ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1965 *Серія механіко-математична* *Випуск 2*

М. М. ШЕРЕМЕТА

ПРО ЗВ'ЯЗОК МІЖ РОСТОМ ФУНКЦІЇ, АНАЛІТИЧНОЇ В КРУЗІ, І МОДУЛЯМИ КОЕФІЦІЄНТІВ ЇЇ РЯДУ ТЕЙЛОРА

Нехай функція $f(z)$ аналітична в крузі $|z|<1$ і має принаймні одну особливу точку на $|z|=1$. Запишемо ряд Тейлора для функції $f(z)$:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{1}$$

Ріст функції $f(z)$ будемо виміряти за допомогою функції $M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$, $0<n<1$. Вивченню зв'язку між ростом $M(r)$ і коефіцієнтами a_n присвячено велику кількість робіт [1—7]. Зауважимо, що деякі результати в цьому напрямі неодноразово перевідкривались, наприклад, результат Ж. Валірона [2] пізніше незалежно доводився в [3, 7, 8]. Переважно ріст функції $f(z)$ виміряють за допомогою величин:

$$\rho_1=\overline{\lim_{r\to 1}}\frac{\ln M(r)}{-\ln(1-r)}, \text{ або } \rho_2=\overline{\lim_{r\to 1}}\frac{\ln\ln M(r)}{-\ln(1-r)}.$$

Сюн Цзін-лай [5] і Г. А. Фрідман [6] використовували більш досконалу шкалу росту, порівнюючи деякі ітерації логарифма від $M(r)$ з певними функціями $U\left(\frac{1}{1-r}\right)$. В даній роботі ми подаємо декілька нових теорем, в яких порівнюється ріст різних функцій від $M(r)$ і від $\frac{1}{1-r}$. Наші теореми стосуються переважно до функцій, для яких $\rho_1=\rho_2=\infty$.

Ми будемо використовувати функції з класу Λ, який визначається так. Скажемо, що додатна функція $\alpha(x)$, визначена на (a,∞), належить до класу Λ, якщо вона диференційована на (a,∞), строго монотонно зростає на (a,∞), при $x\to\infty$ прямує до ∞ і є повільно зростаючою функцією [9], тобто для всіх c, $0<c<\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(cx)}{\alpha(x)}=1,$$

причому прямування до границі рівномірне відносно c, $0<c_1\leqslant c\leqslant c_2<\infty$. Будемо вважати, що $\alpha(\infty)=\infty$.

Через $\ln_k x$ будемо позначати k-у ітерацію логарифма: $\ln_1 x=\ln x$ $\ln_k x=\ln\ln_{k-1}x$, $k\geqslant 2$. За означенням $\ln^+ x=\ln x$ при $x\geqslant 1$ і $\ln^+ x=0$ при $x<1$, $\ln_k^+ x$ — k-а ітерація від $\ln^+ x$. Через $\exp_k x$ позначимо k-у ітерацію $\exp x$. У нас будуть зустрічатися значення функції в точках, де функція не визначена. Тоді приписуємо функції значення 1. Будемо вважати, що $\frac{1}{0}=\infty$. Зауважимо що, степеневий ряд (1) має радіус збіжності 1, тому

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=1 \quad \text{і} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\ln^+|a_n|}{n}=0.$$

1. Доведемо таку теорему:

Теорема 1. Нехай $\alpha(x)\in\Lambda$, $\beta(x)\in\Lambda$. Позначимо через $F(x;c)$ функцію: $F(x;c)=\beta^{-1}(c\alpha(x))$, $0<c<\infty$. Припустимо, що для всіх c, $0<c<\infty$ виконується

a) $$\alpha\left[\frac{x}{F(x;c)}\right]=\alpha(x)(1+o(1)) \text{ при } x\to\infty;$$

b) $$\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{d\ln F(x;c)}{d\ln x}<1.$$

Тоді справджується рівність

$$\overline{\lim_{r\to1}}\frac{\alpha(\ln M(r))}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\alpha(n)}{\beta\left(\frac{n}{\ln^+|a_n|}\right)}. \tag{2}$$

Зауважимо, що за функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ можна взяти $\alpha(x)=\ln_{k+i}x$, $i\geqslant1$, $\beta(x)=\ln_k x$, $k\geqslant2$. Легко бачити, що вони задовольняють умови теореми 1.

