С. П. ГАВЕЛЯ, В. М. КОСАРЧИН

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НА ЕЛЕКТРОННО-ОБЧИСЛЮВАЛЬНІЙ ЦИФРОВІЙ МАШИНІ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ

Нижче будуються алгоритми розв'язування на електронно-обчислювальній машині крайових задач для пологих оболонок з отворами знакосталої гауссової кривини, а також аналогічних періодичних задач для замкнутих оболонок, окреслених по поверхнях обертання. Крайові умови відповідають деякому випад"у пружного закріплення.

Запропоноване В. З. Власовим [1, стор. 437] припущення про сталість головних кривин k_1, k_2 пологої оболонки дозволяє записати систему рівнянь її пружної рівноваги у вигляді

$$(1-\varkappa)\,\Delta u+2\varkappa\partial\partial' u=-4\varkappa\delta\partial' w; \tag{1}$$

$$\Delta\Delta w=\frac{1-\sigma^2}{Eh^3}Z-\frac{12}{h^2}\delta\partial' u-\frac{12}{h^2}\left(k_1^2+k_2^2+2\sigma k_1 k_2\right) w. \tag{2}$$

Тут

$$\delta=\frac{1}{1+\sigma}\begin{pmatrix}k_1+\sigma k_2 & 0\\ 0 & k_2+\sigma k_1\end{pmatrix},\quad u=\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix},\quad \partial=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial}{\partial x_2}\end{pmatrix};$$

$$\partial'=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ \frac{\partial}{\partial x_2}\right),\quad \Delta=\partial\partial'=\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right),\quad \varkappa=\frac{1+\sigma}{3-\sigma};$$

x_1, x_2 — криволінійні координати довільної точки x серединної поверхні оболонки: $u_1=u_1(x)$, $u_2=u_2(x)$, $w=w(x)$ — компоненти вектора зміщень; $Z=Z(x)$ — напрямлене по нормалі зовнішнє навантаження; E і σ — модуль Юнга і коефіцієнт пружності матеріалу відповідно; h — товщина оболонки.

Нехай оболонка заповнює в площині x_1ox_2 область Ω з границею S, що складається з прямокутника $x_1=\pm\alpha_1$, $x_2=\pm\alpha_2$ та еліпса $x_1=b_1+a_1\cos t$, $x_2=b_2+a_2\sin t$.

Вважаються виконаними граничні умови

$$u_1\big|_S=u_2\big|_S=w\big|_S=0; \tag{3}$$

$$D\Delta w\big|_S=\left(M_n-D\frac{1-\sigma}{\rho}\frac{\partial w}{\partial n}\right)\Big|_S=0, \tag{4}$$

де $D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$; ρ — радіус кривини еліпса.

При побудові алгоритму розв'язування задачі (1), (2), (3), (4) для пологої оболонки знакосталої гауссової кривини може бути в значній мірі збережена схема, запропонована в [2] для пологої сферичної оболонки.

Коефіцієнти u_{1lm}, u_{2lm}, w_{lm} розкладів

$$u_i(x) = \sum_{l,\, m=1,2,3,\ldots} u_{ilm} \sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x_1}{\alpha_1}+1\right) \sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{x_2}{\alpha_2}+1\right); \tag{5}$$

$$w(x) = \sum_{l,\, m=1,2,3,\ldots} w_{lm} \sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x_1}{\alpha_1}+1\right) \sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{x_2}{\alpha_2}+1\right) \tag{6}$$

будуть визначатися формулами

$$u_{ilm} = \sum_{q=0}^{\infty} \varkappa^q u_{i,\, q;\, lm}; \qquad w_{lm} = \sum_{q=0}^{\infty} \varkappa^q w_{q;\, lm};$$

$$u_{i,\, q;\, lm} = \sum_{kn} G_{knlm} \Phi_{i,\, q;\, kn};$$

$$w_{q,\, lm} = \sum_{kn} G_{knlm} v_{q,\, kn}; \quad v_{q,\, lm} = \sum_{kn} G_{knlm} F_{q,\, kn};$$

