ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1965 *Серія механіко-математична* *Випуск 2*

А. І. ПИЛИПОВИЧ

ПРО ГЕОМЕТРИЧНІ ПОБУДОВИ В ПРОСТОРІ

Питанням теорії геометричних побудов присвячено багато наукових праць. Але майже всі вони стосуються конструктивних питань на площині. Потреба розв'язувати стереометричні задачі приводить до необхідності побудов геометричних фігур в просторі, вміння вірно зображати просторові фігури. Питання зображення просторових фігур привертає увагу геометрів і тепер. Для прикладу візьмемо роботи М. Ф. Четверухіна [1].

Всі задачі на побудову в просторі зводились до зображення просторових фігур і шуканих елементів на плоскому рисунку. Побудови безпосередньо в просторі мало досліджувалися, що не може бути виправданим.

Всяку побудовану фігуру можна розкласти на деякі елементи. Будемо розглядати такі *елементи побудови:* 1) нульвимірні елементи — точки, 2) одновимірні — прямі, кола, конічні перерізи, 3) двовимірні — площини, сфери, поверхні другого порядку. Поняття поряд у елемента буде дано нижче. Всі згадані елементи можуть бути даними і заданими. Дані елементи вже побудовані, тоді як задані ще треба побудувати, після чого вони перейдуть в клас даних елементів.

Сполученням двох елементів називають сукупність точок, які належать хоч би одному з цих елементів. *Перетином* двох елементів називають сукупність точок, спільних для обох елементів. В результаті перетину двох вказаних елементів одержуємо нові елементи, які можуть бути нульвимірними або одновимірними.

Задача на побудову полягає в тому, що наперед заданими інструментами треба побудувати деяку фігуру, якщо дано деякі інші фігури — так звані елементи побудови і вказані деякі співвідношення між даними фігурами і шуканою. Кожна фігура, яка відповідає усім умовам задачі, є розв'яз ом задачі. Процес розв'язування конструктивної задачі вибраним комплексом інструментів побудови полягає в знаходженні сполучень, перетинів і інцидентностей на базі відомих елементів побудови.

Клас одновимірних і клас двовимірних елементів розбивається на підкласи елементів першого порядку і елементів другого порядку.

Елементами першого (відповідно *другого*) *порядку* називаються такі елементи, перетин яких з прямою є один нульвимірний елемент (відповідно два нульвимірні елементи). Слід відмітити, що порядок даного елемента збігається з степенем його рівняння.

Будемо розрізняти конструктивні задачі першого і другого порядків. Конструктивною *задачею першого* (відповідно *другого*) *порядку* називається задача, розв'язання якої вимагає побудов, в результаті яких одержуємо елемент першого порядку або один нульвимірний елемент (відповідно — елемент другого порядку або два нульвимірні елементи). Звичайно в задачі другого порядку як проміжна ланка можуть виконуватись побудови, які приводять і до елементів першого порядку.

Хоч порядок і степінь конструктивної задачі збігаються, ми вживаємо перший термін, маючи намір провести чисто геометричне обгрунтування можливості розглядуваних побудов без допомоги алгебри. При цьому без посилання на відповідні теореми будемо користуватись як відомими такими, наприклад, фактами:

1) площина і не інцидентна їй пряма визначають єдину інцидентну їм точку,

2) площина і поверхня другого порядку визначають криву другого порядку,

3) два конічні перерізи визначають чотири точки і т. п.

Будемо розглядати побудови, що приводять до просторової задачі другого порядку. Як відомо, всяка задача другого порядку на площині може бути розв'язана циркулем і лінійкою — інструментами, — які креслять лінії постійної кривини. Їх аналогами в просторі є площина і сфера, для «креслення» котрих (фіксування в просторі) користуватимемось площинографом і сферографом — інструментами, запропонованими Г. Л. Буймола [3]. Опис інструментів подається у вигляді аксіом, які в абстрактній формі виражають властивості даних інструментів.

Аксіома 1 (площинографа). За допомогою площинографа можна виконати такі побудови:

1) побудувати площину, задану будь-якими елементами, які визначають цю площину.

2) побудувати довільну площину.

Аксіома 2 (сферографа). За допомогою сферографа можна виконати такі геометричні побудови:

1) побудувати сферу, якщо дано її центр і відрізок, рівний діаметру сфери (або його кінці), або радіус сфери,

2) побудувати довільну сферу.