Перейдемо до доведення теореми. Нехай

$$\overline{\lim_{r\to1}}\frac{\alpha(\ln M(r))}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)}=c.$$

Припустимо, що $c<\infty$. Для довільного $\varepsilon>0$, починаючи з деякого $r=r_0(\varepsilon)$, виконується нерівність

$$\frac{\alpha(\ln M(r))}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)}\leqslant c+\varepsilon=\rho, \text{ або } M(r)\leqslant\exp\left\{\alpha^{-1}\left[\rho\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)\right]\right\}.$$

Використовуючи формулу Коші, одержуємо

$$|a_n|\leqslant r^{-n}M(r)\leqslant r^{-n}\exp\left\{\alpha^{-1}\left[\rho\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)\right]\right\}. \tag{3}$$

Обираємо $r=r(n)$ так, щоб

$$\frac{1}{1-r}=F\left[\frac{n}{F\left(n;\frac{1}{\rho}\right)};\ \frac{1}{\rho}\right]. \tag{4}$$

З (4) і умови а) видно, що $r(n)$ визначене для всіх достатньо великих n і при $n\geqslant n_0(\varepsilon)$ виконується $r\geqslant r_0(\varepsilon)$. Підставимо $r=r(n)$ в (3), тоді

$$|a_n|\leqslant\left\{1-\frac{1}{F\left[\frac{n}{F\left(n;\frac{1}{\rho}\right)};\ \frac{1}{\rho}\right]}\right\}^{-n}\cdot\exp\left\{\frac{n}{F\left(n;\frac{1}{\rho}\right)}\right\}.$$

З умови а) бачимо, що нерівність

$$\left\{1-\frac{1}{F\left[\frac{n}{F\left(n;\frac{1}{\rho}\right)};\frac{1}{\rho}\right]}\right\}^{-n}\leqslant\exp\left\{\frac{n\ln 3}{F\left(n;\frac{1+o(1)}{\rho}\right)}\right\}$$

виконується для всіх n, починаючи з деякого $n=N_0$. Тоді при $n\geqslant\max(n_0(\varepsilon), N_0)$ одержимо

$$|a_n|\leqslant\exp\left\{\frac{2n\ln 3}{F\left(n;\frac{1+o(1)}{\rho}\right)}\right\}\quad\text{і}\quad\frac{\alpha(n)(1+o(1))}{\beta\left(2\ln 3\frac{n}{\ln^+|a_n|}\right)}\leqslant\rho.$$

Починаючи з деякого $n=n_2\geqslant\max(n_0(\varepsilon), N_0)$, маємо (за означенням повільно зростаючої функції): $\alpha(n)\leqslant(\rho+\varepsilon)\beta\left(\frac{n}{\ln^+|a_n|}\right)=(c+2\varepsilon)\beta\left(\frac{n}{\ln^+|a_n|}\right)$.
Спрямовуючи $n\to\infty$, потім $\varepsilon\to 0$, одержуємо

$$\varlimsup_{r\to 1}\frac{\alpha(\ln M(r))}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)}=c\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\alpha(n)}{\beta\left(\frac{n}{\ln^+|a_n|}\right)}.\tag{5}$$

Для $c=\infty$ ця нерівність тривіальна. Тепер доведемо обернену нерівність. Нехай

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\alpha(n)}{\beta\left(\frac{n}{\ln^+|a_n|}\right)}=c.$$

Припустимо, що $c<\infty$. Для довільного $\varepsilon>0$ існує таке $N_0(\varepsilon)$, що при $n\geqslant N_0(\varepsilon)$ виконується

$$\alpha(n)\leqslant\rho\beta\left(\frac{n}{\ln^+|a_n|}\right),$$

де $\rho=c+\varepsilon$, або

$$|a_n|\leqslant\exp\left\{\frac{n}{F\left(n;\frac{1}{\rho}\right)}\right\}.$$

Нерівність

$$\sqrt[n]{|a_n|r^n}\leqslant\exp\left\{\frac{1}{F\left(n;\frac{1}{\rho}\right)}\right\}\cdot r\leqslant r^{1/2}\tag{6}$$

