



ЛЬВІВСЬКИЙ ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ім. Ів. ФРАНКА

ВІСНИК

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК 2

1965

ВИДАВНИЦТВО ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК

ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА
ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ім. ІВАНА ФРАНКА

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК 2

ВИДАВНИЦТВО ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
1965

Друкується за рішенням редакційно-видавничої ради
Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка

У збірнику вміщені статті з теорії
функцій, диференціальних рівнянь, геоме-
трії, алгебри, теорії пружності і аероди-
наміки.

Розрахований на наукових працівників.

Редакційна колегія:

Гольдберг А. А., Гриліцький В. Д. (відп. секретар), Кованько О. С.
(відп. редактор), Костенко В. Г., Ліхачов В. О., Соколов І. Г.

О. С. КОВАНЬКО, Л. М. ЛІСЕВИЧ

МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ S^p -МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИМИ ПРАВИМИ ЧАСТИНАМИ

В цій статті розглядаються випадки майже періодичних розв'язків деяких звичайних диференціальних рівнянь з S^p -майже періодичною правою частиною ($p \geq 1$).

І. ДЕЯКІ НЕОБХІДНІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ S^p -МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Означення 1. Величина

$$D_{S_l^p}^E \{f(x), \varphi(x)\} = \sup_{-\infty < x < +\infty} \left\{ \frac{1}{l} \int_{E(x, x+l)} |f(x) - \varphi(x)|^p dx \right\}^{1/p}$$

називається S^p -відстанню, яка відповідає довжині l . Якщо $E = (-\infty < x < +\infty)$, то будемо писати $D_{S_l^p}^E = D_{S_l^p}$.

Означення 2. Вимірна і сумовна разом із своїм p -им степенем ($p \geq 1$) в кожному скінченному інтервалі функція $f(x)$ називається S^p -майже періодичною (S^p -м. п.), якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ і довільного фіксованого числа $l > 0$ існує відносно щільна множина S^p -майже періодів $\tau = \tau(\varepsilon)$ функції $f(x)$, що

$$D_{S_l^p} \{f(x+\tau), f(x)\} < \varepsilon.$$

Властивість 1. S^p -м. п. функція $f(x)$ є S^p -обмежена, тобто існує така стала $A > 0$, що

$$D_{S_l^p} \{f(x), 0\} < A.$$

Властивість 2. Нехай $f(x)$ — S^p -м.п. функція і

$$f_h(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt, \quad (h > 0).$$

Тоді $f_h(x)$ є м.п. функція Бора і

$$\lim_{h \rightarrow 0} D_{S_l^p} \{f(x), f_h(x)\} = 0.$$

Властивість 3. Якщо послідовність $\{f_n(x)\}$ S^p -м.п. функцій збіжна в метриці S^p до функції $f(x)$, то $f(x)$ є також S^p -м.п. функція.

II. ТЕОРЕМА ПРО НЕОЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ S^p-МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

Теорема II.1. Якщо $f(x)$ S^p-м. п. функція і неозначений інтеграл

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

S^p-обмежений, то $F(x)$ — м. п. функція Бора.

Доведення. Маємо

$$F_h(x) = \int_0^x f_h(t) dt = \frac{1}{h} \int_0^h ds \int_s^{x+s} f(t) dt = \frac{1}{h} \int_0^h [F(x+s) - F(s)] ds.$$

На основі нерівностей Гельдера і Мінковського

$$\begin{aligned} |F_h(x)| &\leq \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h |F(x+s) - F(s)|^p ds \right\}^{1/p} \leq \\ &\leq \left\{ \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |F(s)|^p ds \right\}^{1/p} + \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h |F(s)|^p ds \right\}^{1/p}. \end{aligned}$$

Тому що $F(x)$ є S^p-обмежена функція, з останньої нерівності випливає обмеженість функції $F_h(x)$ для всіх $|h| > 0$. Тоді за відомою теоремою Бора $F_h(x)$ є м. п. функція Бора як обмежений неозначений інтеграл від м. п. функції Бора $f_h(x)$.

Далі маємо

$$\begin{aligned} F_h(x) &= \frac{1}{h} \int_0^h ds \int_s^{x+s} f(t) dt = \frac{1}{h} \int_0^h \left[\left(\int_s^0 + \int_0^x + \int_x^{x+s} \right) f(t) dt \right] ds = \\ &= F(x) + \frac{1}{h} \int_0^h \left[\int_x^{x+s} f(t) dt - \int_0^s f(t) dt \right] ds. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} |F(x) - F_h(x)| &\leq \frac{1}{h} \int_0^h \left[\int_0^s |f(x+t) - f(t)| dt \right] ds \leq \\ &\leq \frac{1}{h} \int_0^h \left[\int_0^h |f(x+t)| dt + \int_0^h |f(t)| dt \right] ds = \int_0^h |f(x+t)| dt + \int_0^h |f(t)| dt. \end{aligned}$$

Але, як відомо, останні інтеграли є рівномірно абсолютно неперервні функції на довільній множині E дійсної осі Ox , тому вони прямують до нуля, якщо $h \rightarrow 0$. Отже, яке б не було число $\varepsilon > 0$, існує таке число $\delta > 0$, що якщо $|h| < \delta$, то

$$|F_h(x) - F(x)| < \varepsilon,$$

тобто $F(x)$ є м. п. функція Бора як рівномірна границя м. п. функцій $F_h(x)$. Теорема доведена.

Примітка. Теорема II.1. була доведена нами раніше [5] іншим, більш складним методом.

**III. МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗВИЧАЙНИХ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ
З S^p -МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ**

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} + ay = f(x), \quad (\text{III.1})$$

де $f(x)$ — дійсна S^p -м. п. функція, a — комплексна стала ($a = \alpha + \beta i$).

Теорема III.1. Якщо $f(x)$ — S^p -м. п. функція, неозначений інтеграл якої S^p обмежений, то S^p -обмежений розв'язок рівняння (III.1) є м. п. функція Бора.

Доведення. а. Нехай $\alpha > 0$. S^p -обмежений розв'язок рівняння (III.1), як легко бачити, можна записати у вигляді

$$y = e^{-ax} \int_{-\infty}^x e^{at} f(t) dt \quad (\text{III.2})$$

(невласний інтеграл (III.2) існує).

Доведемо майже періодичність розв'язку рівняння (III.1). На основі теореми II.1

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

є м. п. функція Бора. Задамося числом $\varepsilon > 0$ і нехай $\tau = \tau\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ є S^p -майже період функції $F(x)$. Тоді, використовуючи другу теорему про середнє значення, маємо

$$\begin{aligned} |y(x+\tau) - y(x)| &= \left| e^{-ax} \int_{-\infty}^x e^{at} [f(x+\tau) - f(t)] dt \right| = \\ &= \lim_{z \rightarrow -\infty} \left| e^{-ax} \int_z^x e^{at} [f(t+\tau) - f(t)] dt \right| = \\ &= \lim_{z \rightarrow -\infty} \left| e^{-ax} \left\{ e^{az} \int_z^\Theta [f(t+\tau) - f(t)] dt + e^{ax} \int_\Theta^x [f(t+\tau) - f(t)] dt \right\} \right| \leq \\ &\leq \lim_{z \rightarrow -\infty} |e^{a(z-x)}| \cdot [|F(\Theta+\tau) - F(\Theta)| + |F(z+\tau) - F(z)|] + \\ &\quad + |F(x+\tau) - F(x)| + |F(\Theta+\tau) - F(\Theta)| \leq \\ &\leq \lim_{z \rightarrow -\infty} |e^{a(z-x)}| \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \right) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad (z < \Theta < x). \end{aligned}$$

Отже,

$$|y(x+\tau) - y(x)| < \varepsilon,$$

що доводить майже періодичність за Бором розв'язку $y(x)$.

Аналогічно доводиться теорема, якщо $\alpha < 0$, тільки в цьому випадку S^p -обмежений розв'язок рівняння (III.1) запишеться у вигляді

$$y = e^{-\alpha x} \int_x^{+\infty} e^{\alpha t} f(t) dt.$$

б. Нехай $a = \beta i$. Легко переконатися, що S^p -обмежений розв'язок рівняння (III.1) в цьому випадку запишеться як

$$y = e^{-i\beta x} \int_0^x e^{i\beta t} f(t) dt.$$

Очевидно, це буде тоді, коли інтеграл

$$\int_0^x e^{i\beta t} f(t) dt \quad (III.3)$$

S^p -обмежений. Але функція $e^{i\beta t} f(t)$ є S^p -м. п., отже, інтеграл (III.3) є м. п. функція Бора. Теорема доведена.

Теорема III.1 легко переноситься на випадок неоднорідного лінійного диференціального рівняння n -го порядку:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = f(x), \quad (III.4)$$

де $a_1, a_2, \dots, a_n$ — сталі числа, $f(x)$ — S^p -м. п. функція.

Теорема III.2. Якщо неозначений інтеграл S^p -м. п. функції $f(x)$ S^p -обмежений, то обмежений розв'язок рівняння (III.4) є м. п. функція Бора.

Використовуючи теорему II.1, доведення теореми III.2 аналогічне доведенню теореми Бора—Нейгебауера [1].

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} + \varphi(x) y = f(x). \quad (III.5)$$

Будемо вважати, що $\varphi(x)$ і $f(x)$ S^p -м. п. функції. Покладемо

$$\begin{aligned} f_h(x) &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt; & \varphi_h(x) &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \varphi(t) dt; \\ F(x) &= \int_{x_0}^x f(t) dt; & \Phi(x) &= \int_{x_0}^x \varphi(t) dt; \\ F_h(x) &= \int_{x_0}^x f_h(t) dt; & \Phi_h(x) &= \int_{x_0}^x \varphi_h(t) dt. \end{aligned}$$

Поряд із рівнянням (III.5) розглянемо рівняння

$$\frac{d\tilde{y}}{dx} + \varphi_h(x) \tilde{y} = f_h(x). \quad (III.6)$$

Теорема III.3. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ задовольняють умови теореми II.1. Тоді, якщо рівняння (III.6) має обмежений розв'язок $\tilde{y}(x)$ і

$$\lim_{h \rightarrow 0} |y(x_0) - \tilde{y}(x_0)| = 0,$$

то рівняння (III.5) має обмежений і майже періодичний за Бором розв'язок.

Д о в е д е н н я. Покладемо

$$z(x) = y(x) - \tilde{y}(x). \quad (\text{III.7})$$

Із (III.5), (III.6) і (III.7) одержуємо

$$\frac{dz}{dx} + \varphi(x)y - \varphi_h(x)\tilde{y} = f(x) - f_h(x),$$

або

$$\frac{dz}{dx} + \varphi(x)z = f(x) - f_h(x) + [\varphi_h(x) - \varphi(x)]\tilde{y}. \quad (\text{III.8})$$

Запишемо рівняння (III.8) в інтегральній формі

$$z(x) = z(x_0) e^{-\int_{x_0}^x \varphi(t) dt} + e^{-\int_{x_0}^x \varphi(t) dt} \int_{x_0}^x \left\{ f(t) - f_h(t) + [\varphi_h(t) - \varphi(t)]\tilde{y}(t) \right\} e^{\int_{x_0}^t \varphi(\xi) d\xi} dt. \quad (\text{III.9})$$

Нехай

$$M = \max \{ e^{-\Phi(x)}, |\tilde{y}(x)| \},$$

тоді із (III.9) одержуємо.

$$\begin{aligned} |z(x)| &\leq M \left\{ |z(x_0)| + \left| \int_{x_0}^x [f(t) - f_h(t)] dt \right| + \left| \int_{x_0}^x [\varphi_h(t) - \varphi(t)] dt \right| \right\} = \\ &= M \{ |z(x_0)| + |F(x) - F_h(x)| + |\Phi_h(x) - \Phi(x)| \}. \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

На основі умов теореми можна вказати такі числа $\varepsilon > 0$ і $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що якщо лише $|h| < \delta$, то

$$|z(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3M}; \quad |F(x) - F_h(x)| < \frac{\varepsilon}{3M};$$

$$|\Phi_h(x) - \Phi(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Тоді із (III.10) одержуємо

$$|z(x)| = |y(x) - \tilde{y}(x)| < \varepsilon.$$

Але, за теоремою Фавара [4], $\tilde{y}(x)$ є м. п. функція Бора, отже, $y(x)$ є також м. п. функція Бора як рівномірна границя м. п. функцій $\tilde{y}(x)$. Теорема доведена.

Розглянемо тепер квазілінійне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(y) + \varphi(x), \quad (\text{III.11})$$

де $f(y)$ — неперервно диференціальна функція, а $\varphi(x)$ S^p -м. п. функція. Будемо вважати, що рівняння (III.11) має обмежений розв'язок $y=y(x)$ для $(-\infty < x < +\infty)$.

Теорема III.4. Якщо $f'(y) \geq 0$ (або $f'(y) \leq 0$) і $\varphi(x)$ — S^p -м. п. функція із S^p -обмеженим неозначеним інтегралом, то всякий обмежений розв'язок рівняння (III.11) є м. п. функція Бора.

Якщо використати теорему II.1, доведення теореми аналогічне доведенню теореми в статті [2].

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. Bohr und O. Neugebauer. Ueber lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und fastperiodischer rechter Seite. Gött. Nachr., 8—22 (1926).
2. Б. П. Демидович. Почти периодичность решения обыкновенного дифференциального уравнения. УМН, VIII, вып. 6 (58), 1953.
3. Б. М. Левитан. Почти периодические функции. М., 1953.
4. J. Favard. Sur les équations différentielles à coefficients presque—periodiques, Acta math., 51, 31—81 (1927).
5. А. С. Кованько и Л. Н. Лисевич. О некоторых свойствах интеграла и производной от S^p -почти периодической функции. Вопросы матем. физики и теории функций, II, 63—69 (1964).

А. С. КОВАНЬКО, Л. Н. ЛИСЕВИЧ

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧНОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С S_p -ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

(резюме)

Исследуется вопрос почти периодичности по Бору решений некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений с почти периодической правой частью в смысле Степанова (S_p -п. п.). Исследование построено на теореме о неопределенном интеграле от почти периодической функции Степанова (S_p -п. п.).

О. М. КОСТОВСЬКИЙ

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ ОСТРОВСЬКОГО ПРО ЛОКАЛІЗАЦІЮ ПО МОДУЛЯМ НУЛІВ РЯДІВ ЛОРАНА

Розглянемо ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} A_v z^v \quad (1)$$

з кільцем збіжності $r < |z| < R$, що має в головній і регулярній частинах нескінченну кількість коефіцієнтів, відмінних від нуля.

