\Delta_1^*(\lambda a)} \int_0^a [\kappa_3\lambda^2 (a-t) \operatorname{sh} \lambda t -$$

$$- (\kappa_3\lambda \operatorname{sh} \lambda a + 2 \operatorname{ch} \lambda a) \operatorname{sh} \lambda (a-t)] \tilde{q}(\lambda, t) dt,$$

де

$$\Delta_1^*(\lambda a) = \kappa_3\lambda (\operatorname{sh} \lambda a \operatorname{ch} \lambda a + \lambda a) +$$

$$+ 2 \operatorname{ch}^2 \lambda a \quad (3.3)$$

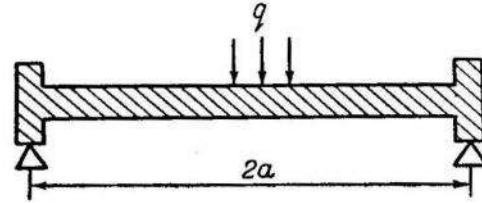


Рис. 2.

Аналогічно при антисиметричному навантаженні пластинки трансформанта прогину має вигляд (1.15), де

$$A_2 = \frac{1}{2D\lambda^3\Delta_2^*(\lambda a)} \int_0^a \{(\kappa_3\lambda \operatorname{ch} \lambda a + 2 \operatorname{sh} \lambda a) [\lambda t \operatorname{ch} \lambda (a-t) + \operatorname{sh} \lambda (a-t)] -$$

$$- [\kappa_3\lambda^2 (a-t) + 2] \lambda a \operatorname{sh} \lambda t - \kappa_3\lambda^2 a \operatorname{ch} \lambda t\} \tilde{q}(\lambda, t) dt; \quad (3.4)$$

$$B_2 = \frac{1}{2D\lambda^3\Delta_2^*(\lambda a)} \int_0^a [\kappa_3\lambda^2 (a-t) \operatorname{ch} \lambda t - (\kappa_3\lambda \operatorname{ch} \lambda a +$$

$$+ 2 \operatorname{sh} \lambda a) \operatorname{sh} \lambda (a-t)] \tilde{q}(\lambda, t) dt,$$

причому

$$\Delta_2^*(\lambda a) = \kappa_3\lambda (\operatorname{sh} \lambda a \operatorname{ch} \lambda a - \lambda a) + 2 \operatorname{sh}^2 \lambda a. \quad (3.5)$$

Зауважимо, що при $\lambda \rightarrow 0$ $A_2 + B_2 = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$. Це забезпечує збіжність інтеграла, який одержується при оберненні згідно з (1.6) виразу (1.15) для $\tilde{w}$.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. В точці $(0, c)$ пластинки ($c > 0$) прикладена зосереджена сила P . Я ще розбити задачу на симетричну та антисиметричну і перейти до безрозмірних величин

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{a}, \quad \zeta = \frac{c}{a}, \quad \delta = \frac{\kappa_3}{a}, \quad (3.6)$$

то після викладок одержимо остаточний вираз прогину

$$w = \frac{Pa^2}{4\pi D} \int_0^\infty [f_1(\eta, \zeta, \lambda) + f_2(\eta, \zeta, \lambda)] \cos \lambda \xi d\lambda \quad \text{при } -1 \leq \eta \leq \zeta. \quad (3.7)$$

Функції $f_1(\eta, \zeta, \lambda)$ та $f_2(\eta, \zeta, \lambda)$, що відповідають симетричній та антисиметричній складовим навантаження, мають вигляд

$$f_1(\eta, \zeta, \lambda) = \frac{1}{\lambda^3 \Delta_1^*(\lambda)} \{ (\delta \lambda \operatorname{sh} \lambda + 2 \operatorname{ch} \lambda) [\operatorname{sh} \lambda (1 - \zeta) (\operatorname{ch} \lambda \eta - \lambda \eta \operatorname{sh} \lambda \eta) + \\ + \lambda \zeta \operatorname{ch} \lambda (1 - \zeta) \operatorname{ch} \lambda \eta] + \delta \lambda^3 (1 - \zeta) (\eta \operatorname{sh} \lambda \zeta \operatorname{sh} \lambda \eta - \operatorname{ch} \lambda \zeta \operatorname{ch} \lambda \eta) - \\ - (\delta \lambda \operatorname{sh} \lambda \zeta + 2 \operatorname{ch} \lambda \zeta) \lambda \operatorname{ch} \lambda \eta \}; \quad (3.8)$$