$$\Phi_{1,\, q-1;\, lm} = \left(\frac{l^2\pi^2}{4\alpha_1^2} - \frac{m^2\pi^2}{4\alpha_2^2}\right) u_{1,\, q-1;\, lm} - \sum_{rs} \frac{\pi^2 rs}{2\alpha_1\alpha_2} \gamma_{rl}\gamma_{sm} u_{2,\, q-1;\, rs} - $$
$$- \frac{2(k_1+\sigma k_2)}{1+\sigma} \sum_r \frac{\pi r}{\alpha_1} \gamma_{rl} w_{q-1;\, rm}; \tag{7}$$

$$\Phi_{2,\, q-1;\, lm} = \left(\frac{m^2\pi^2}{4\alpha_2^2} - \frac{l^2\pi^2}{4\alpha_1^2}\right) u_{2,\, q-1;\, lm} - \sum_{rs} \frac{\pi^2 rs}{2\alpha_1\alpha_2} \gamma_{rl}\gamma_{1m} u_{1,\, q-1;\, rs} - $$
$$- \frac{2(k_2+\sigma k_1)}{1+\sigma} \sum_r \frac{\pi r}{\alpha_2} \gamma_{rm} w_{q-1;\, rm}; \tag{8}$$

$$F_{okn} = \frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3\alpha_1\alpha_2} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1}\int_{-\alpha_2}^{\alpha_2} Z(x_1, x_2) \sin\frac{k\pi}{2}\left(\frac{x_1}{\alpha_1}+1\right) \sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{x_2}{\alpha_2}+1\right) dx_1 dx_2;$$

$$F_{qkn} = -\frac{6}{h^2}(k_1+\sigma k_2) \sum_r \frac{\pi r}{\alpha_1} \gamma_{rk} u_{1,\, q;\, rn} - \frac{6}{h^2}(k_2+\sigma k_1) \sum_r \frac{\pi r}{\alpha_2} \gamma_{rn} u_{2,\, q;\, kr} - $$
$$- \frac{3-\sigma}{1+\sigma}(k_1^2+k_2^2+2\sigma k_1 k_2)\, w_{q-1;\, kn}; \tag{9}$$

$$G_{lmkn} = \frac{4\alpha_1^2\alpha_2^2}{\pi^2(l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2)}\left(N_{lmkn} - \begin{bmatrix} k & n \\ l & m \end{bmatrix}\right);$$

$$N_{lmkn} = \frac{1}{k^2\alpha_2^2 + n^2\alpha_1^2} \sum_{rs} (P_{kns}P_{lmr}R_{1,\, rs} + Q_{kns}Q_{lmr}R_{2,\, rs});$$

$$\cos\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x_i}{\alpha_i}+1\right) = \sum_k \gamma_{lk} \sin\frac{k\pi}{2}\left(\frac{x_i}{\alpha_i}+1\right); \quad \begin{bmatrix} k & n \\ l & m \end{bmatrix} = \delta_{kl}\delta_{nm};$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$P_{lmn}=\int_0^{2\pi}\sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{\xi_1}{\alpha_1}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{\xi_2}{\alpha_2}+1\right)\cos nt\,dt;$$

$$Q_{lmn}=\int_0^{2\pi}\sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{\xi_1}{\alpha_1}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{\xi_2}{\alpha_2}+1\right)\sin nt\,dt;$$

R_{1nk} і R_{2nk} — елементи оберненої матриці системи

$$\sum_{l,\,mk}\frac{P_{lmn}P_{lmk}}{l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2}\mu_{1k}+\sum_{lmk}\frac{P_{lmn}Q_{lmk}}{l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2}\mu_{2k}=\sum_{lm}\frac{\alpha_1\alpha_2P_{lmn}}{l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2}F_{lm};$$

$$\sum_{lmk}\frac{Q_{lmn}P_{lmk}}{l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2}\mu_{1k}+\sum_{lmk}\frac{Q_{lmn}Q_{lmk}}{l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2}\mu_{2k}=\sum_{lm}\frac{\alpha_1\alpha_2Q_{lmn}}{l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2}F_{lm}.$$

При умові достатньої малості кривин k_1, k_2 збіжність цього ітераційного за індексом q процесу обчислень випливає з доведеної в [3] теореми.

Розглянемо тепер замкнуту оболонку з еліптичними отворами, окреслену по поверхні обертання знакосталої гауссової кривини з пологим меридіаном, напружений стан якої задовольняє умову n-кратної періодичності вздовж паралелей $x_1=\text{const}$. Можливість відповідно до викладеного в [4] способу уявного розчленування такої оболонки на смуги, що періодично повторюються, дозволяє при $n>2$ побудувати алгоритм її розрахунку шляхом невеликої зміни наведеного вище.