виконується для всіх $n\geqslant n_0(r)\geqslant N_0(\varepsilon)$. Тоді

$$\sum_{n=n_0(r)+1}^{\infty}|a_n|r^n\leqslant\sum_{n=n_0(r)+1}^{\infty}r^{\frac{n}{2}}<\frac{2}{1-r}.\tag{7}$$

Виразимо $n_0(r)$ через r. З нерівності (6) маємо

$$\left[F\left(n;\frac{1}{\rho}\right)\right]^{-1}\leqslant-\frac{1}{2}\ln r.$$

Використовуючи співвідношення

$$\frac{1}{-\ln r} \sim \frac{1}{1-r} \quad \text{при } r \to 1, \tag{8}$$

маємо

$$F\left(n: \frac{1}{\rho}\right) \geqslant \frac{2(1+o(1))}{1-r} \quad \text{і} \quad n \geqslant \alpha^{-1}\left\{\rho\beta\left[\frac{2(1+o(1))}{1-r}\right]\right\},$$

тобто за $n_0(r)$ можна взяти при $r \geqslant r_0$

$$n_0(r) = E\left[\alpha^{-1}\left\{\rho\beta\left[\frac{2(1+o(1))}{1-r}\right]\right\}\right]. \tag{9}$$

Далі, функція $\varphi(x) = x\left[F\left(x; \frac{1}{\rho}\right)\right]^{-1}$ має при $x \geqslant x_1$ в силу умови в) додатну похідну. Отже, $n\left[F\left(n; \frac{1}{\rho}\right)\right]^{-1}$ монотонно зростає з ростом n, починаючи з деякого $n = n_1$. Нехай $N = \max(N_0(\varepsilon), n_1)$. Тепер

$$M(r) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n = \sum_{n=0}^{N} |a_n| r^n + \sum_{n=N+1}^{n_0(r)} |a_n| r_n + \sum_{n=n_0(r)+1}^{\infty} |a_n| r^n \leqslant$$

$$\leqslant B + n_0(r) \cdot \max_{N+1 \leqslant n \leqslant n_0(r)} |a_n| + \frac{2}{1-r},$$

де B — стала величина. Оцінимо

$$\max_{N+1 \leqslant n \leqslant n_0(r)} |a_n| \leqslant \max_{N+1 \leqslant n \leqslant n_0(r)} \left\{\exp\left[\frac{n}{F\left(n; \frac{1}{\rho}\right)}\right]\right\} \leqslant \exp\left\{\frac{n_0(r)}{F\left(n_0(r); \frac{1}{\rho}\right)}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{\alpha^{-1}\left[\rho\beta\left(\frac{2(1+o(1))}{1-r}\right)\right]\right\}.$$

З умови а) маємо при $x > x_0$, що $F(x; c) < x$, звідки $x < \alpha^{-1}\left(\frac{1}{c}\beta(x)\right)$ і це виконується для всіх c, $0 < c < \infty$. Отже, $\frac{2}{1-r} < \alpha^{-1}\left[\rho\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)\right]$ і справедлива нерівність

$$M(r) \leqslant B + \exp\left\{\alpha^{-1}\left[\rho\beta\left(\frac{2(1+o(1))}{1-r}\right)\right]\right\}\alpha^{-1}\left[\rho\beta\left(\frac{2(1+o(1))}{1-r}\right)\right] +$$

$$+ \frac{2}{1-r} \leqslant \exp\left\{(1+o(1))\,\alpha^{-1}\left[\rho\beta\left(\frac{2(1+o(1))}{1-r}\right)\right]\right\}. \tag{10}$$

Використовуючи означення повільно зростаючої функції і спрямовуючи $r \to 1$, а потім $\varepsilon \to 0$, з нерівності (10) одержуємо

$$\overline{\lim_{r\to 1}} \frac{\alpha(\ln M(r))}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)} \leqslant c = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\alpha(n)}{\beta\left(\frac{n}{\ln^+ |a_n|}\right)}. \tag{11}$$

Для $c = \infty$ нерівність (11) тривіальна. Порівнюючи (5) і (11), одержуємо рівність (2).