$$f_2(\eta, \zeta, \lambda) = \frac{1}{\lambda^3 \Delta_2^*(\lambda)} \{ (\delta \lambda \operatorname{ch} \lambda + 2 \operatorname{sh} \lambda) [\operatorname{sh} \lambda (1 - \zeta) (\operatorname{sh} \lambda \eta - \lambda \eta \operatorname{ch} \lambda \eta) + \\ + \lambda \zeta \operatorname{ch} \lambda (1 - \zeta) \operatorname{sh} \lambda \eta] + \delta \lambda^3 (1 - \zeta) (\eta \operatorname{ch} \lambda \zeta \operatorname{ch} \lambda \eta - \operatorname{sh} \lambda \zeta \operatorname{sh} \lambda \eta) - \\ - (\delta \lambda \operatorname{ch} \lambda \zeta + 2 \operatorname{sh} \lambda \zeta) \lambda \operatorname{sh} \lambda \eta \}.$$

При $\zeta \leq \eta \leq 1$ у відповідності з теоремою Максвелла про взаємність переміщень прогин записується

$$w = \frac{Pa^2}{4\pi D} \int_0^\infty [f_1(\zeta, \eta, \lambda) + f_2(\zeta, \eta, \lambda)] \cos \lambda \xi d\lambda. \quad (3.9)$$

Граничні значення параметра δ відповідають шарнірному опираю ($\delta=0$) або жорсткому затисненню ($\delta=\infty$) країв пластини. Ці задачі розглянуто в монографії Я. С. Уфлянда [7, стор. 96—100]. При $\delta \rightarrow 0$ і $\delta \rightarrow \infty$ формули (3.8) узгоджуються з відповідними формулами в [7].

У випадку шарнірно опертої пластинки ($\delta=0$) інтеграли (3.7), (3.9) шляхом контурного інтегрування і застосування теореми про лишки [9, стор. 16] перетворюються в ряд [4, стор. 169]:

$$w = \frac{2Pa^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left(1 + \frac{\pi}{2} m |\xi| \right) e^{-\frac{\pi}{2} m |\xi|} \sin \frac{\pi}{2} m (1 + \zeta) \sin \frac{\pi}{2} m (1 + \eta). \quad (3.10)$$

Значення згинаючого моменту на підкріпленому краї таке:

$$(M_y)_{\eta=1} = - \frac{P\delta}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{\lambda \operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda \zeta - \lambda \zeta \operatorname{sh} \lambda \zeta \operatorname{ch} \lambda}{\delta \lambda (\operatorname{sh} 2\lambda + 2\lambda) + 4 \operatorname{ch}^2 \lambda} + \right. \\ \left. + \frac{\lambda \operatorname{ch} \lambda \operatorname{sh} \lambda \zeta - \lambda \zeta \operatorname{ch} \lambda \zeta \operatorname{sh} \lambda}{\delta \lambda (\operatorname{sh} 2\lambda - 2\lambda) + 4 \operatorname{sh}^2 \lambda} \right] \cos \lambda \xi d\lambda. \quad (3.11)$$

При $\delta \rightarrow \infty$, тобто для зашцімленої пластинки, звідси одержується формула (23.13) монографії [7].

Приклад 2. Зосереджена сила P прикладена в центрі пластинки. Вираз прогину одержується з (1.7), (1.8), (3.2), якщо покласти $q(x, y) = P\delta(x)\delta(y)$, або з формул (3.7)—(3.9) граничним переходом $\zeta \rightarrow 0$.

Максимальний прогин має місце під силою

$$w_{\max} = \frac{Pa^2}{2\pi D} \int_0^\infty \frac{\delta \lambda (\operatorname{sh}^2 \lambda - \lambda^2) + \operatorname{sh} 2\lambda - 2\lambda}{\lambda^3 [\delta \lambda (\operatorname{sh} 2\lambda + 2\lambda) + 4 \operatorname{ch}^2 \lambda]} d\lambda. \quad (3.12)$$

Його можна записати у вигляді

$$w_{\max} = \alpha \frac{Pa^2}{D}. \quad (3.13)$$

Підраховані шляхом чисельного інтегрування деякі значення коефіцієнта α при різних значеннях параметра підкріплення δ дано в таблиці.