Позначимо через

$$\mathfrak{M}_f(z) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} T_v z^v \quad (2)$$

мажоранту Ньютона цього ряду [1]. Тоді, як відомо, $|A_v| \leq T_v$, послідовність числових нахилів $\left\{ R_v = \frac{T_{v-1}}{T_v} \right\}$ є неспадною послідовністю. Відхилення $\left\{ D_v = \frac{R_{v+1}}{R_v} \right\}$ задовольняють нерівності $D_v \geq 1$ ($-\infty < v < \infty$).

Мета цієї статті — дати узагальнення класичної теореми О. Отровського [1].

Теорема 1. (О. Островського). Якщо всі відхилення D_v ($-\infty < v < \infty$) ряду Лорана (1) задовольняють нерівності $D_v > u^2$, де u — додатний корінь рівняння $2 \sum_{v=1}^{\infty} u^{-v^2} = 1$, то функція $f(z)$ має точно один простий корінь в кожному кільці

$$\frac{R_v}{u} < |z| < R_v u$$

і не має нулів зовні цих кіл.

Згідно з умовою теореми всі відхилення $D_v > 1$. Як відомо, в цьому випадку $\mathfrak{M}_f(z) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} T_v z^v \equiv \sum_{v=-\infty}^{\infty} |A_v| z^v = f_{\text{mod}}(z)$. Значить, умови теореми можуть задовольняти тільки ряди Лорана, у яких ряди, складені з модулів коефіцієнтів, є нормальні ряди.

Припустимо, що для індекса k_j виконується нерівність $D_{k_j} > 1$, тоді $|A_{k_j}| = T_{k_j} > 0$, де T_{k_j} — коефіцієнти $\mathfrak{M}_f(z)$. З рівняння $f(z) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} A_v z^v = 0$ одержимо ($|z| = R_k u$)

$$\begin{aligned} 2 &\leq 1 + \sum_{\substack{v=-\infty \\ v \neq k_j}}^{\infty} \left| \frac{A_v}{A_{k_j}} \right| |z|^{v-k_j} \leq 1 + \sum_{\substack{v=-\infty \\ v \neq 0}}^{\infty} \frac{T_{k-v}}{T_{k_j}} (R_k u)^v \leq \\ &\leq \sum_{v=-\infty}^{-1} (D_{k_j-v+1}^{-1} \dots D_{k_j-\alpha}^{v+\alpha} \dots D_{k_j-1}^{v+1}) u^v + 1 + \\ &+ \sum_{v=1}^{\infty} (D_{k_j+1}^{-v+1} \dots D_{k_j+\alpha}^{-v+\alpha} \dots D_{k_j+v-1}^{-1}) \left(\frac{u}{D_k} \right)^v. \end{aligned} \quad (3)$$

Припустимо, що для цілого додатного числа h для послідовності індексів $k_j = k + jh$ ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) мають місце нерівності $D_{k_j} > u^2$, де константа u більша одиниці.

Підставимо замість відхилень D_{k_j} ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) в (3) величини u^2 , а всі останні відхилення замінимо одиницями; в результаті підстановки одержимо нерівність

$$3 < 2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{v=\mu h}^{(\mu+1)h-1} u^{-(2\mu+1)v + h\mu(\mu+1)} = H_{k_j}(u). \quad (4)$$

Неважко перевірити, що

$$H_{k_j}(u) \equiv H_{k_l}(u) \equiv H_k(u). \quad (5)$$

Теорема 2. Нехай відхилення D_{k_j} ряду Лорана (1) задовольняють нерівності

$$D_{k_j} = D_{k+jh} > u_k^2 \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (6)$$

де h — довільне додатне ціле число, а u_k — додатний корінь рівняння

$$H_k(u) = 3. \quad (7)$$

(див. (4), (5)). Тоді функція $f(z)$ має h нулів в кожному кільці

$$\frac{R_{k_j+1}}{u_k} < |z| < R_{k_j+1} u_k \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (8)$$

і не має нулів в кільцях

$$R_{k_j} u_k \leq |z| \leq \frac{R_{k_j+1}}{u_k} \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (9)$$

В (6) можна вимагати виконання нерівності $D_{k_j} \geq u_k^2$, в цьому випадку в (8) треба знаки нерівностей $<$ замінити знаками $\leq$, а в (9), навпаки, знаки нерівностей $\leq$ треба замінити на $<$.

Доведення теореми будемо провадити від супротивного. Припустимо, що функція $f(z)$ має нулі на колі $|z| = R_k u_k$. Підставляючи значення u_k в нерівність (4), приходимо до протиріччя $3 < 3$, отже, функція $f(z)$ не має нулів на колі $|z| = R_k u_k$. Зробивши заміну змінної z на z^{-1} , аналогічно встановимо, що $f(z)$ не має нулів на колі $|z| = \frac{R_{k+1}}{u_k}$.

Далі вводимо допоміжну функцію, що залежить від параметра t , $0 \leq |t| \leq 1$:

$$g_{mn}(z, t) = \sum_{v=-\infty}^{-1} t^{-(h+1)} A_{m+v} z^{v-h} + A_m z^{-h} + A_{m+1} z^{-h+1} + \dots$$

$$\dots + A_{n-1} z^{-1} + A_n + \sum_{v=1}^{\infty} t^v A_{n+v} z^v = \sum_{v=-\infty}^{\infty} A_v(t) z^v \quad (h=n-m),$$

де $m=k_j$ і $n=k_{j+1}$. Функція $g_{mn}(z, t)$ задовольняє всі умови теореми, отже, за доведеним, вона не має нулів на окружності $|z|=R_n(t)u_k$ і окружності $|z|=\frac{R_{m+1}(t)}{u_k}$. Тому функція $g_{mn}(z, t)$ при будь-якому значенні t , $0 \leq |t| \leq 1$ має в колах одну і ту ж кількість нулів. Очевидно, $z^n g_{mn}(z, 1) \equiv f(z)$ і $z^n g_{mn}(z, 0) = A_m + A_{m+1}z + \dots + A_n z^h$. Якщо взяти до уваги, що $R_m(0)=0$ і $R_n(0)=\infty$, то відразу робимо висновок, що $f(z)$ має в колі (8) h нулів.

Примітка. Теорема 2 може бути справедливою і для рядів Лорана, у яких ряд, складений з модулів його коефіцієнтів, може бути ненормальним рядом. При $h=1$ одержимо теорему О. Островського.

В загальному вигляді теорема може бути сформульована так (в цьому випадку ряд Лорана може мати полюс скінченного порядку принаймні в одній з точок $z=0$, $z=\infty$):

Теорема 3. Нехай для ряду Лорана $f(z) = \sum_{v=p}^q A_v z^v$ ($-\infty \leq p < q \leq \infty$) мають місце нерівності

$$D_{k_j} = D_{k+jh} > u^2 \quad (-\infty \leq p \leq \alpha \leq k_j \leq \beta \leq q \leq \infty),$$

де α, β — задані цілі числа; $u = \max_{\alpha \leq k_j \leq \beta} (u_{k_j})$; u_{k_j} — додатний корінь рівняння

$$H_{k_j}(u) = \sum_{\mu=k_j-p}^0 \sum_{v=\mu h}^{(\mu+1)h-1} u^{-(2\mu+1)v-h\mu(\mu+1)} + \sum_{\mu=0}^{q-k_j} \sum_{v=\mu h}^{(\mu+1)h-1} u^{-(2\mu+1)v-h\mu(\mu+1)} = 3.$$

Тоді функція $f(z)$ має h нулів в кожному кільці (8) для $\alpha \leq k_j < k_{j+1} \leq \beta$ і не має нулів в кільцях (9) для $\alpha \leq k_j < \beta$. Якщо вимагати в умові теореми $D_{k_j} \geq u^2$, то треба зробити заміну знаків нерівностей так само, як це робилось в теоремі 2.

Доведення теореми проводиться аналогічно доведенню теореми 2.

Додатні корені u_k ($h=1, 2, \dots$) для $-p=q=\infty$ відповідно мають значення

h	u_k	h	u_k	h	u_k
1	2,193304	6	2,997455	11	2,999990
2	2,760572	7	2,999154	12	2,999997
3	2,926598	8	2,999718	13	2,999999
4	2,976505	9	2,999906	≥ 14	3,000000
5	2,992 07	10	2,999969		

ЛІТЕРАТУРА

I. A. Ostrowski. Recherches sur la méthode de Graeffe et les zéros des polynomes et des séries de Laurent. Acta Math. 72, 99—257 (1940).

А. Н. КОСТОВСКИЙ

**ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ОСТРОВСКОГО
О ЛОКАЛИЗАЦИИ ПО МОДУЛЯМ НУЛЕЙ РЯДОВ ЛОРАНА**

(резюме)

В работе обобщается классическая теорема А. Островского о локализации нулей по модулям в зависимости от величин отклонений мажоранты Ньютона заданного ряда. С помощью обобщенной теоремы можно для некоторых классов рядов Лорана (степенных рядов и многочленов) выделять кольцевые области, не содержащие нулей исследуемой функции. Можно строить кольцевые области, содержащие определенное число нулей этой функции.

Є. С. ДОРОЖОВСЬКИЙ, Г. І. КОНИК, О. М. КОСТОВСЬКИЙ

ВИЗНАЧЕННЯ ДОДАТНОГО КОРЕНЯ ОСНОВНОГО РІВНЯННЯ ЛОКАЛІЗАЦІЇ ЗА МОДУЛЕМ НУЛІВ РЯДІВ ЛОРАНА

В роботі [1] введено рівняння

$$H_{kpq}(u) = \sum_{v=m}^n u^{-\mu_v} - 2 = 1 + \sum_{\substack{v=m \\ (v \neq 0)}}^n u^{-\sum_{j=1}^{|v|-1} (|v|-1) \tau_{k+j \operatorname{sign} v}} \left(\frac{1}{u}\right)^{|v|} - 2 = 0, \quad (1)$$

$$(-\infty \leq p \leq k \leq q \leq \infty),$$

де $-\infty \leq m = p - k \leq 0$, $0 < n = q - k \leq \infty$; τ_v набуває дійсних невід'ємних значень. Це рівняння називається основним рівнянням в теорії локалізації нулів за модулем рядів Лорана (степеневих рядів і многочленів). Рівняння (1) складається для кожного індекса k , для якого відхилення мажоранти Ньютона $\mathfrak{M}_f(z)$ ряду Лорана

$$f(z) = \sum_{v=p}^q A_v z^v \quad (-\infty \leq p < q \leq \infty, \quad A_p, A_q \neq 0) \quad (2)$$

більше чотирьох.

Ряд, що стоїть в лівій частині рівності (1), збігається в колі $|z| > 1$.

Можна просто довести таку теорему.

Теорема 1. Ряд $H_{kpq}(u)$ при $m \leq \cdot$ і $n \geq 1$ має єдиний простий додатний корінь $u_k = u_{mn}$. Всі інші його корені з кола $|u| > 1$ по модулю не більші цього додатного кореня.

Доведення. Функція при додатних значеннях u ($u > 1$) строго спадає від $H_{kpq}(1)$ до -1 ($0 \leq H_{kpq}(u) \leq \infty$). Отже, H_{kpq} обертається в нуль тільки при одному додатному значенні змінної $u_k > 1$. Корінь u_k — простий, бо $H_{kpq}(u_k) < 0$.

Припустимо тепер, що u належить колу $|u| > 1$ і є коренем рівняння (1), причому $u \neq u_k$, тоді

$$2 = \sum_{v=m}^n \tilde{u}^{-\mu_v} \leq \sum_{v=m}^n |\tilde{u}|^{-\mu_v}.$$

і

$$0 = \sum_{v=m}^n \tilde{u}^{-\mu_v} - 2 \leq \sum_{v=m}^n |\tilde{u}|^{-\mu_v} - 2 = H_{kpq}(|\tilde{u}|).$$

Значить, $0 = H_{kpq}(u_k) \leq H_{kpq}(|\tilde{u}|)$. Оскільки функція строго спадає, то $|\tilde{u}| \leq u_k$.

Можна довести, що завжди додатний корінь u_k задовольняє нерівність $2 \leq u_k \leq 3$, якщо $p < k < q$, і $1 \leq u_k \leq 2$, якщо $k = p$ або $k = q$.

На машині «Урал-1» треба було визначати додатні корені для дуже багатьох рівнянь. Були складені таблиці для деяких класів многочленів, степеневих рядів і рядів Лорана, що вивчалися в роботах [1, 2]. При складанні таблиць бралися дискретні значення τ_v (цілі значення 1, 2, 3, ...).

Для цього рівняння було зведено до вигляду

$$\begin{aligned} H_{kpq}(v^{-1}) = \sum_{v=m}^n v^{\mu_v} - 2 = 0; \quad & \frac{1}{3} \leq v_k = u_k^{-1} \leq \frac{1}{2}; \quad (p < k < q) \\ & \frac{1}{2} \leq v_k \leq 1, \quad (k = p \text{ або } k = q) \\ (-\infty \leq m \leq 0 < \infty) \quad & \mu_0 = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

заміною змінної $v = \frac{1}{u}$. Це зроблено для того, щоб розв'язувати рівняння в режимі фіксованої коми.

Для узагальнення викладок будемо вважати, що $a \leq u_k \leq b$, де a і b зображуються в масштабі $1/4$. Це дає змогу вести обчислення в режимі фіксованої коми, що значно скорочує час обчислень порівняно з режимом плаваючої коми.

Знаходження кореня проводимо послідовними наближеннями за методом хорд за формулою

$$u = a + H(a) \frac{a - b}{H(b) - H(a)}. \quad (4)$$

Для даного типу рівнянь метод хорд є набагато простіший, ніж метод дотичних, оскільки вираз для похідної від $H_{kpq}(u)$ значно ускладнює процес обчислень.

Після кожної ітерації по (4) робиться перевірка знака $H(u)$, і в залежності від цього програма засилає u на місце однієї з попередніх границь. Отже, початковий інтервал $[a, b]$ з кожною ітерацією звужується. Ітераційний процес закінчується, якщо виконується умова $|H(u)| \leq \varepsilon$ де ε — задана точність.

Для спрощення алгоритму вираховуємо поле P значень всіх степенів v^{μ_v} , поки $|v^{\mu_v}| \leq \varepsilon$, а $H_{kpq}(u)$ обчислюється сумуванням потрібних степенів із поля P в залежності від значень k, p, q . Час обчислень кореня одного рівняння знаходиться в межах 30—40 сек, а число ітерацій — приблизно 20—25 залежно від заданої точності.

Даний алгоритм можна поширити на випадок рівнянь з дробовими показниками, проте це можна здійснити лише в режимі плаваючої коми.

ЛІТЕРАТУРА

1. О. М. Костовський. Узагальнення теореми Островського про локалізацію по модулям нулів рядів Лорана (див. цей збірник).
2. A. Ostrowski. Recherches sur la méthode de Graeffe et les zéros des polynomes et des séries de Laurent. Acta Math. 72, 99—257 (1940).