З цією метою функції $\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{x_2}{\alpha_2}+1\right)$ слід замінити функціями $\cos\frac{m\pi}{2}\frac{x_2}{\alpha_2}$ у формулах, які визначають u_1, w, F_q, і функціями $\sin\frac{m\pi}{2}\frac{x_2}{\alpha_2}$ при визначенні u_2.

Формули (7), (8), (9) спрощуються:

$$\Phi_{1,\,q-1;\,lm}=\left(\frac{l^2\pi^2}{4\alpha_1^2}-\frac{m^2\pi^2}{4\alpha_2^2}\right)u_{1,\,q-1,\,lm}-\sum_r\frac{\pi^2rm}{2\alpha_1\alpha_2}\gamma_{rl}u_{2,\,q-1,\,rm}-$$
$$-\frac{2\,(k_1+\sigma k_2)}{1+\sigma}\sum_r\frac{\pi r}{\alpha_1}\gamma_{rl}w_{q-1,\,rm};$$

$$\Phi_{2,\,q-1,\,lm}=\left(\frac{m^2\pi^2}{4\alpha_2^2}-\frac{l^2\pi^2}{4\alpha_1^2}\right)u_{2,\,q-1,\,lm}+\sum_r\frac{\pi^2rm}{2\alpha_1\alpha_2}\gamma_{rl}u_{1,\,q-1,\,rm}-$$
$$-\frac{2\,(k_2+\sigma k_1)}{1+\sigma}\,\frac{m\pi}{\alpha_2}w_{q-1,\,lm};$$

$$F_{q,\,lm}=-\frac{6}{h^2}(k_1+\sigma k_2)\sum_r\frac{\pi r}{\alpha_1}\gamma_{rl}u_{1,\,q,\,rm}-\frac{6}{h^2}(k_2+\sigma k_1)\frac{\pi m}{\alpha_2}u_{2,\,q,\,lm}-$$
$$-\frac{3-\sigma}{1+\sigma}(k_1^2+k_2^2+2\sigma k_1k_2)\,w_{q-1,\,lm}.$$

Побудовані таким чином програми виявляються придатними для довільно заданих в кожному конкретному випадку зовнішнього навантаження Z та параметрів оболонки: k_1, k_2; α_1, α_2; a_1, a_2; b_1, b_2; σ, E. Така загальність дозволяє дослідити залежність напруженого стану оболонки від значень цих параметрів шляхом порівняння результатів обчислень. Розрахунок контрольного варіанту на електронно-обчислювальній машині типу «Стріла-4» виявляє (при $b_2=0$) ефективність побудованого алгоритму, дозволяючи визначити коефіцієнти u_{1lm}, u_{2lm}, w_{lm} розкладів (5), (6) для l, $m=1, 2, 3, \ldots, 10$. Це забезпечує високу точність (порядку 0,5%) при визначенні зміщень $u_1(x)$, $u_2(x)$, $w(x)$ і цілком задовільну точність при визначенні напружень.

ЛІТЕРАТУРА

1. В. З. Власов. Общая теория оболочек. Гостехиздат, М—Л., 1949.
2. С. П. Гавеля, В. М. Косарчин. Пружна рівновага пологої сферичної оболонки, обмеженої еліпсом і прямокутником. Зб. робіт аспірантів. Вид-во Львів. ун-ту, 1963.
3. Я. Б. Лопатинский. Об одном методе решения второй основной задачи теории упругости. Теоретическая и прикладная математика, вып. 1, Львов, 1958.
4. Н. В. Колкунов. Расчет оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны на периодическую нагрузку. Труды II Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. К., 1962.

С. П. ГАВЕЛЯ, В. Н. КОСАРЧИН

РЕШЕНИЕ НА ЭЛЕКТРОННО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ЦИФРОВОЙ МАШИНЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

(резюме)

Построены алгоритмы решений на электронно-вычислительной машине граничных задач для пологих оболочек с отверстиями знакопостоянной гауссовой кривизны, а также аналогичных периодических задач для замкнутых оболочек, очерченных по поверхностям вращения. Граничные условия соответствуют некоторому виду упругого закрепления.