Коефіцієнти α і β у формулах (3.13) і (3.17) для максимального прогину

$\delta = \frac{G_3}{aD}$	Зосереджена сила $W_{\max} = \alpha \frac{Pa^2}{D}$	Рівномірне навантаження по лінії $y=0$ $W_{\max} = \beta \frac{2q_0 a^3}{D}$
	α	β
0	0,0678	0,0406
0,1	0,0666	0,0397
0,5	0,0628	0,0370
1	0,0595	0,0347
5	0,0491	0,0274
10	0,0446	0,0243
50	0,0365	0,0189
100	0,0345	0,0175
∞	0,0290	0,0138

* Підрахунки для таблиці проведено в обчислювальному центрі Львівського держуніверситету на ЕЦОМ „Урал-1“ А. Р. Денисовою, якій автор висловлює щирі подяку.

Для обчислення $w_{\max}$ при малих значеннях δ зручно користуватися розкладом

$$w_{\max} = \frac{Pa^2}{2\pi D} (a_0 - a_1\delta + a_2\delta^2 + \dots + (-1)^n a_n \delta^n + (-1)^{n+1} r_n \delta^{n+1}), \quad (3.14)$$

де

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} 2\lambda - 2\lambda}{\lambda^3 \operatorname{ch}^2 \lambda} d\lambda; \\ a_n &= \frac{1}{4^n} \int_0^\infty \frac{[\lambda (\operatorname{sh} 2\lambda + 2\lambda)]^{n-1} \operatorname{sh}^2 \lambda}{\operatorname{ch}^{2(n+1)} \lambda} d\lambda \quad (n=1, 2, \dots); \\ r_n &= \frac{1}{4^n} \int_0^\infty \frac{[\lambda (\operatorname{sh} 2\lambda + 2\lambda)]^n \operatorname{sh}^2 \lambda d\lambda}{\operatorname{ch}^{2(n+1)} \lambda [\delta \lambda (\operatorname{sh} 2\lambda + 2\lambda) + 4 \operatorname{ch}^2 \lambda]}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Коефіцієнти a_n розкладу (3.14) шляхом нескладних перетворень виражаються через протабульовані інтеграли [10]. Значення кількох перших коефіцієнтів такі:

$$a_0 = 0,42628, \quad a_1 = 0,08333, \quad a_2 = 0,05537, \quad a_3 = 0,04719.$$

Приклад 3. Навантаження q_0 є рівномірно розподіленим вздовж осі y по всій ширині пластинки. В цьому випадку $q(x, y) = q_0 \delta(x)$, і прогин має вигляд

$$\begin{aligned} w = \frac{q_0 a^3}{\pi D} \int_0^\infty \left[1 - 2 \frac{\delta \lambda (\lambda \operatorname{ch} \lambda + \operatorname{sh} \lambda) + \lambda \operatorname{sh} \lambda + 2 \operatorname{ch} \lambda}{\delta \lambda (\operatorname{sh} 2\lambda + 2\lambda) + 4 \operatorname{ch}^2 \lambda} \operatorname{ch} \lambda \eta + \right. \\ \left. + 2 \frac{(\delta \lambda \operatorname{sh} \lambda + \operatorname{ch} \lambda) \lambda \eta \operatorname{sh} \lambda \eta}{\delta \lambda (\operatorname{sh} 2\lambda + 2\lambda) + 4 \operatorname{ch}^2 \lambda} \right] \frac{\cos \lambda \xi}{\lambda^4} d\lambda. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Найбільшого значення прогин досягає в центрі пластинки ($\xi = \eta = 0$), де його можна записати

$$w_{\max} = \beta \frac{2q_0 a^3}{D}. \quad (3.17)$$

Ряд значень коефіцієнта β при різних δ наводиться в таблиці, з якої видно, що при рівномірному розподілі сили $P = 2aq_0$ по ширині пластинки максимальний прогин зменшується в 1,7—2,1 раза.

Згинаючий момент M_y на підкріпленому краї $y = a$ виражається так:

$$(M_y)_{\eta=1} = -\frac{q_0 a \delta}{\pi} \int_0^\infty \frac{(\operatorname{sh} 2\lambda - 2\lambda) \cos \lambda \xi d\lambda}{\lambda [\delta \lambda (\operatorname{sh} 2\lambda + 2\lambda) + 4 \operatorname{ch}^2 \lambda]}. \quad (3.18)$$

У випадку вільно опертої невідкріпленої пластинки ($\delta = 0$) вираз прогину у вигляді ряду дано в монографії [4, стор. 176]. Цей вираз одержується з (3.16) при $\delta = 0$ за допомогою контурного інтегрування та використання теореми про лишки [9]:

$$w = \frac{8q_0 a^3}{\pi^4 D} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^4} \left[1 + \frac{\pi}{2} (2k+1) |\xi| \right] e^{-\frac{\pi}{2} (2k+1) |\xi|} \cos \frac{\pi}{2} (2k+1) \eta. \quad (3.19)$$

Для затисненої по краях пластинки задача розв'язана П. Ф. Папковичем [3]. Вирази (3.16), (3.18) при $\delta \rightarrow \infty$ переходять у формули П. Ф. Папковича.