Е. С. ДОРОЖОВСКИЙ, Г. И. КОНИК, А. Н. КОСТОВСКИЙ

**ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО КОРНЯ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ
ЛОКАЛИЗАЦИИ ПО МОДУЛЯМ НУЛЕЙ
РЯДОВ ЛОРАНА**

(резюме)

В работе исследуется специальное уравнение, введенное А. Н. Костовским в работе [1]. Доказана теорема, что наибольший по модулю корень является единственным простым положительным корнем. В статье предлагается методика вычисления положительного корня основного уравнения на машине «Урал-1» в режиме фиксированной запятой, приводится оптимальная схема решения задачи.

Б. В. КОВАЛЬЧУК, Г. П. ГУБАНОВ

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ ЗРІЗАНИМИ СЕРЕДНІМИ СУМАМИ ВІД ПОЛІНОМІВ, НАЙКРАЩИХ В ЗАДАНІЙ СИСТЕМІ ТОЧОК

Нехай H_{ω_1, ω_2} є клас 2π -періодичних відносно x та y функцій $f(x, y)$, які задовольняють умову

$$|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| \leq \omega_1(|x_2 - x_1|) + \omega_2(|y_2 - y_1|), \quad (1)$$

де $\omega_1(t)$, $\omega_2(z)$ — задані опуклі модулі неперервності.

Через $\bar{H}_{\omega_1, \omega_2}$ позначаємо клас функцій $f(x, y)$ періоду 2π по x та y , які, крім умови (1), володіють властивістю

$$|f(x_2, y_2) - f(x_2, y_1) - f(x_1, y_2) + f(x_1, y_1)| \leq C \omega_1(|x_2 - x_1|) \omega_2(|y_2 - y_1|),$$

причому модулі неперервності $\omega_1(t)$, $\omega_2(z)$ задовольняють додаткову умову

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\omega_i(\delta) \ln \frac{1}{\delta} \right] = 0 \quad (i=1, \text{ або } i=2).$$

Зрізані середні арифметичні суми від поліномів, які найкраще наближають неперервну 2π -періодичну відносно x та y функцію $f(x, y)$ в системі точок (x_k, y_l) ,

$$\begin{aligned} \text{де} \quad x_k &= \frac{k\pi}{m} \quad (k=1, 2, \dots, 2m), \\ y_l &= \frac{l\pi}{n} \quad (l=1, 2, \dots, 2n), \end{aligned}$$

мають вигляд

$$\sigma_{m,n}^{(p,q)}(f; x, y) = \frac{1}{4mn(p+1)(q+1)} \sum_{k=1}^{2m} \sum_{l=1}^{2n} f(x_k, y_l) G_m^{(p)}(x, k) G_n^{(q)}(y, l), \quad (2)$$

де

$$G_r^{(s)}(t, v) = \frac{\sin \frac{2r-s-1}{2}(t_v - t) \sin \frac{s+1}{2}(t_v - t)}{\sin^2 \frac{1}{2}(t_v - t)}.$$

Нами встановлюються асимптотичні оцінки точних верхніх меж відхилень функцій заданих класів від поліномів (2), тобто асимптотичні

оцінки величин

$$E_{m,n}^{(p,q)}(H_{\omega_1, \omega_2}; x, y) = \sup_{f \in H_{\omega_1, \omega_2}} |f(x, y) - \sigma_{m,n}^{(p,q)}(f; x, y)|;$$

$$E_{m,n}^{(p,q)}(\bar{H}_{\omega_1, \omega_2}; x, y) = \sup_{f \in \bar{H}_{\omega_1, \omega_2}} |f(x, y) - \sigma_{m,n}^{(p,q)}(f; x, y)|.$$

Теорема 1. Для функцій класу H_{ω_1, ω_2} має місце асимптотична рівність

$$E_{m,n}^{(p,q)}(H_{\omega_1, \omega_2}; x, y) = \frac{2}{\pi^2} |\sin mx \sin ny| \ln \frac{m}{p+1} \ln \frac{n}{q+1} \min \left[\omega_1 \left(\frac{\pi}{m} \right), \omega_2 \left(\frac{\pi}{n} \right) \right] + \\ + O \left\{ \left(\ln \frac{m}{p+1} + \ln \frac{n}{q+1} \right) \left[\omega_1 \left(\frac{1}{m} \right) + \omega_2 \left(\frac{1}{n} \right) \right] \right\} + O \left[\omega_1 \left(\frac{1}{m} \right) + \omega_2 \left(\frac{1}{n} \right) \right], \quad (3)$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно p і q ($0 \leq p \leq m$, $0 \leq q \leq n$).

Теорема 2. Для функцій класу $\bar{H}_{\omega_1, \omega_2}$ рівномірно відносно p і q ($0 \leq p \leq m$, $0 \leq q \leq n$) справедлива асимптотична рівність

$$E_{m,n}^{(p,q)}(\bar{H}_{\omega_1, \omega_2}; x, y) = \frac{|\sin mx|}{\pi} \ln \frac{m}{p+1} \omega_1 \left(\frac{\pi}{m} \right) + \frac{|\sin ny|}{\pi} \ln \frac{n}{q+1} \omega_2 \left(\frac{\pi}{n} \right) + \\ + O \left[\ln \frac{m}{p+1} \ln \frac{n}{q+1} \omega_1 \left(\frac{1}{m} \right) \omega_2 \left(\frac{1}{n} \right) \right] + O \left[\omega_1 \left(\frac{1}{m} \right) + \omega_2 \left(\frac{1}{n} \right) \right], \quad (4)$$

причому

$$E_{m,n}^{(p,q)} \left(\bar{H}_{\omega_1, \omega_2}; \frac{k\pi}{m}, \frac{l\pi}{n} \right) = O \left[\omega_1 \left(\frac{1}{m} \right) \omega_2 \left(\frac{1}{n} \right) + \omega_1 \left(\frac{1}{m} \right) + \omega_2 \left(\frac{1}{n} \right) \right];$$

$$E_{m,n}^{(p,q)} \left(\bar{H}_{\omega_1, \omega_2}; x, \frac{l\pi}{n} \right) = \frac{|\sin mx|}{\pi} \ln \frac{m}{p+1} \omega_1 \left(\frac{\pi}{m} \right) + \\ + O \left[\ln \frac{m}{p+1} \omega_1 \left(\frac{1}{m} \right) \omega_2 \left(\frac{1}{n} \right) + \omega_1 \left(\frac{1}{m} \right) + \omega_2 \left(\frac{1}{n} \right) \right];$$

$$E_{m,n}^{(p,q)} \left(\bar{H}_{\omega_1, \omega_2}; \frac{k\pi}{m}, y \right) = \frac{|\sin ny|}{\pi} \ln \frac{n}{q+1} \omega_2 \left(\frac{\pi}{n} \right) + \\ + O \left[\ln \frac{n}{q+1} \omega_1 \left(\frac{1}{m} \right) \omega_2 \left(\frac{1}{n} \right) + \omega_1 \left(\frac{1}{m} \right) + \omega_2 \left(\frac{1}{n} \right) \right].$$

З а у в а ж е н н я 1. При $p=0$, $q=0$ оцінки (3) і (4) одержані в роботі [4].

З а у в а ж е н н я 2. У випадку $\omega_1(t) = Mt^\alpha$, $\omega_2(z) = Nz^\beta$ ($0 < \alpha, \beta \leq 1$) для інтерполяційних тригонометричних поліномів оцінка, аналогічна (3), одержана в роботі [6], а при $p=0$ і $q=0$ — в роботі [1].

З а у в а ж е н н я 3. Теорема 2 у випадку $\omega_1(t) = Mt^\alpha$, $\omega_2(z) = Nz^\beta$ ($0 < \alpha, \beta \leq 1$) для інтерполяційних тригонометричних поліномів доведена В. Б. Гришиним [3].

При доведенні цих теорем ми спираємося на результати, одержані в роботах [2] і [5] при розв'язуванні аналогічних задач для одновимірною випадку, а також використовуємо метод, застосований у роботі [3].

ЛІТЕРАТУРА

1. П. Т. Бугаец. ДАН СССР, **79**, 381 (1951).
2. И. М. Ганзбург. Изв. АН СССР, сер. матем., **27**, 485 (1963).
3. В. Б. Гришин. Диссертация. К., 1964.
4. Г. П. Губанов, Б. В. Ковальчук. ДАН УРСР (1965).
5. В. М. Оловянишников. ДАН СССР, **70**, 761 (1956).
6. В. Г. Пономаренко, ДАН УРСР, **7** (1962).

Б. В. КОВАЛЬЧУК, Г. П. ГУБАНОВ

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ УСЕЧЕННЫМИ СРЕДНИМИ СУММАМИ ОТ ПОЛИНОМОВ, НАИЛУЧШИХ В ЗАДАННОЙ СИСТЕМЕ ТОЧЕК

(резюме)

В работе получены асимптотические оценки верхних граней уклонений функций классов H_{ω_1, ω_2} и $\bar{H}_{\omega_1, \omega_2}$ от тригонометрических полиномов (2).

Т. О. МЕЛЬНИК

ПРО «СКЛЕЮВАННЯ» РОЗВ'ЯЗКІВ ПАРАБОЛІЧНИХ І ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

В останній час починає виникати інтерес до таких задач для рівнянь в частинних похідних, коли в різних частинах даної області рівняння належить до різних типів. При цьому на зовнішній границі області задаються звичайні граничні (або початкові) умови, а на границях, при переході через які рівняння змінює тип, задаються деякі умови «склеювання» розв'язку, або, як їх часто називають, умови спряження. Вперше такі задачі на «склеювання» розв'язків деяких класів рівнянь параболічного і гіперболічного типів в прямокутнику розглядалися в [1, 2, 3] за допомогою методу контурного інтеграла [4]. Застосування цього методу звужує клас розглядуваних задач — коефіцієнти рівнянь, наприклад, можуть залежати тільки від просторових змінних. Крім того, цей метод слабо пристосований до задач в безмежних областях або до задач в областях з криволінійною границею.

В даній роботі розглядається задача на «склеювання» розв'язків загальних двовимірних рівнянь другого порядку параболічного і гіперболічного типу, кожне з яких задане на x -півосі. Для розв'язування задачі застосовується комбінація методу характеристик для гіперболічних рівнянь [5] і методу потенціалів для параболічних рівнянь [6, 7].

Всі величини в даній роботі вважаються дійсними.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Через Π^+ позначимо праву півполосу $\{0 \leq t \leq T; 0 \leq x < \infty\}$ на площині (x, t) ; ліву півполосу $\{0 \leq t \leq T; -\infty < x < 0\}$ позначимо через Π^- . В Π^- розглянемо гіперболічне рівняння

$$\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^i a_{ij}(x, t) \frac{\partial^i u^-}{\partial t^{i-j} \partial x^j} = f^-(x, t) \quad (a_{20}(x, t) \equiv 1), \quad (1^-)$$

а в Π^+ — параболічне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=0}^2 a_i(x, t) \frac{\partial^i u^+}{\partial x^i} = f^+(x, t). \quad (1^+)$$

Гіперболічність і параболічність рівнянь (1) розуміється в тому значенні, що виконуються відповідно умови: а) в розкладі

$$\sum_{j=0}^2 a_{2j}(x, t) \lambda^{2-j} = (\lambda - \lambda_1(x, t))(\lambda - \lambda_2(x, t))$$

величини $\lambda_1(x, t)$ і $\lambda_2(x, t)$ дійсні і різні при всіх $(x, t) \in \Pi^-$; б) $a_2(x, t) \geq \delta > 0$ ($\delta = \text{const}$) при всіх $(x, t) \in \Pi^+$.

Будемо вважати $\lambda_1(x, t) < \lambda_2(x, t)$. Для рівнянь (1) поставимо початкові умови

$$u^-|_{t=0} = g_0(x); \quad \left. \frac{\partial u^-}{\partial t} \right|_{t=0} = g_1(x) \quad (-\infty < x \leq 0); \quad (2^-)$$

$$u^+|_{t=0} = g_2(x) \quad (0 \leq x < \infty) \quad (2^+)$$

і умови «склеювання» на лінії $x=0$, вигляд яких залежить від знаків функцій λ_1 і λ_2 . Ці умови будемо задавати за таким правилом:

а) у випадку $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$

$$\begin{aligned} k^-(t) u^-(0, t) &= k^+(t) u^+(0, t) \\ m^-(t) \frac{\partial u^-(0, t)}{\partial x} &= m^+(t) \frac{\partial u^+(0, t)}{\partial x} \end{aligned} \quad (0 \leq t \leq T); \quad (3a)$$

б) у випадку $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

$$\begin{aligned} k_1^-(t) \frac{\partial u^-(0, t)}{\partial t} + k_2^-(t) \frac{\partial u^-(0, t)}{\partial x} + k_3^-(t) u^-(0, t) &= \\ = m_1^+(t) \frac{\partial u^+(0, t)}{\partial x} + m_2^+(t) u^+(0, t) \end{aligned} \quad (0 \leq t \leq T); \quad (3б)$$

в) у випадку $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

$$\begin{aligned} k_{1i}^-(t) \frac{\partial u^-(0, t)}{\partial t} + k_{2i}^-(t) \frac{\partial u^-(0, t)}{\partial x} + k_{3i}^-(t) u^-(0, t) &= \\ = m_{1i}^+(t) \frac{\partial u^+(0, t)}{\partial x} + m_{2i}^+(t) u^+(0, t) \end{aligned} \quad (i=1, 2, 3; 0 \leq t \leq T); \quad (3в)$$

г) у випадку $\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0$ умови «склеювання» задаються так, як у випадку «б», якщо $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$, то ці умови задаються так, як у випадку «а».

Ми детально розглянемо випадок «а», випадки ж «б—г» розглядаються аналогічно.

Зауважимо, що умови (3а) можна було б задати в більш загальному вигляді, наприклад, у вигляді двох рівностей вигляду (3б) або (3г). Таке узагальнення нічого нового не вносить у наведені нижче міркування.

Отже, будемо розглядати задачу (1)—(2)—(3а). Ми поки що не формулюємо ніяких обмежень на дані задачі. Будемо вважати ці обмеження такими, що всі наші викладки будуть законними. У відповідному місці ці обмеження будуть сформульовані.

ЗВЕДЕННЯ ЗАДАЧІ ДО ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо дві допоміжні задачі.