2. Нехай тепер $\alpha(x) \in \Lambda$ і для всіх σ, $0<\sigma<1$, виконується

a) $$\alpha\left[\frac{x}{\Phi(x;\sigma)}\right]=\alpha(x)(1+o(1) \text{ при } x\to\infty;$$

b) $$\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{d\ln\Phi(x;\sigma)}{d\ln x}<1;$$

c) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(\ln x)}{\alpha(x)}=0,$$

де $\Phi(x;\sigma)=\alpha^{-1}(\sigma\alpha(x))$.
Позначимо далі

$$p=\overline{\lim_{r\to1}}\frac{\alpha(\ln M(r))}{\alpha\left(\frac{1}{1-r}\right)};\quad q=\overline{\lim_{n-\infty}}\frac{\alpha(n)}{\alpha\left(\frac{n}{\ln^{+}|a_n|}\right)}. \tag{12}$$

Легко перевірити, що умови а), в), с) задовольняє $\alpha(x)=\ln_k^{+}x$, $k\geqslant 2$.

Теорема 2. Якщо $q<1$, то $p=0$.

Для всіх $n\geqslant N_2$ виконується $\alpha(n)\leqslant\alpha\left(\frac{n}{\ln^{+}|a_n|}\right)$ і $|a_n|\leqslant e$. Очевидно, що

$$M(r)\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n=\sum_{n=0}^{N_2}|a_n|r^n+\sum_{n=N_2+1}^{\infty}|a_n|r^n\leqslant$$

$$\leqslant B+e\sum_{n=N_2+1}^{\infty}r^n=O(1)+\frac{e}{1-r}$$

і

$$p\leqslant\overline{\lim_{r\to1}}\frac{\alpha\left[\ln\left(O(1)+\frac{e}{1-r}\right)\right]}{\alpha\left(\frac{1}{1-r}\right)}=0.$$

Теорема 3. Якщо $p\geqslant 1$, то $q=p$.

Для довільного $\varepsilon>0$ з (12), починаючи з деякого $r=r_0(\varepsilon)$, виконується

$$\frac{\alpha(\ln M(r))}{\alpha\left(\frac{1}{1-r}\right)}\leqslant p+\varepsilon=\rho,\quad \rho>1 \text{ і } M(r)\leqslant\exp\left[\Phi\left(\frac{1}{1-r};\rho\right)\right].$$

Використовуючи нерівність Коші, одержуємо

$$|a_n|\leqslant r^{-n}M(r)\leqslant r^{-n}\exp\left[\Phi\left(\frac{1}{1-r};\rho\right)\right].$$

Обираємо $r=r(n)$, так, щоб

$$\frac{1}{1-r}=\Phi\left[\frac{n}{\Phi\left(n;\frac{1}{\rho}\right)};\frac{1}{\rho}\right].$$

За умовою а) при $0<\frac{1}{\rho}<1$ при $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ виконується $r \geqslant r_0(\varepsilon)$. Підставимо $r=r(n)$ в останню нерівність:

$$|a_n| \leqslant \left\{1-\frac{1}{\Phi\left[\frac{n}{\Phi\left(n;\ \frac{1}{\rho}\right)};\ \frac{1}{\rho}\right]}\right\}^{-n} \exp\left\{\frac{n}{\Phi\left(n;\ \frac{1}{\rho}\right)}\right\}.$$

В силу умови а) з останньої нерівності маємо, як і при доведенні теореми 1, нерівність:

$$|a_n| \leqslant \exp\left\{\frac{2n \ln 3}{\Phi\left(n;\ \frac{1+o(1)}{\rho}\right)}\right\} \tag{13}$$

для всіх n, починаючи з деякого $n \geqslant N_0 \geqslant n_0(\varepsilon)$. З нерівності (13) одержуємо так само, як раніше одержали нерівність (5), нерівність

$$q=\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha(n)}{\alpha\left(\frac{n}{\ln^+|a_n|}\right)} \leqslant p. \tag{14}$$