Приклад 4. Якщо взяти $q(x, y) = q_0 \operatorname{sgn} x$, то одержимо розв'язок для рівномірно навантаженої пластинки-півсмуги ($0 \leq x < \infty$, $-a \leq y \leq a$), у якій край $x = 0$ та підкріплені края $y = \pm a$ є вільно опертими:

$$w = \frac{2q_0 a^4}{\pi D} \int_0^\infty \left[1 - 2 \frac{\delta \lambda (\lambda \operatorname{ch} \lambda + \operatorname{sh} \lambda) + \lambda \operatorname{sh} \lambda + 2 \operatorname{ch} \lambda}{\delta \lambda (\operatorname{sh} 2\lambda + 2\lambda) + 4 \operatorname{ch}^2 \lambda} \operatorname{ch} \lambda \eta + \right. \\ \left. + 2 \frac{(\delta \lambda \operatorname{sh} \lambda + \operatorname{ch} \lambda) \lambda \eta \operatorname{sh} \lambda \eta}{\delta \lambda (\operatorname{sh} 2\lambda + 2\lambda) + 4 \operatorname{ch}^2 \lambda} \right] \frac{\sin \lambda \xi}{\lambda^5} d\lambda. \quad (3.20)$$

Вираз прогину (3.16) в попередній задачі одержується звідси диференціюванням по x і заміною $2q_0$ на q_0 . Це впливає з рівності

$$\frac{d}{dx} (q_0 \operatorname{sgn} x) = 2q_0 \delta(x).$$

Перейшовши у формулі (3.20) до границі при $\delta \rightarrow \infty$, одержимо прогин рівномірно навантаженої пластинки-півсмуги, затисненої по краях $y = \pm a$ і опертої по краю $x = 0$ [4, стор. 252].

ЛІТЕРАТУРА

1. А. А. Галаси. К вопросу о напряжениях в пластинке, подкрепленной тонким упругим стержнем. Науч. зап. Ужгород. гос. ун-та, т. 18, 1957.
2. А. А. Галаси. К вопросу приложения интегральных преобразований в теории упругости. Доклады и сообщения Ужгород. гос. ун-та, сер. физ.-мат. наук, № 4, 1961.
3. П. Ф. Папкович. Труды по строительной механике корабля, т. 3, Судпромгиз, Л., 1962, стр. 298—303.
4. С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. Пластинки и оболочки. Физматгиз, М., 1963.
5. С. П. Тимошенко. Пластинки и оболочки. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
6. С. П. Тимошенко. Устойчивость упругих систем. ГИТТЛ, М., 1955.

7. Я. С. Уфлянд. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд. АН СССР, М.—Л., 1963.

8. М. П. Шереметьев, Д. Г. Хлебников. Згин нескінченної смуги з підкріпленням краєм. Прикладна механіка, т. 7, в. 2, 1961.

9. А. М. Эфрос, А. М. Данилевский. Операционное исчисление и контурные интегралы. Харьков, 1937.

10. C. B. Ling. Tables of values of the integrals $\int_0^{\infty} \frac{x^m}{\operatorname{sh}^p x} dx$ and $\int_0^{\infty} \frac{x^m}{\operatorname{ch}^p x} dx$.

Journal of Mathematics and Physics, v. 31, № 1, 58—62 (1952).

Д. Г. ХЛЕБНИКОВ

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ПЛАСТИНОК В ФОРМЕ ПОЛУПЛОСКОСТИ И ПОЛОСЫ С ПОДКРЕПЛЕННЫМИ КРАЯМИ

(резюме)

Методом интегральных преобразований Фурье решены задачи об изгибе тонкой пластинки в форме полосы, оба края которой подкреплены тонкими упругими стержнями. Рассмотрены случаи, когда подкрепленные края пластинки: 1) свободны от нагрузки или загружены заданными усилиями и моментами; 2) свободно оперты.

Предельным переходом получено решение рассмотренной ранее А. А. Галаси [1, 2] задачи об изгибе полуплоскости с подкрепленным краем.