Задача І. В Π^- знайти розв'язок рівняння (1^-) , який задовольняє початкову умову (2^-) і граничну умову

$$\frac{\partial u^-(0, t)}{\partial x} = h^-(t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (4)$$

Задача II. В Π^+ знайти розв'язок рівняння (1^+) , який задовольняє початкову умову (2^+) і граничну умову

$$\frac{\partial u^+(0, t)}{\partial x} = h^+(t) \quad (0 \leq t < \infty). \quad (5)$$

Після заміни

$$\frac{\partial u^-}{\partial t} = \frac{\lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2}{\lambda_1 - \lambda_2}; \quad \frac{\partial u^-}{\partial x} = \frac{z_1 - z_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad u^- = z_3,$$

задача I зводиться до еквівалентної задачі:

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} = \lambda_i \frac{\partial z_i}{\partial x} + b_{i1} z_1 + b_{i2} z_2 + b_{i3} z_3 + f^- \quad (i=1, 2); \quad (6)$$

$$\frac{\partial z_3}{\partial t} = \frac{\lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = b_{31} z_1 + b_{32} z_2 + b_{33} z_3 \quad (b_{33} = 0);$$

$$z_1(x, 0) = g_1(x) - \lambda_2(x, 0) g'_0(x); \quad z_2(x, 0) = g_1(x) - \lambda_1(x, 0) g'_0(x); \quad (7)$$

$$z_3(x, 0) = g_0(x)$$

$$z_1(0, t) - z_2(0, t) = [\lambda_1(0, t) - \lambda_2(0, t)] h^-(t), \quad (8)$$

де $b_{ij}(x, t)$ — відомі функції, які виражаються через коефіцієнти рівняння (1^-) .

Задача (6) — (8) в свою чергу еквівалентна системі інтегральних рівнянь [5]:

$$z_i(x, t) = G_i^1(x, t) + \int_0^t \sum_{j=1}^3 b_{ij}(\varphi_i(\tau, x, t), \tau) z_j(\varphi_i(\tau, x, t), \tau) d\tau \quad (i=1, 2),$$

$$-\infty < x \leq \varphi_2(t, 0, 0);$$

$$z_1(x, t) = G_1^2(x, t) + \int_0^t \sum_{j=1}^3 b_{1j}(\varphi_1(\tau, x, t), \tau) z_j(\varphi_1(\tau, x, t), \tau) d\tau,$$

$$\varphi_2(t, 0, 0) \leq x \leq 0; \quad (9)$$

$$z_2(x, t) = G_2^2(x, t) + \int_{t_2(x, t)}^t \sum_{j=1}^3 b_{2j}(\varphi_2(\tau, x, t), \tau) z_j(\varphi_2(\tau, x, t), \tau) d\tau +$$

$$+ \int_0^{t_2(x, t)} \sum_{j=1}^3 b_{1j}(\varphi_1(\tau, 0, t_2(x, t)), \tau) z_j(\varphi_1(\tau, 0, t_2(x, t)), \tau) d\tau -$$

$$- [\lambda_1(0, t_2(x, t)) - \lambda_2(0, t_2(x, t))] h^-(t_2(x, t));$$

$$\varphi_2(t, 0, 0) \leq x \leq 0;$$

$$z_3(x, t) = G_3^3(x) + \int_0^t \sum_{j=1}^3 b_{3j}(x, \tau) z_j(x, \tau) d\tau,$$

$$-\infty < x \leq 0$$

де $\varphi_i(t, \xi, \tau)$ ($i=1, 2$) є розв'язок рівняння $\frac{dx}{dt} = -\lambda_i(x, t)$, який проходить через точку $(\xi, \tau) \in \Pi^-$; $G_i^j(x, t)$ — відомі функції, які вира-

жаються через дані задачі (6) — (8); $t_2(x, t)$ є функція, яка задовольняє співвідношення

$$\Phi_2(t_2(x, t), x, t) \equiv 0.$$

Очевидно,

$$t_2(0, t) \equiv t.$$

Розв'язок задачі II, згідно з [6, 7], запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} u^+(x, t) = & \int_0^\infty G_1(x, \xi, t) g_2(\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} G_2(x, t; \xi, \tau) f^+(\xi, \tau) d\xi + \\ & + \int_0^t G_3(x, t, \tau) h^+(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (10)$$

де G_i — відомі ядра.

Задача (1) — (2) — (3а), очевидно, переходить в еквівалентну їй задачу про знаходження функцій $z_1, z_2, u^- = z_3, u^+$, які задовольняють рівняння (6), (1⁺), початкові умови (7), (2⁺) і умови спряження (3а).

Розв'язок цієї останньої задачі шукаємо у вигляді (9), (10), вважаючи там $h^\pm(t)$ невідомими функціями, які будемо підбирати так, щоб задовольнити умови (3а).

Друга умова (3а), очевидно, дає

$$m^-(t) h^-(t) = m^+(t) h^+(t).$$

Звідси

$$h^+(t) = \frac{m^-(t)}{m^+(t)} h^-(t). \quad (11)$$

Враховуючи, що

$$u^-(x, t) = g_0(x) + \int_0^t \frac{\lambda_1(x, \tau) z_1(x, \tau) - \lambda_2(x, \tau) z_2(x, \tau)}{\lambda_1(x, \tau) - \lambda_2(x, \tau)} d\tau$$

і

$$G_3(0, t, \tau) = - \sqrt{\frac{a_2(0, \tau)}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t - \tau}} + G_4(t, \tau) \quad (12)$$

($G_4(t, \tau)$ при $t = \tau$ має особливість порядку меншого, ніж $(t - \tau)^{-\frac{1}{2}}$), з першої умови (3а) одержимо

$$\begin{aligned} -k^+(t) \int_0^t \sqrt{\frac{a_2(0, \tau)}{\pi}} \frac{m^-(\tau)}{m^+(\tau)} \frac{h^-(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau = \\ = k^-(t) \int_0^t \lambda_2(0, \tau) h^-(\tau) d\tau + V(t, z, h^-), \end{aligned} \quad (13)$$

де $V(t, z, h^-)$ — лінійний інтегральний оператор Вольєрра від функцій z_1, z_2, z_3, h^- .

З (13) легко отримуємо

$$h^-(t) = V_1(t, z, h^-), \quad (14)$$

де V_1 — оператор з такими ж властивостями, що і V .

Таким чином, відносно невідомих функцій z_1, z_2, z_3, h^-, h^+ ми приходимо до системи інтегральних рівнянь Вольтерра (9), (11), (14).

Має місце така теорема.

Теорема. Нехай виконані умови: а) всі задані функції в (1) — (2) — (3) неперервно диференційовані по своїх змінних не менше двох разів;

б) $k^-(0)g_0(0)=k^+(0)g_2(0); m^-(0)g'_0(0)=m^+(0)g'_2(0);$

в) $m^\pm(t) \neq 0, k^\pm(t) \neq 0$ при всіх $t \in [0, T]$.

Тоді система інтегральних рівнянь (9), (11), (14) має єдиний неперервний розв'язок, який можна знайти за методом послідовних наближень.

Функції $z_3=u^-$ і u^+ , виражені у вигляді (10), будемо називати узагальненим неперервним розв'язком задачі (1) — (2) — (3а).

ЛІТЕРАТУРА

1. С. И. Гайдук, А. В. Иванов. Об одной задаче на сопряжение уравнений параболического и гиперболического типа. ДАН БССР, № 9 (1964).
2. С. И. Гайдук. Об одной задаче на сопряжение дифференциальных уравнений. ДАН БССР, № 12 (1964).
3. С. И. Гайдук. Применение метода контурного интеграла к решению некоторых задач на сопряжение дифференциальных уравнений параболического и гиперболического типа. Канд. диссертация. Минск, 1964.
4. М. Л. Расулов. Метод контурного интеграла. «Наука», М., 1964.
5. В. Э. Аболия и А. Д. Мышкис. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости. Уч. зап. Латв. ун-та, 20, в. 3 (1958).
6. Т. Я. Загорский. Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа. Вид-во ЛДУ, 1961.
7. С. Д. Эйдельман. Параболические системы. «Наука», М., 1964.

Т. Е. МЕЛЬНИК

О «СКЛЕИВАНИИ» РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(резюме)

В работе путем комбинации метода характеристик для гиперболических уравнений и метода потенциала для параболических уравнений доказывается разрешимость гиперболического уравнения (заданного при $x < 0$) и параболического уравнения (заданного при $x > 0$) при условиях «склеивания» этих решений на линии $x=0$. Задача приводится к системе интегральных уравнений Вольтерра, разрешимой по методу последовательных приближений.

О. М. ВВЕДЕНСЬКИЙ

ПРОАЛГЕБРАІЧНІ ГРУПИ З ВИСОТОЮ ДВА РЕДУКЦІЇ

0. Мета цієї замітки — викласти елементарні властивості підгрупи Лютьц [1] Γ_L проалгебраїчної групи раціональних над кінцевим розширенням Галуа L повного дискретно нормованого поля K з алгебраїчно замкненим полем лишків k характеристики $p > 3$ точок еліптичної кривої

$$y^2 = x^3 + ax + b \quad (a, b \in O_K; 4a^3 + 27b^2 \not\equiv 0 \pmod{t}),$$

де O_K — кільце цілих в K , а t — його уніформізуюча, причому інваріант Хассе редукції A' кривої A рівний нулеві. Але всі результати залежать від того факту, що підгрупа Лютьц як аналітична група Лі над O_K , що має проалгебраїчну структуру, сумісну з аналітичною, група, редукція якої (в розумінні зведення коефіцієнтів по $\text{mod } t$) є формальна група висоти 2 над O_K [2].

1. Для нашого випадку неважко довести, що точна послідовність редукції

$$0 \rightarrow \Gamma_L \rightarrow A_L \rightarrow A' \rightarrow 0$$

розпадається. Підгрупа Лютьц Γ_L є аналітичною групою Лі над O_K , груповий закон якої

$$z_1 \circ z_2 = (z_1 + z_2)(1 + \dots)$$

задає формальна група, що відповідає A . Коли $z \in t^n \cdot O_K$, а $n = 1, 2, \dots$, ми одержуємо фільтрацію

$$\Gamma_L = \Gamma_L^1 \supset \Gamma_L^2 \supset \dots,$$

причому $\Gamma_L^n / \Gamma_L^{n+1} \approx G_a$ (адитивній групі поля k).

Якщо

$$z \circ \dots \circ z = p(z + \dots) + \sum_{s=1}^{\infty} c_s z^{ps} \quad (c_s \in O_K) \quad (1)$$

p -а ітерація формальної групи, що відповідає A , то c_p — одиниця в K , а $c_1, \dots, c_{p-1} \in t \cdot O_K$. Нехай $r = v_K(c_1)$ — норма c_1 в K , $e = v_K(p)$ — норма p в K і

$$e_2 = \frac{e}{p^2 - 1}, \quad h_1 = \frac{r}{p(p-1)}, \quad h_2 = \frac{e-r}{p-1}.$$

Пропозиція 1. Гомоморфізм u множення на p в Γ_K відображає Γ_K^n у $\Gamma_K^{\lambda(n)}$, де у випадку

1) характеристика K дорівнює p , інваріант Хассе у A рівний нулю — буде $\lambda(n) = p^2 n$;

2) те ж, але інваріант Хассе у A , відмінний від нуля — буде

$$\lambda(n) = \begin{cases} p^2 n, & n \leq h_1, \\ pn + r, & n \geq h_1; \end{cases}$$

3) характеристика K дорівнює 0, $h_1 \geq e_2$ буде

$$\lambda(n) = \begin{cases} p^2 n, & n \leq e_2 \\ n + e, & n \geq e_2; \end{cases}$$

4) те ж, але $h_1 < e_2$ буде

$$\lambda(n) = \begin{cases} p^2 n, & n \leq h_1, \\ pn + r, & h_1 \leq n \leq h_2, \\ n + e, & n \geq h_2 \end{cases}$$

і визначає епіморфізми

$$\Gamma_K^n / \Gamma_K^{n+1} \xrightarrow{u_n} \Gamma_K^{\lambda(n)} / \Gamma_K^{\lambda(n)+1},$$

які при відповідних ізоморфізмах переходять у гомоморфізми

$$G_a^1 \xrightarrow{u_n} G_a$$

вигляду (у всіх випадках $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma} \in k$; $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma} \neq 0$) у випадку

1) $\bar{u}_n(z) = \bar{\alpha} z^{p^2}$;

$$2) \quad \bar{u}_n(\bar{z}) = \begin{cases} \bar{\alpha} \bar{z}^{p^2}, & n < h_1, \\ \bar{\alpha} \bar{z}^{p^2} + \bar{\beta} \bar{z}^p, & n = h_1, \\ \bar{\beta} \bar{z}^p, & n > h_1; \end{cases}$$

$$3) \quad \bar{u}_n(\bar{z}) = \begin{cases} \bar{\alpha} \bar{z}^{p^2}, & n < e_2, \\ \bar{\alpha} \bar{z}^{p^2} + \bar{\gamma} \bar{z}, & n = e_2 (h_1 > e_2), \\ \bar{\alpha} \bar{z}^{p^2} + \bar{\beta} \bar{z}^p + \bar{\gamma} \bar{z}, & n = e_2 (h_1 = e_2), \\ \bar{\gamma} \bar{z}, & n > e_2; \end{cases}$$

$$4) \quad \bar{u}_n(\bar{z}) = \begin{cases} \bar{\alpha} \bar{z}^{p^2}, & n < h_1, \\ \bar{\alpha} \bar{z}^{p^2} + \bar{\beta} \bar{z}^p, & n = h_1, \\ \bar{\beta} \bar{z}^p, & h_1 < n < h_2, \\ \bar{\beta} \bar{z}^p + \bar{\gamma} \bar{z}, & n = h_2, \\ \bar{\gamma} \bar{z}, & n > h_2 \end{cases}$$

і $\Gamma_K \approx W^e$ (добуток екземплярів адитивної групи W векторів Вітта над k), якщо має місце випадок

1), 2) (коли h_1 не ціле), 3) (коли e_2 не ціле), 4) (коли h_1 і h_2 не цілі),

має місце точна послідовність проалгебраїчних груп (Z_p — група цілих p -адичних чисел)

$$0 \rightarrow Z_p \rightarrow W^e \rightarrow \Gamma_L \rightarrow 0,$$

якщо має місце випадок 2) (коли h_1 ціле), 4) (коли або h_1 ціле, а h_2 — не ціле, або навпаки); має місце точна послідовність проалгебраїчних груп

$$0 \rightarrow Z_p^2 \rightarrow W^e \rightarrow \Gamma_L \rightarrow 0$$

у випадках 3) (коли e_2 — ціле) та 4) (коли h_1, h_2 — цілі).

Доведення. З (1) випливає, що $\lambda(n)$ строго зростаюча функція, яка визначає гомоморфізм

$$\Gamma_K^n / \Gamma_K^{n+1} \xrightarrow{u_n} \Gamma_K^{\lambda(n)} / \Gamma_K^{\lambda(n)+1}.$$

Але ендоморфізм G_a визначається поліномом, в розклад якого входять лише степені x , які є степенями p . Залишається зробити елементарні підрахунки.