Перш ніж доводити обернену нерівність, зауважимо, що за теоремою 2 маємо, що якщо $p \geqslant 1$, то $q \geqslant 1$. З рівності (12) для довільного $\varepsilon>0$ маємо $\alpha(n) \leqslant \rho\alpha\left(\frac{n}{\ln^+|a_n|}\right)$, де $\rho=q+\varepsilon$, для всіх n, починаючи з деякого $n=N_0(\varepsilon)$, і $|a_n| \leqslant \exp\left\{\frac{n}{\Phi\left(n;\ \frac{1}{\rho}\right)}\right\}$. Нерівність

$$\sqrt[n]{|a_n| r^n} \leqslant r \exp\left\{\frac{1}{\Phi\left(n;\ \frac{1}{\rho}\right)}\right\} \leqslant r^{1/2} \tag{15}$$

виконується для всіх $n \geqslant n_0(r) \geqslant N_0(\varepsilon)$. Тоді виконується нерівність (7). Як і при виводі формули (9), одержуємо, що за $n_0(r)$ можна взяти при $r \geqslant r_0$

$$n_0(r)=E\left[\Phi\left(\frac{2(1+o(1))}{1-r};\ \rho\right)\right]. \tag{16}$$

Далі, як і при виводі нерівності (10), одержуємо

$$M(r) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \leqslant B+\exp\left\{\Phi\left[\frac{2(1+o(1))}{1-r};\ \rho\right]\right\} \times$$
$$\times \Phi\left[\frac{2(1+o(1))}{1-r};\ \rho\right] \leqslant \exp\left\{(1+o(1))\, \Phi\left[\frac{2(1+o(1))}{1-r};\ \rho\right]\right\}. \tag{17}$$

З (17) знаходимо

$$p=\varlimsup_{r\to 1} \frac{\alpha(\ln M(r))}{\alpha\left(\frac{1}{1-r}\right)} \leqslant q. \tag{18}$$

Порівнюючи нерівності (14) і (18), приходимо до рівності $p=q$.

Теорема 4. Нехай функція $\alpha(x)$ задовольняє додаткову умову d) $\frac{\alpha(x)}{\alpha(x^\sigma)} \to 1$ при $x \to \infty$ для всіх σ, $0 < \sigma < \frac{1}{2}$. Тоді, якщо $0 \leqslant p < 1$, то $q \leqslant 1$.

Дійсно, з (12) маємо при $r \geqslant r_0$, що $\alpha(\ln M(r)) \leqslant \alpha\left(\frac{1}{1-r}\right)$ і $M(r) \leqslant \leqslant \exp\left(\frac{1}{1-r}\right)$. Тоді

$$\rho_2 = \overline{\lim_{r \to 1}} \frac{\ln \ln M(r)}{-\ln(1-r)} \leqslant 1.$$

В цьому випадку має місце формула [2]

$$\frac{\rho_2}{\rho_2+1} = \alpha_2 = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\ln^+ \ln^+ |a_n|}{\ln \ln}. \tag{19}$$

Очевидно, що $\alpha_2 \leqslant \frac{1}{2}$, бо $\rho_2 \leqslant 1$. Отже, для $\varepsilon = \frac{1}{2} - \sigma$ при $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ маємо

$$|a_n| \leqslant \exp\{n^{1/2+\varepsilon}\} = \exp\{n^{1-\sigma}\}.$$

Тоді в силу умови а) одержуємо

$$q \leqslant \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\alpha(n)}{\alpha(n^\sigma)} = 1. \tag{20}$$

Теорема доведена. Нерівність $q \leqslant 1$ в загальному випадку покращити не можна, на що вказує:

Приклад 1. Нехай $f(z) = \left(\frac{1}{1-z}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$; $\alpha(x) = \ln_k^+ x$, $k \geqslant 2$. Тоді $M(r) = \left(\frac{1}{1-r}\right)^2$; $|a_n| = n+1$. Легко бачити, що $p = 0$, а $q = 1$.

Теорема 5. Нехай $\alpha(x) \in \Lambda$, $\Phi(x; \sigma) = \alpha^{-1}(\sigma\alpha(x))$, а функція $\varphi(x) = = x[\Phi(\ln x; \sigma)]^{-1}$ монотонно прямує до ∞ при $x \to \infty$ для всіх σ, $1 < \sigma < \infty$. Тоді, якщо $\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\alpha(\ln^+ |a_n|)}{\alpha(\ln n)} \geqslant 1$, то справедлива рівність

$$\overline{\lim_{r \to 1}} \frac{\alpha(\ln M(r))}{\alpha\left(\ln \frac{1}{1-r}\right)} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\alpha(\ln^+ |a_n|)}{\alpha(\ln n)}.$$