Наочний опис цих інструментів подано в статті Г. Л. Буймоли «Про деякі питання геометрографії n-вимірного евклідового простору», вміщеній у даному збірнику.

Незалежно від того, якими інструментами побудовано дві фігури, приймемо як аксіому таку вимогу щодо цих фігур:

Аксіома 3. Якщо дано дві які-небудь фігури, то даними вважаються і їх сполучення, перетин, або окремі точки, інцидентні обидвом фігурам, якщо такі точки існують. На основі аксіоми 3 можна встановити, чи дані фігури мають спільні елементи чи не мають їх.

При розв'язуванні просторової конструктивної задачі часто необхідно вибирати довільні точки площини, сфери, інцидентні або неінцидентні даному елементу, що є можливим на основі аксіом 1, 2, 3. Всі елементи простору, віднесені до певного конструктивного класу, визначуваного аксіомами 1—3, називають *конструктивними*.

Розглянемо питання можливості розв'язання згаданим комплексом інструментів конструктивної задачі другого порядку в тривимірному евклідовому просторі.

Для доведення можливості розв'язку певними засобами всіх задач другого порядку на площині треба переконатися, як відомо, що цими засобами можна виконати вісім наступних основних операцій [4].

Операція 1. Побудова прямої лінії.

Операція 2. Визначення точки перетину даної прямої з заданою прямою.

Операція 3. Визначення точки перетину даного кола з заданою прямою.

Операція 4. Побудова кола з даним центром і заданим радіусом.

Операція 5. Визначення точки перетину даної прямої з заданим колом.

Операція 6. Визначення точки перетину даного кола з заданим.

Операція 7. Визначення точок перетину даного конічного перерізу з заданою прямою.

Операція 8. Визначення точок перетину даної прямої з заданим п'ятьма точками конічним перерізом.

Аналогічні цим операціям в просторі такі операції:

Операція 9. Проведення площини.

Операція 10. Визначення точки перетину даної площини з заданою прямою.

Операція 11. Визначення точки перетину даної прямої з заданою площиною.

Операція 12. Визначення точок перетину даного кола і заданої площини.

Операція 13. Визначення точок перетину даної площини і заданого кола.

Операція 14. Проведення сфери.

Операція 15. Визначення точок перетину даної прямої і заданої сфери.

Операція 16. Визначення точок перетину даної сфери і заданої прямої.

Операція 17. Визначення точок перетину даного кола і заданої сфери.

Операція 18. Визначення точок перетину даної сфери і заданого кола.

Операція 19. Визначення точок перетину даного конічного перерізу з заданою площиною.

Операція 20. Визначення точок перетину даної площини з заданим конічним перерізом.

Операція 21. Визначення лінії перетину даної поверхні другого порядку з заданою площиною.

Операція 22. Визначення лінії перетину даної площини з заданою поверхнею другого порядку.

Операція 23. Визначення точок перетину даної поверхні другого порядку з заданою прямою.

Операція 24. Визначення точок перетину даної прямої з заданою поверхнею другого порядку.

З а у в а ж е н н я. Операції визначення лінії перетину площини і сфери, двох сфер зводяться до операції 4. Операція визначення лінії перетину двох площин зводиться до операції 1.

Операції побудови довільних точок заданого конічного перерізу і заданої поверхні другого порядку зводяться відповідно до операції 8 і 24.

Отже, для доведення можливості розв'язання всякої задачі другого порядку вибраним комплексом інструментів, треба показати, що цим комплексом можуть бути виконані операції 1—24. Спочатку відзначимо можливість побудови заданої прямої на основі аксіом 1 і 3 і заданого кола на основі аксіом 2, 3.

Можна зауважити, що всі задані елементи операцій 1—24, крім операцій 8, 20, 22, 24, можуть бути віднесені в клас даних за допомогою інструментів побудови на основі аксіом 1—3. Тоді на основі аксіоми 3 будуть відомими шукані перетини.

Доведемо можливість виконання операції 8, яка зводиться до відшукання подвійних точок двох проективних рядів, визначених п'ятьма точками. Але ця задача, як відомо, розв'язується шляхом проведення лише прямих ліній, якщо в площині конічного перерізу накреслене довільне коло. Оскільки проведення прямих і кола можливе на основі аксіом 1—3, виконання операції 8 — можливе.