Наслідок 1. p -компонента кручення групи A_K кінцева. Доведення класичне.

Наслідок 2. p -компонента $\pi_1(A_K)$ ізоморфна $\pi_1(W)^e \times X$, де X — добуток не більш як двох множників Z_p .

Доведення — очевидне.

Відзначимо, що r може бути довільним — це впливає з властивостей полінома, який задає інваріант Хассе [3].

2. Нехай L/K — розширення Галуа з простою циклічною групою g . Обчислимо групи когомологій

$$H^n(g, \Gamma_L),$$

які дадуть нам деяку інформацію про групи когомологій і розширень з більшою групою Галуа. Тут обчислення проводиться за класичною схемою [4].

Якщо N -нормений гомоморфізм g -модуля Γ_L і $\Gamma_L^{u(n)}$ — найменша з підгруп Γ_K^s , $s=1, 2, \dots$, яка містить $N(\Gamma_L^n)$, то детальне вивчення формули

$$N(z) \equiv \text{Tr} z + \sum_{s=1}^{\infty} c_s [\text{Norm } z]^s \pmod{\text{Tr} P^{2n}}$$

($z \in P^n$, де P — максимальний ідеал кільця цілих поля K), приводить до висновку

Лема 1. $\mu(n) = \min \left\{ \left\lceil \frac{(m+1)(p-1)+n}{p} \right\rceil, r+n, pn \right\}$, де $[v]$ — ціла частина дійсного числа v , а m — номер останньої відмінної від одиниці групи вітвлення розширення L/K .

Доведення. Те, що

$$\mu(n) = \min \left\{ \left\lceil \frac{(m+1)(p-1)+n}{p} \right\rceil, r+n, v_K(c_2) + \right. \\ \left. + 2n, \dots, v_K(c_{p-1}) + (p-1)n, pn \right\},$$

майже тривіально. Але, коли $\mu(n) \neq \left\lfloor \frac{(m+1)(p-1)+n}{p} \right\rfloor \Rightarrow \mu(n+1) > \mu(n)$, тобто визначений гомоморфізм

$$\Gamma_L^n / \Gamma_L^{n+1} \xrightarrow{N_n^*} \Gamma_K^{\mu(n)} / \Gamma_K^{\mu(n)+1}, \quad (2)$$

який як ендоморфізм G_a повинен мати «добрий» вигляд. Звідси випливає результат.

Наслідок. Коли $\frac{r}{p-1} \geq \frac{m+1}{p+1}$,

$$\mu(n) = \begin{cases} pn & \text{при } n \leq \frac{m+1}{p+1}, \\ \left\lfloor \frac{(m+1)(p-1)+n}{p} \right\rfloor & \text{при } n \geq \frac{m+1}{p+1}; \end{cases}$$

коли $\frac{r}{p-1} < \frac{m+1}{p+1}$, то

$$\mu(n) = \begin{cases} pn, & n \leq \frac{r}{p-1}, \\ n+r, & \frac{r}{p-1} \leq n \leq m+1 - \frac{pr}{p-1}, \\ \left\lfloor \frac{(m+1)(p-1)+n}{p} \right\rfloor, & n \geq m+1 - \frac{pr}{p-1}. \end{cases}$$

Нехай J — доповнення $\mu(Z_+)$ у Z_+ .

Лема 2. Якщо n таке, що $\mu(n+1) > \mu(n)$, то мають місце точні послідовності

$$0 \rightarrow (N(\Gamma_L))^{\mu(n)} / (N(\Gamma_L))^{\mu(n)+1} \rightarrow \Gamma_K^{\mu(n)} / \Gamma_K^{\mu(n)+1} \rightarrow 0;$$

для всіх $j \in J$

$$(N(\Gamma_L))^j / (N(\Gamma_L))^{j+1} = 0.$$

Доведення. Вивчаємо за допомогою леми 1 гомоморфізм (2). Перша частина леми тривіальна. Обчислюємо $J:J$ складається з усіх взаємно-простих з p чисел при $\frac{r}{p-1} \geq \frac{m+1}{p+1}$ у випадку

$$1^*) m \equiv p \pmod{p+1} \text{ не більших } p \frac{m+1}{p+1};$$

$$2^*) m \equiv 0 \pmod{p+1} \text{ не більших } p \frac{m}{p+1};$$

$$3^*) m \equiv l \pmod{p+1}, 0 < l < p \text{ не більших } p \frac{m+1}{p+1} + \frac{l-2p-1}{p+1},$$

а при $\frac{r}{p-1} < \frac{m+1}{p+1}$ у випадку

$$4^*) r \equiv 0 \pmod{p-1} \text{ не більших } p \frac{r}{p-1};$$

5*) $\frac{m+1}{p+1} > \frac{r}{p-1} + \frac{p}{p^2-1}$, $\left(\frac{r}{p-1} + \alpha\right)$ — ціле, де $0 < \alpha < 1$, — не більших $p \frac{r}{p-1} + \alpha - 1$;

$$\begin{aligned}
6^*) \quad & \frac{m+1}{p+1} < \frac{r}{p-1} + \frac{p}{p^2-1}, \left(\frac{r}{p-1} + \alpha \right) - \text{ціле, } 0 < \alpha < 1, - \text{ не біль-} \\
& \text{ших } p \frac{r}{p-1} + \alpha - 1; \quad \frac{m+1}{p+1} - \frac{r}{p-1} - \frac{\alpha}{p+1} \geq 0; \\
7^*) \quad & \frac{m+1}{p+1} < \frac{r}{p-1} + \frac{p}{p^2-1}, \left(\frac{r}{p-1} + \alpha \right) - \text{ціле, } 0 < \alpha < 1, \text{ а } \frac{m+1}{p+1} - \\
& - \frac{r}{p-1} - \frac{\alpha}{p+1} < 0 - \text{ не менших } p \frac{r}{p-1} + \alpha - 2.
\end{aligned}$$

З доведення лєми 2 неважко знайти, що при значеннях n , які задовольняють нерівності у випадку

$$\begin{aligned}
1^*) \quad & n < \frac{m+1}{p+1}, \quad 2^*) \quad n < \frac{m}{p+1}, \quad 3^*) \quad n \leq \frac{m+1}{p+1} - \frac{l+1}{p+1}, \\
4^*) \quad & n < \frac{r}{p-1}, \quad 5^*)-7^*) \quad n \leq \frac{r}{p-1} + \alpha - 1,
\end{aligned}$$

N_n^* у (2) ізоморфізми (квазіалгебраїчних груп). Звідси легко одержати другу частину лєми 2.

Пропозиція 2. $H^0(g, \Gamma_L)$ зв'язна і ізоморфна зв'язній компоненті $H^1(g, \Gamma_L)$, яка у випадках, наведених раніше, є прямою сумою такого числа екземплярів G_a :

$$1^*) (p-1) \frac{m+1}{p+1}, \quad 2^*) (p-1) \frac{m}{p+1}, \quad 3^*) (p-1) \left(\frac{m+1}{p+1} - \frac{l+1}{p+1} \right) + (l-1), \quad 4^*) - 6^*) r, \quad 7^*) r-1;$$

зв'язна компонента $H^1(g, \Gamma_L)$ є прямим додатком останньої, а нульвимірна компонента $\pi_0 H^1(g, \Gamma_L)$ є у випадках

$$2^*) (Z/pZ)^2, \quad 4^*) (Z/pZ)^2,$$

а в інших — тривіальна.

Доведення. Спуск по точних послідовностях вигляду

$$0 \rightarrow \Gamma_K^2 / N(\Gamma_L) \rightarrow \Gamma_K^1 / N(\Gamma_L) \rightarrow G_a \rightarrow 0$$

дозволяє визначити $H^0(g, \Gamma_L)$ як розширення деякого числа груп G_a . Залишається врахувати попередні обчислення і відомий результат Серра [5].

Для підрахунку $H^{-1}(g, \Gamma_L)$ треба використати $(I_g \cdot \Gamma_L) = (\text{Ker } N)^{m+1}$ (у позначеннях роботи [6]), лему 1 і підрахунки такого типу: якщо в комутативній діаграмі (випадок 1)

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \rightarrow & \frac{\Gamma_L^{\frac{m+1}{p+1} + kp-1}}{\Gamma_L^{\frac{m+1}{p+1} + kp}} & \rightarrow & \frac{\Gamma_L^{\frac{m+1}{p+1} + (k-1)p}}{\Gamma_L^{\frac{m+1}{p+1} + kp}} & \rightarrow & \frac{\Gamma_L^{\frac{m+1}{p+1} + (k-1)p}}{\Gamma_L^{\frac{m+1}{p+1} + kp-1}} & \rightarrow 0 \\
& & & & \searrow N^* & & \\
& & & & & \Gamma_K^{\frac{m+1}{p+1} + k-1} & \\
& & & & & \uparrow N^* & \\
& & & & & \Gamma_K^{\frac{m+1}{p+1} + k} &
\end{array}$$

N^* — ізоморфізм, то $\text{Ker } N^* \approx G_a^{p-1}$, використовуючи той же результат Серра [5], що і треба було довести.

Зазначимо, що пропозиція 2 має місце для значно ширшого класу груп, але нам будуть потрібні конкретні обчислення для даного випадку; до інших ми повернемося іншим разом.

Наслідок. $H^{1-n}(g, \pi_1(\Gamma_L))^* \approx H^n(g, \Gamma_L)$.

Доведення. З точної послідовності накриття випливає точна послідовність

$$0 \rightarrow \pi_0(H^{-n}(g, \Gamma_L)) \rightarrow H^{1-n}(g, \pi_1(\Gamma_L)) \rightarrow \pi_1(H^{1-n}(g, \Gamma_L)) \rightarrow 0.$$

Залишається врахувати пропозицію 2 і дуальність Серра [7].

Відмітимо, що для абелевих g і для проалгебраїчних груп з висотою редукції 3 це вже не має місця. Викладки будуть наведені.

Примітка. З наведених результатів випливає дуальність $\pi_1(A_K)$ і групи головних однорідних просторів над полем нульової характеристики.

ЛІТЕРАТУРА

1. E. Lutz. Journ. für Math., 177, 238—247 (1937).
2. J. Diendoné. Amer. J. Math., 77, 218—244 (1955).
3. M. Deuring. Abh. Sem. Hamb., 14, 197—272 (1941).
4. J.—P. Serre. Bull. Math. France, 89, 105—154 (1961).
5. J.—P. Serre. Groupes algebriques... Paris, 1959.
6. О. Введенский. Изв. АН СССР, 28, 1091—1112 (1964).
7. J.—P. Serre. Groupes proalgebriques, I.H.E.S., Publ. Math., № 7 (1960).

О. Н. ВВЕДЕНСКИЙ

ПРОАЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ГРУППЫ С ВЫСОТОЮ ДВА РЕДУКЦИИ

(резюме)

Исследуются элементарные свойства подгруппы Люцц эллиптической кривой.

Є. С. ДОРОЖОВСЬКИЙ, В. Г. КОСТЕНКО

ПОЛЕ ПОТЕНЦІАЛУ ЕЛЕКТРОННОЇ ЛІНЗИ З ПОРУШЕНОЮ ОСЬОВОЮ СИМЕТРІЄЮ

В заводських умовах не можна виготовити ідеальні осесиметричні електронні лінзи. Тому виникає питання про вплив незначних дефектів виготовлення, тобто незначних відхилень від осьової симетрії, на роботу таких лінз.

В даній замітці буде розглядатися лише випадок так званої еліптичної дисторсії осесиметричної електронної лінзи, тобто випадок, при якому поверхні кругових циліндричних електродів незначно деформовані в поверхні еліптичних циліндрів. Знаходження поля потенціалу такої лінзи методом збурень буде зведене до послідовності задач Діріхле для рівнянь в частинних похідних на площині, взагалі кажучи, з розривними граничними умовами, а останні розв'язуються наближено комбінацією методу прямих та методу спряжень.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ДЕЯКІ ЗАУВАЖЕННЯ

Нехай електроди лінзи l_1, l_2, l_3 є кусками еліптичних циліндрів з спільною віссю oz (рис. 1). Задача знаходження поля потенціалу цієї лінзи полягає в знаходженні розв'язку рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

який би на електродах дорівнював заданим значенням

$$u|_{l_1, l_3} = 1; \quad u|_{l_2} = 0. \quad (2)$$

Будемо шукати $u(r, z, \theta)$ у вигляді

$$u(r, z, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \{ \bar{f}_k(r, z) e^{ik\theta} + f_k(r, z) e^{-ik\theta} \}, \quad (3)$$

де $f_0(r, z)$ — дійсна, а інші $f_k(r, z)$ — комплексні функції. Ряд (3) буде розв'язком рівняння (1) тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{\partial^2 f_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_k}{\partial r} + \frac{\partial^2 f_k}{\partial z^2} - \frac{k^2}{r^2} f_k = 0 \quad (k=0, 1, \dots). \quad (4)$$

Крім того, з деяких міркувань симетрії [1] випливає, що на осі oz повинно бути

$$\left. \frac{\partial f_0(r, z)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad f_k(0, z) = 0 \quad (k=1, 2, \dots). \quad (5)$$

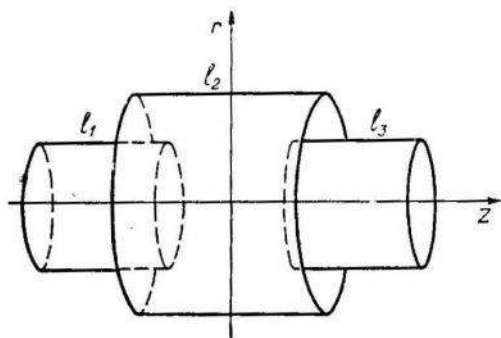


Рис. 1.

ЗБУРЕННЯ ПОЛЯ ВНАСЛІДОК ЗБУРЕННЯ ЕКВІПОТЕНЦІАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ

В припущенні, що електроди лінзи є еквіпотенціальні поверхні, потрібно дослідити вплив зміщень поверхонь електродів на поле її потенціалу, тобто з'ясувати, яким чином можна знайти збурення поля внаслідок збурення його еквіпотенціальних поверхонь, якщо відоме поле ідеальної осесиметричної лінзи та геометричний вигляд збурення її електродів.

Нехай $u(P)$ — потенціал в довільній точці P простору, який задовольняє рівняння Лапласа $\Delta u = 0$. Нехай, крім того, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — еквіпотенціальні поверхні функції $u(P)$, тобто мають місце рівності

$$u(A_v) = C_v \quad (v=1, 2, 3), \quad (6)$$

де A_v — довільна точка поверхні α_v ; C_v — константа.