Передусім зауважимо, що умови теореми задовольняє функція $\alpha(x) = \ln_k^+ x$, $k \geqslant 1$. Нехай тепер

$$\overline{\lim_{r \to 1}} \frac{\alpha(\ln M(r))}{\alpha\left(\ln \frac{1}{1-r}\right)} = c.$$

Припустимо, що $c < \infty$. Для довільного $\varepsilon > 0$ і при $r \geqslant r_0(\varepsilon)$ маємо

$$\frac{\alpha(\ln M(r))}{\alpha\left(\ln \frac{1}{1-r}\right)} \leqslant c + \varepsilon = \rho \quad \text{і} \quad M(r) \leqslant \exp\left[\Phi\left(\ln \frac{1}{1-r}; \rho\right)\right].$$

Використовуючи нерівність Коші, одержуємо

$$|a_n| \leqslant r^{-n} \exp\left[\Phi\left(\ln \frac{1}{1-r}; \rho\right)\right].$$

Обираємо $r=r(n)$ так, щоб $(1-r)^{-1}=n$ і підставляємо в останню нерівність:

$$|a_n|\leqslant\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\exp[\Phi(\ln n;\rho)]\leqslant 3\exp[\Phi(\ln n;\rho)]$$

для всіх $n\geqslant N_0(\varepsilon)$. Звідси $\alpha(\ln^+|a_n|-\ln 3)\leqslant\rho\alpha(\ln n)$.
Проводячи ті ж самі міркування, що й раніше, одержуємо

$$d=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\alpha(\ln^+|a_n|)}{\alpha(\ln n)}\leqslant c=\overline{\lim_{r\to 1}}\frac{\alpha(\ln M(r))}{\alpha\left(\ln\frac{1}{1-r}\right)}. \tag{21}$$

При $c=\infty$ нерівність (21) тривіальна. Нехай тепер

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\alpha(\ln^+|a_n|)}{\alpha(\ln n)}=d\geqslant 1. \tag{22}$$

Припустимо, що $d<\infty$. Тоді для довільного $\varepsilon>0$ і для всіх $n\geqslant N(\varepsilon)$ одержуємо $\alpha(\ln^+(a_n))\leqslant q\,\alpha(\ln n)$, де $q=d+\varepsilon>1$, $|a_n|\leqslant\exp[\Phi(\ln n;\ q)]$. Нерівність

$$\sqrt[n]{|a_n|r^n}\leqslant r\exp\left[\frac{\Phi(\ln n;q)}{n}\right]\leqslant r^{1/2} \tag{23}$$

виконується для всіх n, починаючи з $n=n_0(r)$, бо за умовою теореми $x[\Phi(\ln x;\sigma)]^{-1}$ при $x\to\infty$ прямує до ∞. Тоді виконується (7).

Виразимо $n_0(r)$ через r. З нерівності (23) одержимо $2\Phi(\ln n;q)\geqslant\leqslant -n\ln r$. Використовуючи співвідношення (8), маємо

$$n[\Phi(\ln n;q)]^{-1}\geqslant\frac{2(1+o(1))}{1-r}.$$

Оскільки $n[\Phi(\ln n;q)]^{-1}$ монотонно прямує до ∞ при $n\to\infty$, то, як легко перевірити, остання нерівність виконується при

$$n\geqslant\Phi\left[\ln\frac{2(1+o(1))}{1-r};\ 2q\right]\frac{2(1+o(1))}{1-r}$$

і при r досить близьких до 1, тобто за $n_0(r)$ можна взяти

$$n_0(r)=E\left\{\frac{2(1+o(1))}{1-r}\Phi\left[\ln\frac{2(1+o(1))}{1-r};\ 2q\right]\right\}.$$

Тепер

$$M(r)\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n\leqslant B+n_0(r)\max_{N(\varepsilon)+1\leqslant n\leqslant n_0(r)}|a_n|+\frac{2}{1-r}.$$

Далі, як і раніше, знаходимо, що

$$\max_{N(\varepsilon)+1\leqslant n\leqslant n_0(r)}|a_n|\leqslant\exp\left\{\Phi\left[(1+o(1))\ln\frac{1}{1-r};\ q\right]\right\}.$$