Операція 20 зводиться до операції 8, якщо провести площину даного конічного перерізу. В перетині даної площини з площиною конічного перерізу одержимо пряму. Точки перетину цієї прямої з конічним перерізом є шуканими.

Доведемо можливість виконання операції 22. Поверхня другого порядку може бути задана дев'ятьма точками загального положення, які визначають в'язку прямих з центром S і корелятивно відповідну їй в'язку площин з центром S'. В перетині даної площини α з заданою поверхнею одержуємо криву другого порядку, яка буде визначеною, якщо будуть відомими п'ять її точок. Для знаходження цих п'яти точок використаємо той факт, що площина α перетинає в'язку прямих у чотирьох точках, а в'язку площин по чотирьох прямих, корелятивно відповідних цим точкам. Якщо вибрати в площині α деяку пряму a_1 і побудувати відповідну їй в даній кореляції точку A_1 (що вимагає проведення лише прямих ліній [2]), а потім через a_1 і S' провести площину β', то пряма $b \equiv A_1S$ відповідатиме площині β'. Точка B перетину прямої b з площиною β' належить кривій другого порядку ω_1', по якій β' перетинає задану поверхню. Пучку площин $b(\mu)$ в'язки S, що проходить через пряму b, корелятивно відповідає в площині β' пучок прямих $S'(m')$. Пучок площин $b(\mu)$ перетинає площину β' по пучку прямих $B(m)$. Пучок $B(m)$ проективний пучку $S'(m')$, а тому точки перетину відповідних прямих цих пучків належать кривій ω_1'. Побудувавши так п'ять точок кривої ω_1', можемо знайти точки перетину прямої a_1 з кривою ω_1', які будуть шуканими.

Змінюючи положення прямої a_1 в площині α в положення a_2, a_3, побудуємо їм відповідні криві ω_2', ω_3'. Точки перетину прямих a_1, a_2, a_3 з кривими ω_1', ω_2', ω_3' визначають шість точок кривої (другого порядку) перетину площини α з заданою поверхнею. Але всі проміжні побудови є можливими, що й доводить можливість виконання операції 22.

Операція 24 може бути виконана, тому що вона є проміжною ланкою побудов операції 22.

Отже, на основі того, що всяка конструктивна задача другого порядку зводиться до виконання операції 8, що можливе на основі прийнятих аксіом, має місце таке твердження:

Теорема. Всяка конструктивна задача другого порядку в просторі може бути розв'язана за допомогою площинографа і сферографа.

Прийнята система аксіом є *повною,* тому що даній реалізації об'єктів, які ми одержуємо на основі аксіом 1—3 і називаємо елементами побудови, може бути однозначно поставлена у відповідність арифметична реалізація. Ця відповідність між об'єктами цих обох реалізацій є взаємно однозначною, а самі реалізації — ізоморфними, з чого й випливає повнота системи аксіом 1—3.

Дана система аксіом є *незалежною.* Справді, як було сказано, аксіома 3 не залежить від аксіом приладів, які в свою чергу не залежать від аксіоми 3, тому що аксіома 3 не вимагає можливості ніяких побудов. Аксіоми приладів не залежні, тому що прилади побудови не можуть замінити одне одного.

Несуперечливість прийнятої системи аксіом випливає з несуперечливості її арифметичної реалізації. Отже, прийнята аксіоматика задовольняє вимоги, які ставляться до всякої системи аксіом.

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. Ф. Четверухин. Изображение фигур в курсе геометрии. М., 1958.
2. Н. Ф. Четверухин. Проективная геометрия. М., 1953.
3. Г. Л. Буймола. Некоторые вопросы теории геометрических построений в n-мерном евклидовом пространстве. Тезисы докладов второй Всесоюзной геометрической конференции. Харьков, 1964.
4. А. Адлер. Теория геометрических построений. Л., 1940.

А. И. ПИЛИПОВИЧ

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЯХ В ПРОСТРАНСТВЕ

(резюме)

Рассматривается вопрос о решении задачи второго порядка в трьохмерном евклидовом пространстве с помощью плоскографа и сферографа на основе принятых аксиом.