Щоб дослідити всі можливі випадки еліптичної дисторсії розглядуваної лінзи, припустимо, на відміну від [1], що переміщення поверхні α_v в близьке положення α_v^* залежить від двох параметрів λ і μ ($0 < \lambda, \mu < 1$). Проведемо в точці A_v поверхні α_v ($v=1, 2, 3$) нормаль до перетину з поверхнею α_v^* в точці A_v^* і припустимо, що віддаль $h(A_v)$ між точками A_v і A_v^* виражається по степенях λ і μ у вигляді

$$\begin{aligned} n(A_v) = & \lambda n_1(A_v) + \mu n_2(A_v) + \frac{\lambda^2}{2} n_{11}(A_v) + \lambda \mu n_{12}(A_v) + \\ & + \frac{\mu^2}{2} n_{22}(A_v) + O(\lambda^m \mu^n) \quad (m+n=3). \end{aligned} \quad (7)$$

Величини $n_1(A_v), \dots, n_{22}(A_v)$ називаються коефіцієнтами переміщень.

Якщо переміщення еквіпотенціальних поверхонь залежать від параметрів λ і μ , то і збурення потенціалу при цьому також залежатиме від λ і μ . Позначивши потенціал збуреної лінзи в точці P через $u^*(P)$, будемо мати

$$\begin{aligned} u^*(P) = & u(P) + \lambda u_1(P) + \mu u_2(P) + \frac{\lambda^2}{2} u_{11}(P) + \lambda \mu u_{12}(P) + \\ & + \frac{\mu^2}{2} u_{22}(P) + O(\lambda^m \mu^n), \end{aligned} \quad (8)$$

де $u_1(P), \dots, u_{22}(P)$ — збурення, а $u(P)$ — потенціал ідеальної (незбуреної) осесиметричної лінзи.

Потенціал $u^*(P)$ повинен задовольняти рівняння Лапласа при довільних λ і μ , а тому

$$\Delta u_i(P) = 0, \quad \Delta u_{ij}(P) = 0 \quad (i, j=1, 2). \quad (9)$$

A_v^* — довільна точка еквіпотенціальної поверхні α_v^* для збуреної лінзи, і, отже,

$$u^*(A_v^*) = C_v. \quad (10)$$

Розкладаючи потенціал $u^*(A_v^*)$ в ряд Тейлора в околі точки A_v , одержимо

$$u^*(A_v^*) = u^*(A_v) + u_n^*(A_v) n(A_v) + \frac{1}{2!} u_{nn}^*(A_v) [n(A_v)]^2 + \dots,$$

де індекс n означає диференціювання по зовнішній нормалі. Використовуючи (7), матимемо

$$\begin{aligned} u^*(A_v) = & u^*(A_v) + \\ & + u_n^*(A_v) \left[\lambda n_1(A_v) + \mu n_2(A_v) + \frac{\lambda^2}{2} n_{11}(A_v) + \lambda \mu n_{12}(A_v) + \frac{\mu^2}{2} n_{22}(A_v) \right] + \\ & + \frac{1}{2} \{ \lambda^2 [n_1(A_v)]^2 + 2\lambda \mu n_1(A_v) n_2(A_v) + \mu^2 [n_2(A_v)]^2 \} u_{nn}^*(A_v) + O(\lambda^m \mu^n) \quad (11) \\ & (m+n=3). \end{aligned}$$

Якщо підставити $u^*(A_v)$ із (8) в (11) і врахувати (6) та (10), одержимо тотожність по λ і μ , з якої випливає

$$\left. \begin{aligned} u_1(A_v) &= -n_1(A_v) u_n'(A_v), \quad u_2(A_v) = -n_2(A_v) u_n'(A_v), \\ u_{11}(A_v) &= -n_{11}(A_v) u_n'(A_v) - 2n_1(A_v) u_{1n}'(A_v) - \\ &\quad - [n_1(A_v)]^2 u_{nn}''(A_v), \\ u_{12}(A_v) &= -n_{12}(A_v) u_n'(A_v) - n_1(A_v) u_{2n}'(A_v) - \\ &\quad - n_2(A_v) u_{1n}'(A_v) - n_1(A_v) n_2(A_v) u_{nn}''(A_v), \\ u_{22}(A_v) &= -n_{22}(A_v) u_n'(A_v) - 2n_2(A_v) u_{2n}'(A_v) - \\ &\quad - [n_2(A_v)]^2 u_{nn}''(A_v) \end{aligned} \right\}. \quad (12)$$

Можна було б одержати відповідні співвідношення і для збурень більш високого порядку, але фактично вони для наших цілей не потрібні. У випадку еліптичної дисторсії виявляється, що досить врахувати лише збурення 1-го порядку $u_1(P)$ та $u_2(P)$, а збурення 2-го порядку $u_{11}(P)$, $u_{12}(P)$, $u_{22}(P)$ треба враховувати при інших порушеннях осевої симетрії електронних лінз (паралельний зсув осей та перекося осей електродів).

Тепер ми маємо можливість знайти збурення поля у вигляді (8), розв'язуючи послідовно задачі Діріхле для рівнянь Лапласа (9) з відповідними граничними умовами (12), якщо відоме поле потенціалу для ідеальної (незбуреної) лінзи та коефіцієнти переміщень $n_1(A_v), \dots, n_{22}(A_v)$.

Нехай еквіпотенціальні поверхні L_1, L_2, L_3 — електроди незбуреної осесиметричної лінзи — є кусками кругових циліндричних поверхонь відповідно радіуса a_1 і a_2 , симетричних відносно осей oz і or . Деформацію електродів L_1, L_3 і L_2 відповідно в електроди l_1, l_3 і l_2 задамо рядами Фур'є:

$$r = a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \{ \bar{R}_k(z, \lambda, \mu) e^{ik\theta} + R_k(z, \lambda, \mu) e^{-ik\theta} \}, \quad (13')$$

де $R_k(z, \lambda, \mu)$ визначені для $z_1 \leq |z| \leq z_2$ (електроди l_1 і l_3), і

$$r = a_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \{ \bar{P}_k(z, \lambda, \mu) e^{ik\theta} + P_k(z, \lambda, \mu) e^{-ik\theta} \}, \quad (13'')$$

де $P_k(z, \lambda, \mu)$ визначені для $0 \leq |z| \leq z_3$ (електрод l_2). Будемо вважати, що мають місце розклади в ряд Тейлора:

$$R_k(z, \lambda, \mu) = \lambda R'_{k\lambda}(z) + \mu R'_{k\mu}(z) + \frac{\lambda^2}{2} R''_{k\lambda^2}(z) + \lambda \mu R''_{k\lambda\mu}(z) + \frac{\mu^2}{2} R''_{k\mu^2}(z) + O(\lambda^m \mu^n), \quad (14)$$

$$P_k(z, \lambda, \mu) = \lambda P'_{k\lambda}(z) + \mu P'_{k\mu}(z) + \frac{\lambda^2}{2} P''_{k\lambda^2}(z) + \lambda \mu P''_{k\lambda\mu}(z) + \frac{\mu^2}{2} P''_{k\mu^2}(z) + O(\lambda^m \mu^n).$$

Коефіцієнти розкладів (14) є похідні 1-го і 2-го порядків по λ і μ відповідно від $R_k(z, \lambda, \mu)$ і $P_k(z, \lambda, \mu)$ при $\lambda = \mu = 0$.

Будемо називати еліптичну дисторсію симетричною, якщо перетини, перпендикулярні до осі oz , для електродів l_1, l_2, l_3 , є еліпси, в яких великі і малі осі відповідно паралельні. Така симетрична еліптичність буде характеризуватися, наприклад, значеннями

$$R'_{2\lambda}(z) = a_1, \quad R'_{2\mu}(z) = \pm a_1, \quad P'_{\lambda}(z) = a_2, \quad P'_{2\mu}(z) = \pm a_2 \quad (15)$$

при нульових значеннях інших коефіцієнтів розкладу (14). Легко переконатися, що при цій умові в перетинах електродів l_1, l_3 і l_2 будуть відповідно еліпси з центром на осі oz :

$$r = a_1[1 + 2(\lambda \pm \mu) \cos 2\theta] \quad \text{і} \quad r = a_2[1 + 2(\lambda \pm \mu) \cos 2\theta].$$

Поверхні електродів лінзи є екіпотенціальні поверхні поля потенціалу, і тому для електродів l_1 і l_3 з (7) і (13') впливає

$$\begin{aligned} n(A_v) &= \lambda n_1(A_v) + \mu n_2(A_v) + \frac{\lambda^2}{2} n_{11}(A_v) + \lambda \mu n_{12}(A_v) + \frac{\mu^2}{2} n_{22}(A_v) + O(\lambda^m \mu^n) = \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \{ \bar{R}_k(z, \lambda, \mu) e^{ik\theta} + R_k(z, \lambda, \mu) e^{-ik\theta} \}. \end{aligned}$$

Користуючись тепер розкладом (14) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях λ і μ , одержимо коефіцієнти переміщень

$$\begin{aligned} n_1(A_v) &= - \sum_{k=1}^{\infty} \{ \bar{R}'_{k\lambda}(z) e^{ik\theta} + R'_{k\lambda}(z) e^{-ik\theta} \}; \\ n_2(A_v) &= - \sum_{k=1}^{\infty} \{ \bar{R}'_{k\mu}(z) e^{ik\theta} + R'_{k\mu}(z) e^{-ik\theta} \}; \\ n_{11}(A_v) &= - \sum_{k=1}^{\infty} \{ \bar{R}''_{k\lambda^2}(z) e^{ik\theta} + R''_{k\lambda^2}(z) e^{-ik\theta} \}; \\ n_{12}(A_v) &= - \sum_{k=1}^{\infty} \{ \bar{R}''_{k\lambda\mu}(z) e^{ik\theta} + R''_{k\lambda\mu}(z) e^{-ik\theta} \}; \\ n_{22}(A_v) &= - \sum_{k=1}^{\infty} \{ \bar{R}''_{k\mu^2}(z) e^{ik\theta} + R''_{k\mu^2}(z) e^{-ik\theta} \}. \end{aligned} \quad (16)$$

Такі ж самі вирази коефіцієнтів переміщень одержимо і для електрода l_2 з заміною в (16) похідних від $R_k(z, \lambda, \mu)$ по λ і μ при $\lambda = \mu = 0$ відповідними похідними від $P_k(z, \lambda, \mu)$.

Граничні умови (12) з врахуванням умов (15) і (16) при нульових значеннях всіх інших коефіцієнтів розкладу (14) дають для електродів l_1 і l_3

$$\begin{aligned} u_1(A_v) &= -n_1(A_v) u'_n(A_v) = \sum_{k=1}^{\infty} \{ \bar{R}'_{k\lambda}(z) e^{ik\theta} + R'_{k\lambda}(z) e^{-ik\theta} \} 2 \frac{\partial f_0}{\partial n} = \\ &= 2a_1 (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) \frac{\partial f_0}{\partial n}. \end{aligned} \quad (17')$$

Тут $u'_n(A_v)$ — нормальна похідна потенціалу незбуреної лінзи і, як легко бачити з (3), збігається з $2 \frac{\partial f_0}{\partial n}$.

Аналогічно на l_2

$$u_1(A_v) = 2a_2(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) \frac{\partial f_0}{\partial n}. \quad (17'')$$

Вважаючи в розкладі (3) $f_k(r, z)$ ($k=1, 2, \dots$) функціями параметрів λ і μ такими, що

$$f_k(r, z, \lambda, \mu) = \lambda f'_{k\lambda}(r, z, 0, 0) + \mu f'_{k\mu}(r, z, 0, 0) + O(\lambda^m \mu^n),$$

одержимо збурений потенціал у вигляді

$$\begin{aligned} u^*(r, z, \theta) &= 2f_0(r, z) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \{ \bar{f}'_{k\lambda}(r, z) e^{ik\theta} + f'_{k\lambda}(r, z) e^{-ik\theta} \} + \\ &+ \mu \sum_{k=1}^{\infty} \{ \bar{f}'_{k\mu}(r, z) e^{ik\theta} + f'_{k\mu}(r, z) e^{-ik\theta} \} + O(\lambda^m \mu^n) = \\ &= u(r, z, \theta) + \lambda u_1(r, z, \theta) + \mu u_2(r, z, \theta) + O(\lambda^m \mu^n). \end{aligned} \quad (17)$$

Звідки

$$\left. \begin{aligned} u(r, z, \theta) &= 2f_0(r, z), \\ u_1(r, z, \theta) &= \sum_{k=1}^{\infty} \{ \bar{f}'_{k\lambda}(r, z) e^{ik\theta} + f'_{k\lambda}(r, z) e^{-ik\theta} \}, \\ u_2(r, z, \theta) &= \sum_{k=1}^{\infty} \{ \bar{f}'_{k\mu}(r, z) e^{ik\theta} + f'_{k\mu}(r, z) e^{-ik\theta} \} \end{aligned} \right\}. \quad (18)$$

Для визначення $f_0(r, z)$, враховуючи (4) і (5), одержимо задачу — знайти розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2} = 0 \quad (19)$$

зовні L_1, L_2, L_3 , який би задовольняв умови

$$f_0(r, z) = \frac{1}{2} \text{ на } L_1, L_3; \quad f_0(r, z) = 0 \text{ на } L_2; \quad \frac{\partial f_0(0, z)}{\partial r} = 0. \quad (20)$$

Тому що на електродах лінзи вирази (17'), (17'') і (18) повинні збігатися, потрібно у (18) вважати $f'_{2\lambda}(r, z) \neq 0$, $f'_{k\lambda}(r, z) = 0$ для всіх $k \neq 2$, і для визначення $f'_{2\lambda}(r, z)$ одержуємо (з врахуванням (4) і (5)) задачу — знайти розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 f'_{2\lambda}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f'_{2\lambda}}{\partial r} + \frac{\partial^2 f'_{2\lambda}}{\partial z^2} - \frac{2^2}{r^2} f'_{2\lambda} = 0 \quad (21)$$

зовні електродів L_1, L_2, L_3 , який би задовольняв умови

$$\begin{aligned} f'_{2\lambda}(r, z) &= 2a_1 \frac{\partial f_0}{\partial n} \text{ на } L_1 \text{ і } L_3; \\ f'_{2\lambda}(r, z) &= 2a_2 \frac{\partial f_0}{\partial n} \text{ на } L_2; \\ f'_{2\lambda}(0, z) &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Таку ж саму задачу (21), (22) матимемо для знаходження функції $f'_{2\mu}(r, z)$, що дозволяє у випадку симетричної еліптичної дисторсії користуватися лише одним параметром збурення. Наведемо приклад, коли необхідно вводити два параметри збурення: $R'_{2\lambda}(z) = R'_{2\mu}(z) = a_1$ на l_1 і l_3 , $P'_{2\lambda}(z) = a_2$, $P'_{2\mu}(z) = -a_2$ на l_2 .