Отже, враховуючи, що $q>1$, одержуємо

$$M(r)\leqslant[1+o(1)]\exp\left[\Phi\left((1+o(1))\ln\frac{1}{1-r};\ q\right)\right]. \tag{24}$$

Звідси, як і раніше, маємо

$$c=\overline{\lim_{r\to 1}}\frac{\alpha(\ln M(r))}{\alpha\left(\ln\frac{1}{1-r}\right)}\leqslant d=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\alpha(\ln^{+}|a_n|)}{\alpha(\ln n)}. \tag{25}$$

При $d=\infty$ нерівність (25) тривіальна. Порівнюючи (21) і (25), приходимо до рівності $c=d$. Теорема доведена.

Зауважимо, що нерівність (21) передусім виконується для довільних c і d. Якщо $d<1$, то для $n\geqslant N$ маємо: $|a_n|\leqslant n$. Тоді

$$M(r)\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n=\sum_{n=0}^{N}|a_n|r^n+\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|r^n\leqslant O(1)+\left(\frac{1}{1-r}\right)^2$$

і

$$c\leqslant\overline{\lim_{r\to 1}}\frac{\alpha\left(\ln\left[O(1)+\left(\frac{1}{1-r}\right)^2\right]\right)}{\alpha\left(\ln\frac{1}{1-r}\right)}=1. \tag{26}$$

В силу (21) одержуємо, що при $d<1$ викнується $d\leqslant c\leqslant 1$. В нерівності (26) оцінки для випадку $\alpha(x)=\ln_k^{+}x$ не можуть бути кращими, як показують наступні приклади.

Приклад 2. Нехай $f(z)=\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$, $\alpha(x)=\ln^{+}x$. Тоді $M(r)=$ $=\frac{1}{1-r}$; $a_n=1$. Легко бачити, що $d=0$, а $c=1$.

Приклад 3. Нехай $f(z)=\ln\frac{1}{1-z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$, $\alpha(x)=\ln^{+}x$. Тоді $M(r)=$ $=\ln\frac{1}{1-r}$, $a_n=\frac{1}{n}$. Легко бачити, що $d=c=0$.

Автор висловлює щиру подяку А. А. Гольдбергу за уважне керівництво і Г. А. Фрідману за повідомлення про результати своєї дисертації.

ЛІТЕРАТУРА

1. J. Hadamard. Essai sur l'étude des fonctions données par leur developpement de Taylor. J. math. pures et appl., **8** (1892).
2. G. Valiron. Sur la croissance du module maximum des séries entiéres. Bull. Soc. math. France, **44** (1916).
3. F. Beuermann. Wachstumsordnung, Koeffizientenwachstum und Nullstellendichte bei Potenzreihen mit endlichem Konvergenzkreis. Math. Zeitschr., **33** (1931).
4. M. Fujiwara. On the relation between $M(r)$ and the coefficients of a power series. Proc. Imp. Acad. Japan, **8** (1932).
5. Hiong King—Lai. Sur la croissance des fonctions entiéres d'ordre infini définies par un développement de Taylor. C. r. Acad. sci., **198** (1934).
6. Г. А. Фридман. Зависимость роста модуля аналитической функции от роста модуля коэффициентов ее степенного разложения. Канд. диссертация, М., 1951.
7. Н. В. Говоров. О связи между ростом функции, аналитической в круге, и коэффициентами ее степенного разложения. Тр. Новочерк. политехн. ин-та, **100**, 1959.
8. G. R. Maclane. Asymptotic values of holomorplic functions. Rice university studies, **49**, № 1 (1963).
9. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. Гостехиздат, М., 1956.

М. М. ШЕРЕМЕТА

О СВЯЗИ МЕЖДУ РОСТОМ ФУНКЦИИ, АНАЛИТИЧЕСКОЙ В КРУГЕ, И МОДУЛЯМИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЕЕ РЯДА ТЕЙЛОРА

(резюме)

Пусть $f(z)$ аналитическая в круге $|z|<1$ функция и имеет на $|z|=1$ хотя бы одну особую точку. В настоящей работе дается зависимость между ростом $M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$ и модулями коэффициентов a_n разложения функции $f(z)$ в ряд Тейлора.