Тоді за використаною вже схемою для знаходження $f'_{2\lambda}(r, z)$ і $f'_{2\mu}(r, z)$ одержимо задачу, які будуть відрізнятися знаком в граничних умовах на l_2 .

СХЕМА ЗНАХОДЖЕННЯ ЗБУРЕННЯ ПОТЕНЦІАЛУ

Задачі (19), (20) і (21), (22) можуть бути розв'язані комбінацією методів прямих і спряжених. Т. Л. Мартинович і Б. М. Кордуба нещодавно розв'язали задачу (19), (20) комбінацією методу прямих та інтегральних перетворень [2].

Розглянемо задачу (21), (22), позначивши шукану функцію $f'_{2\lambda}(r, z)$ через $\Psi(r, z)$ і вважаючи відомим розв'язок задачі (19), (20). Враховуючи, що розв'язок просторової задачі Діріхле для рівняння Лапласа прямує до нуля на нескінченності, завжди можна в межах точності, яка вимагається, замінити задачу (21), (22) такою ж задачею для симетричної відносно осі oz полоси Q з границею $l \cup l_1 \cup l_2 \cup l_3$ (рис. 2), а саме: знайти в полосі Q розв'язок рівняння

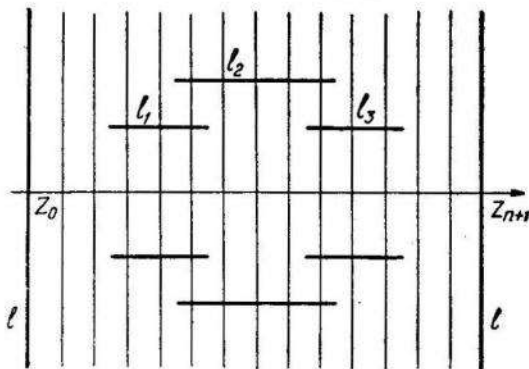


Рис. 2.

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{4}{r^2} \Psi = 0, \quad (21)$$

який задовольняє умови

$$\begin{aligned} \Psi(r, z) &= 2a_1 \frac{\partial f_0}{\partial n} \text{ на } l_1 \text{ і } l_3; \\ \Psi(r, z) &= 2a_2 \frac{\partial f_0}{\partial n} \text{ на } l_2; \\ \Psi(r, z) &= 0 \text{ на } l; \\ \Psi(0, z) &= 0. \end{aligned} \quad (22')$$

З симетрії функції $f_0(r, z)$ відносно осей or і oz впливає і симетрія відносно тих же осей функції $\Psi(r, z)$. Тому достатньо знайти $\Psi(r, z)$ в чверті полоси Q , що знаходиться, наприклад, між додатними напрямками осей or і oz .

Розв'язок $f_0(r, z)$ задачі (19), (20) зображується потенціалом простого шару, нормальна похідна якого розривна при переході через електроди лінзи. Шукана функція $\Psi(r, z)$ задачі (21), (22') на електродах лінзи виражається через $\frac{\partial f_0}{\partial n}$, і тому природно під $\frac{\partial f_0}{\partial n}$ в умовах (22') розуміти граничні значення $\frac{\partial f_0}{\partial n^-}$ і $\frac{\partial f_0}{\partial n^+}$ при наближенні до електродів по нормалі знизу і зверху відповідно.

Розіб'ємо полосу Q множиною рівновіддалених паралельних прямих $z=z_k$ ($k=0, 1, \dots, n+1$) так, щоб $z=z_0$ і $z=z_{n+1}$ збіглися з границею l полоси Q . Розглядаючи рівняння (21) при $z=z_k$ ($1 \leq k \leq n$) і заміняючи в останньому

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \cong \frac{\Psi(r, z_{k+1}) - 2\Psi(r, z_k) + \Psi(r, z_{k-1}))}{h^2},$$

де $h=z_{k+1}-z_k$, і позначаючи потім $\Psi(r, z_k)$ через $\Psi_k(r)$, одержимо систему диференціально-різницевих рівнянь, яка за допомогою матриць

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{\Psi}(r) = \begin{pmatrix} \Psi_1(r) \\ \vdots \\ \Psi_n(r) \end{pmatrix}$$

набуде вигляду

$$\frac{\partial^2 \vec{\Psi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial r} + \frac{1}{h^2} T \vec{\Psi} - \frac{4}{r^2} \vec{\Psi} = 0. \quad (23)$$

Відомо [3], що $T = P \Lambda P$, $PP = E$ (одинична матриця),

$$P = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \left\| \sin \frac{ij\pi}{n+1} \right\|_1^n, \\ \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_k = -4 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)} \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Домножаючи рівняння (23) на матрицю P зліва і позначаючи $P \vec{\Psi}$ через $\vec{\tilde{\Psi}}$, одержимо

$$\frac{d^2 \vec{\tilde{\Psi}}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \vec{\tilde{\Psi}}}{dr} + \frac{1}{h^2} \Lambda \vec{\tilde{\Psi}} - \frac{4}{r^2} \vec{\tilde{\Psi}} = 0, \quad (24)$$

або

$$\frac{d^2 \tilde{\Psi}_k}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \tilde{\Psi}_k}{dr} + \frac{\lambda_k}{h^2} \tilde{\Psi}_k - \frac{4}{r^2} \tilde{\Psi}_k = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (24')$$

Після позначення $\frac{\lambda_k}{h^2} = -\frac{4 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}}{h^2} = -\mu_k^2$ і заміни $r=it$ рівняння (24') перейде в рівняння Бесселя

$$t^2 \frac{d^2 \tilde{\Psi}_k}{dt^2} + t \frac{d \tilde{\Psi}_k}{dt} + (\mu_k^2 t^2 - 4) \tilde{\Psi}_k = 0,$$

і, таким чином, лінійно незалежними розв'язками рівняння (24') при всіх $k=1, \dots, n$ будуть модифіковані функції Бесселя другого порядку $I_2(\mu_k r)$ і $K_2(\mu_k r)$.

Рівняння системи (23) повинні задовольнятися шуканим розв'язком на всіх прямих $z=z_k$ ($1 \leq k \leq n$), крім точок перетину прямих з електродами l_1, l_2, l_3 . У нашому випадку збурення $u_1(r, z, \theta)$ може бути зобра-

жене сумою потенціалів подвійного і простого шару. Як відомо, потенціал подвійного шару розривний при переході через границю, а різниця граничних значень його нормальних похідних при наближенні до границі з різних сторін дорівнює нулеві. Щодо потенціалу простого шару, то він при цьому неперервний, а його нормальна похідна розривна. Отже,

$$u_1(r, z, \theta) = \bar{\Psi}(r, z) e^{2i\theta} + \Psi(r, z) e^{-2i\theta};$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial r} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial r} e^{2i\theta} + \frac{\partial \Psi}{\partial r} e^{-2i\theta}$$

при переході через електроди лінзи зазнають розривів. Ця ж властивість, очевидно, переноситься на $\Psi(r, z)$ і $\frac{\partial \Psi}{\partial r}$. Позначимо через q_k і σ_k стрибки відповідно функцій $\Psi(r, z)$ і $\frac{\partial \Psi}{\partial r}$ при переході через електроди лінзи по прямій $z = z_k$. Із рівності $P\bar{\Psi}(r) = \tilde{\Psi}(r)$ маємо

$$\tilde{\Psi}_k(r) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{i=1}^n \sin \frac{ki\pi}{n+1} \Psi_i(r) \quad (k=1, \dots, n), \quad (25)$$

звідки випливає, що всі рівняння системи (24) або (24') повинні задовольнятися для всіх $0 \leq r < \infty$, крім $r = a_1$ і $r = a_2$. Якщо через $\tilde{q}_k(r)$ і $\tilde{\sigma}_k(r)$ позначити розриви функцій $\tilde{\Psi}_k(r)$ и $\frac{\partial \tilde{\Psi}_k}{\partial r}$ при переході через прямі $r = a_1$ і $r = a_2$ відповідно, то

$$\begin{aligned} \tilde{q}_k(r) &= \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{i=1}^n \sin \frac{ki\pi}{n+1} q_i(r); \\ \tilde{\sigma}_k(r) &= \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{i=1}^n \sin \frac{ki\pi}{n+1} \sigma_i(r) \quad (k=1, \dots, n). \end{aligned} \quad (26)$$

Таким чином, приходимо до необхідності знаходження розв'язку рівнянь

$$\frac{d^2 \tilde{\Psi}_k^{(s)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \tilde{\Psi}_k^{(s)}}{dr} - \left(\mu_k^2 + \frac{4}{r^2} \right) \tilde{\Psi}_k^{(s)} = 0 \quad (k=1, \dots, n) \quad s=1, 2, 3, \quad (27)$$

де $\tilde{\Psi}_k^{(1)}(r)$, $\tilde{\Psi}_k^{(2)}(r)$, $\tilde{\Psi}_k^{(3)}(r)$ — розв'язки рівняння (27) відповідно для $0 \leq r < a_1$; $a_1 < r < a_2$; $a_2 < r < \infty$. Ці розв'язки повинні задовольняти граничні умови та умови спряження:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_k^{(1)}(0) &= 0, \quad \tilde{\Psi}_k^{(3)}(\infty) = 0; \\ \tilde{\Psi}_k^{(1)}(a_1-0) - \tilde{\Psi}_k^{(2)}(a_1+0) &= q_k(a_1); \\ \left. \frac{d \tilde{\Psi}_k^{(1)}}{dr} \right|_{r=a_1-0} - \left. \frac{d \tilde{\Psi}_k^{(2)}}{dr} \right|_{r=a_1+0} &= \tilde{\sigma}_k(a_1); \\ \tilde{\Psi}_k^{(2)}(a_2-0) - \tilde{\Psi}_k^{(3)}(a_2+0) &= \tilde{q}_k(a_2); \\ \left. \frac{d \tilde{\Psi}_k^{(2)}}{dr} \right|_{r=a_2-0} - \left. \frac{d \tilde{\Psi}_k^{(3)}}{dr} \right|_{r=a_2+0} &= \tilde{\sigma}_k(a_2) \quad (k=1, \dots, n). \end{aligned} \quad (28)$$

Загальний розв'язок рівнянь (27) має вигляд

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_k^{(1)}(r) &= A_k I_2(\mu_k r) + M_k K_2(\mu_k r) & (0 \leq r < a_1); \\ \tilde{\Psi}_k^{(2)}(r) &= B_k I_2(\mu_k r) + C_k K_2(\mu_k r) & (a_1 < r < a_2); \\ \tilde{\Psi}_k^{(3)}(r) &= N_k I_2(\mu_k r) + D_k K_2(\mu_k r) & (a_2 < r < \infty).\end{aligned}$$

Використовуючи відомі властивості функцій $I_2(\mu_k r)$ і $K_2(\mu_k r)$ при $r \rightarrow 0$ і $r \rightarrow \infty$, а також те, що

$$I_2(t) \frac{dK_2(t)}{dt} - K_2(t) \frac{dI_2(t)}{dt} = -\frac{1}{t},$$

одержимо

$$\begin{aligned}M_k &= N_k = 0; \\ A_k &= a_1 \left[\tilde{\sigma}_k(a_1) K_2(\mu_k a_1) - \tilde{q}_k(a_1) \frac{dK_2(\mu_k r)}{dr} \Big|_{r=a_1} \right] + \\ &\quad + a_2 \left[\tilde{\sigma}_k(a_2) K_2(\mu_k a_2) - \tilde{q}_k(a_2) \frac{dK_2(\mu_k r)}{dr} \Big|_{r=a_2} \right]; \\ B_k &= a_2 \left[\tilde{\sigma}_k(a_2) K_2(\mu_k a_2) - \tilde{q}_k(a_2) \frac{dK_2(\mu_k r)}{dr} \Big|_{r=a_2} \right]; \\ C_k &= a_1 \left[\tilde{\sigma}_k(a_1) I_2(\mu_k a_1) - \tilde{q}_k(a_1) \frac{dI_2(\mu_k r)}{dr} \Big|_{r=a_1} \right]; \\ D_k &= a_1 \left[\tilde{\sigma}_k(a_1) I_2(\mu_k a_1) - \tilde{q}_k(a_1) \frac{dI_2(\mu_k r)}{dr} \Big|_{r=a_1} \right] + \\ &\quad + a_2 \left[\tilde{\sigma}_k(a_2) I_2(\mu_k a_2) - \tilde{q}_k(a_2) \frac{dI_2(\mu_k r)}{dr} \Big|_{r=a_2} \right].\end{aligned} \tag{29}$$

Але

$$\vec{\Psi}(r) = P P \vec{\Psi}(r) = P \vec{\Psi}(r)$$

і, отже,

$$\Psi_j(r) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{k=1}^n \sin \frac{kj\pi}{n+1} \tilde{\Psi}_k(r).$$

Враховуючи тепер розв'язок задачі (27), (28), маємо

$$\Psi_j(r) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{aligned} &A_k I_2(\mu_k r) & (0 \leq r < a_1) \\ &B_k I_2(\mu_k r) + C_k K_2(\mu_k r) & (a_1 < r < a_2) \\ &D_k K_2(\mu_k r) & (a_2 < r < \infty) \end{aligned} \right\} \sin \frac{kj\pi}{n+1}, \tag{30}$$

($j=1, 2, \dots, n$)

де A_k , B_k , C_k і D_k визначаються за (29).

Функції

$$q_k(r) \Big|_{r=a_1, a_2} = \left[\frac{\partial f_0(r, z_k)}{\partial r^-} - \frac{\partial f_0(r, z_k)}{\partial r^+} \right]_{r=a_1, a_2}$$

будуть відомі, якщо відповідна задача (19), (20) для незбуреної лінзи розв'язана, а для функцій $\sigma_k(r) \Big|_{r=a_1, a_2}$ можна скласти систему алге-

браїчних рівнянь, задовольняючи розв'язком (30) граничні умови (22') на електродах l_1, l_2, l_3 , розуміючи під $\frac{\partial f_0}{\partial n}$ відповідно $\frac{\partial f_0}{\partial r^-}$ або $\frac{\partial f_0}{\partial r^+}$. Якщо при цьому врахувати симетрію матриць (стовпців) $\vec{q}(r)$ і $\vec{\sigma}(r)$ на електродах відносно осі or , а саме:

$$\begin{aligned}\vec{q}(a_1) &= (q_1(a_1), \dots, q_n(a_1)) = \\ &= (0, \dots, 0, q_s(a_1), \dots, q_m(a_1), 0, \dots, 0, q_m(a_1), \dots, q_s(a_1), 0, \dots, 0); \\ \vec{q}(a_2) &= (0, \dots, 0, q_l(a_2), \dots, q_{l+p}(a_2), q_{l+p+1}(a_2), q_{l+p}(a_2), \dots, q_l(a_2), 0, \dots, 0); \\ \vec{\sigma}(a_1) &= (\sigma_1(a_1), \dots, \sigma_n(a_1)) = \\ &= (0, \dots, 0, \sigma_s(a_1), \dots, \sigma_m(a_1), 0, \dots, 0, \sigma_m(a_1), \dots, \sigma_s(a_1), 0, \dots, 0); \\ \vec{\sigma}(a_2) &= (0, \dots, 0, \sigma_l(a_2), \dots, \sigma_{l+p}(a_2), \sigma_{l+p+1}(a_2), \sigma_{l+p}(a_2), \dots, \sigma_l(a_2), 0, \dots, 0),\end{aligned}\tag{31}$$

і провести елементарні спрощення, то система алгебраїчних рівнянь для визначення $\sigma_k(r)|_{r=a_1, a_2}$ набере вигляду

$$\begin{aligned}& \frac{4}{n+1} \sum_{\alpha=1}^{\frac{n+1}{2}} \left\{ a_1 \left[K_2(\mu_{2\alpha-1} a_1) \sum_{\beta=s}^m \sin \frac{\beta(2\alpha-1)\pi}{n+1} \sigma_\beta(a_1) - \frac{dK_2(\mu_{2\alpha-1} r)}{dr} \right]_{r=a_1} \times \right. \\ & \times \sum_{\beta=s}^m \sin \frac{\beta(2\alpha-1)\pi}{n+1} q_\beta(a_1) \left. + a_2 \left[K_2(\mu_{2\alpha-1} a_2) \sum_{\gamma=l}^{l+p+1} \sin \frac{\gamma(2\alpha-1)\pi}{n+1} \sigma_\gamma(a_2) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{dK_2(\mu_{2\alpha-1} r)}{dr} \right]_{r=a_2} \sum_{\gamma=l}^{l+p+1} \sin \frac{\gamma(2\alpha-1)\pi}{n+1} q_\gamma(a_2) \right\} I_2(\mu_{2\alpha-1} a_1) \sin \frac{(2\alpha-1)j\pi}{n+1} = \\ & = \frac{\partial f_0}{\partial r^-} \Big|_{\substack{z=z_j \\ r=a_1-0}} \quad (j=s, \dots, m);\end{aligned}\tag{32}$$

$$\begin{aligned}& \frac{4}{n+1} \sum_{\alpha=1}^{\frac{n+1}{2}} \left\{ a_2 \left[K_2(\mu_{2\alpha-1} a_2) \sum_{\gamma=l}^{l+p+1} \sin \frac{\gamma(2\alpha-1)\pi}{n+1} \sigma_\gamma(a_2) - \frac{dK_2(\mu_{2\alpha-1} r)}{dr} \right]_{r=a_2} \times \right. \\ & \times \sum_{\gamma=l}^{l+p+1} \sin \frac{\gamma(2\alpha-1)\pi}{n+1} q_\gamma(a_2) \left. + a_1 \left[I_2(\mu_{2\alpha-1} a_1) \sum_{\beta=s}^m \sin \frac{\beta(2\alpha-1)\pi}{n+1} \times \right. \right. \\ & \times \sigma_\beta(a_1) - \frac{dI_2(\mu_{2\alpha-1} r)}{dr} \Big|_{r=a_1} \sum_{\beta=s}^m \sin \frac{\beta(2\alpha-1)\pi}{n+1} q_\beta(a_1) \left. \right] K_2(\mu_{2\alpha-1} a_2) \Big\} \times \\ & \times \sin \frac{(2\alpha-1)j\pi}{n+1} = \frac{\partial f_0}{\partial r^-} \Big|_{\substack{z=z_j \\ r=a_2-0}} \quad (j=l, \dots, l+p+1).\end{aligned}$$

Тут під $\sigma_{l+p+1}(a_2)$ і $q_{l+p+1}(a_2)$ треба розуміти відповідно $\frac{1}{2} \sigma_{l+p+1}(a_2)$ і $\frac{1}{2} q_{l+p+1}(a_2)$.

Таким чином, наближений розв'язок задачі (21), (22') на кожній з прямих $z=z_j$ одержимо за формулою (30) з врахуванням (29) і розв'язку системи (32), а розв'язок задачі (1), (2) у випадку симетричної еліптичної дисторсії можна записати у вигляді

$$u(r, z, \theta) = 2f_0(r, z) + 2\lambda \Psi(r, z) \cos 2\theta + O(\lambda^2), \quad (33)$$

де $f_0(r, z)$ і $\Psi(r, z)$ — розв'язки відповідно задач (19), (20) і (21), (22').

ЛІТЕРАТУРА

1. P. A. Sturrock. Phil. Trans., A243, 868 (1951).
2. Т. Л. Мартынович, Б. М. Кордуба. Расчет электростатических полей с осевой симметрией методом прямых и интегральных преобразований. Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 5, № 6 (1965).
3. Г. Н. Положий. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. Изд-во Киев. ун-та, 1962.

Е. С. ДОРОЖОВСКИЙ, В. Г. КОСТЕНКО

ПОЛЕ ПОТЕНЦИАЛА ЭЛЕКТРОННОЙ ЛИНЗЫ С НАРУШЕННОЙ ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ

(резюме)

В работе дается схема нахождения потенциала электронной линзы, мало отличающейся от осесимметрической (случай эллиптической дисторсии), с применением метода возмущений и метода прямых.

Б. В. ВАЛЬКО, І. О. ПРУСОВ, Л. О. РОМАНІВ

ОСЕСИМЕТРИЧНИЙ ПОТЕНЦІАЛ СИСТЕМИ ЕЛЕКТРОДІВ МАЛОЇ ТОВЩИНИ

Звичайно визначення потенціалу електродів зводиться до визначення густини зарядів на їх поверхні. Якщо густина $q(S)$ на поверхні електродів знайдена, то потенціал зовні електродів, як відомо, обчислюється за формулою

$$U = \iint_S \frac{q(S) dS}{r'}, \quad (1)$$

де S — сукупність поверхонь всіх електродів; r' — віддаль між фіксованою точкою зовні електродів і довільною точкою елемента поверхні dS . Надалі будемо вважати, що електродами є тіла обертання малої товщини, які з невеликою похибкою можна прийняти за розімкнуті поверхні обертання з спільною віссю обертання для всіх електродів системи.

В розглянутому випадку формула (1) в циліндричній системі координат набере вигляду

$$U(r, z) = \int_s \frac{q(s) K(k) ds}{\sqrt{\alpha^2 + (R+r)^2}}, \quad (2)$$

де s — твірна поверхні обертання; $\alpha = \xi - z$, r і z — координати фіксованої точки зовні електродів, R і ξ — циліндричні координати довільної точки елемента твірної ds ,

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad k^2 = \frac{4Rr}{\alpha^2 + (R+r)^2}.$$

У випадку, коли густина $q(s)$ невідома, формула (2) для точок $M(r, z)$ на поверхні S є інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду, розв'язок якого зв'язаний з великим обсягом обчислювальних робіт.

Як показали приклади розрахунку потенціалу системи конкретних електродів малої товщини (електронних ліній), найбільш раціональним є розв'язок, оснований на припущенні, що густина $q(s)$ розподілена на деякій поверхні всередині електрода, а задоволення граничних умов здійснюється в точках, дещо віддалених від цієї поверхні [2]. Поряд з цим ефективність числових розрахунків істотно залежить від способу зображення густини $q(s)$. Тут ми відзначимо два з них, які, на нашу думку, найбільш ефективні.

1. Зображення густини $q(s)$ у вигляді суми кільцевих зарядів на краях поверхні

$$\sum_j \frac{C_j K(r, z, R_j, z_j)}{\sqrt{(z_j - z)^2 + (R_j + r)^2}} \quad (3)$$

і неперервно розподіленої густини

$$q_0 = \sum_{k=1}^n \frac{a_k b_k}{b_k^2 + (s_k - s)^2} \quad (4)$$

на поверхні S , де R_j і z_j — циліндричні координати, які визначають положення кінців дуги s ; s_k — дугові координати на дузі s ; b_k — наперед задані нелінійні параметри; C_j і a_k — довільні лінійні параметри.

2. Зображення густини у вигляді суми кільцевих зарядів (3) і кусочно рівномірно розподіленої густини

$$q_0 = a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2 + \dots + a_n \eta_n \quad (5)$$

на поверхні S , де $\eta_k = 1$ на деякій частині дуги s і $\eta_k = 0$ на всіх інших частинах цієї дуги.

Обравши одне з цих зображень, знаходимо довільні постійні, які входять в нього, задовольняючи граничні умови в окремих точках (по можливості в точках максимумів потенціалу від відповідних доданків густини). Можна використати метод найменших квадратів, взявши кількість рівнянь в 1,5—2 рази більше ніж кількість невідомих.

На відміну від [2], де густини зображаються у вигляді (4), введення запропонованих вище кільцевих зарядів приводить до значного зменшення затрат часу розрахунку. Те ж саме стосується зображення густини у вигляді (5).

У випадку, коли який-небудь електрод лінзи має прямолінійну твірну, паралельну осі симетрії лінзи, його потенціал на основі другого зображення густини має вигляд

$$U(r, z) = \frac{C_1 K(r, z, R, z_1)}{\sqrt{(z_1 - z)^2 + (R + r)^2}} + \frac{C_2 K(r, z, R, z_2)}{\sqrt{(z_2 - z)^2 + (R + r)^2}} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k F(r, z, \xi, R), \quad \begin{matrix} \xi_{k+1} \\ \vdots \\ \xi_k \end{matrix} \quad (6)$$

де R — радіус циліндра; z_1 і z_2 — параметри, які визначають кінці твірної циліндра; (ξ_k, ξ_{k+1}) — відрізки постійної густини; $\xi_0 = z_1$; $\xi_n = z_2$;

$$F(r, z, \xi, R) = I_0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + b^2}}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + b_0^2}} d\theta; \quad \begin{aligned} b^2 &= (R - r)^2 + 4Rr \sin^2 \theta; \\ b_0^2 &= (R - r)^2 + 4Rr \theta^2, \quad \alpha = \xi - z; \end{aligned} \quad (7)$$

$$I_0 = \frac{\pi}{2} \ln(\alpha + n) + \frac{\alpha}{\sqrt{4Rr}} \ln \frac{1 - k_1}{1 + k_1} + \frac{R - r}{\sqrt{Rr}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{(R - r) k_1}{\alpha + m};$$

$$k_1 = \frac{\pi \sqrt{Rr}}{m + n}; \quad m = \sqrt{\alpha^2 + (R - r)^2}; \quad n = \sqrt{m^2 + n^2 Rr}.$$

Характерною особливістю першого зображення густини є можливість збільшення точності задоволення граничних умов, при незмінній кількості невідомих параметрів, що досягається зміною значень нелінійних параметрів b_k після перевірки граничних умов в проміжних точках. Це особливо важливо тому, що у зв'язку з накопиченням похибок округлення може виявитися неможливим збільшити точність задоволення граничних умов шляхом збільшення кількості невідомих у зображенні густини. Крім того, перше зображення густини більш вигідне для розрахунків траєкторій електронів.

Відзначимо, що розглянута задача визначення потенціалу є задачею, некоректно поставленою. Внаслідок цього густина, визначена вказаним вище способом, може деякою мірою відрізнятися від дійсної фізичної густини на електродах. Тому тоді, коли нас цікавить не тільки потенціал, як у даному випадку, але і фактичний розподіл густини на електродах, можна використати метод регуляризації А. М. Тихонова [1].

Примітка. У випадку, коли твірна s на поверхні S , на якій розподілена густина $q(s)$, задана в параметричній формі

$$\xi = \xi(\tau), \quad R = R(\tau),$$

формули (2) і (4) можна записати у вигляді

$$U(r, z) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} q(\tau) \frac{K(k) d\tau}{V[\xi(\tau) - z]^2 + [R(\tau) + r]^2}; \quad (8)$$

$$k^2 = \frac{4R(\tau)r}{[\xi(\tau) - z]^2 + [R(\tau) + r]^2}, \quad K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{V1 - k^2 \sin^2 \theta}; \quad (9)$$

$$q_0(\tau) = \sum_{(k)} \frac{a_k b_k^i}{b_k^2 + (\tau - \tau_k)^2}, \quad \tau_1 \leq \tau_k \leq \tau_2, \quad (10)$$

де $\xi = \xi(\tau)$ і $R = R(\tau)$ — однозначні диференційовані функції; τ_1 і τ_2 — значення параметра τ , які відповідають кінцям твірної.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. Н. Тихонов. О регуляризации некоректно поставленных задач. ДАН СССР, 42—53, 153, № 1 (1963).
2. Б. В. Валько, І. О. Прусов, Й. В. Людкевич. Визначення осесимметричного потенціалу системи електродів методом нелінійних параметрів. Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 1, 1965.

Б. В. ВАЛЬКО, И. А. ПРУСОВ, Л. Е. РОМАНИВ

ОСЕССИММЕТРИЧНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ СИСТЕМЫ ЭЛЕКТРОДОВ МАЛОЙ ТОЛЩИНЫ

(резюме)

Рассматривается задача об определении осесимметричного потенциала системы металлических электродов малой толщины h , обращающихся при $h \rightarrow 0$ в разомкнутые поверхности вращения. Полагается, что неизвестные плотности имеют лишь вспомогательное значение для определения потенциала и распределены на некоторой поверхности внутри электродов по закону (4) или (5) с кольцевыми зарядами (3) вблизи торцов электродов на окружностях внутри электродов. Произвольные коэффициенты, входящие в эти представления плотностей, могут быть найдены путем удовлетворения граничным условиям в отдельных точках или методом наименьших квадратов.

О. О. ІВАНОВА

n -ПАРАМЕТРИЧНА ПІВГРУПА ЛІНІЙНИХ ОБМЕЖЕНИХ ОПЕРАЦІЙ І ЗВ'ЯЗОК З ТЕОРІЄЮ АПРОКСИМАЦІЙ

Нехай $\{T(t)\}$ ($t \geq 0$) — однопараметрична півгрупа лінійних обмежених операцій, які перетворюють деякий банаховий простір сам в себе: $T(t)f \in B$, якщо $f \in B$.

Позначимо через A інфінітезимальну операцію півгрупи $\{T(t)\}$:

$$Af = \lim_{\eta \rightarrow 0} A_{\eta}f,$$

де

$$A_{\eta} = \frac{T(\eta) - I}{\eta},$$

I — одинична операція в B . Відомо, що для рівномірно неперервної півгрупи [1] $T(t) = e^{tA}$, і що A — обмежена операція. Якщо ж $\{T(t)\}$ — сильно неперервна [1] півгрупа, то

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} e^{\xi A_{\eta}} f = T(\xi)f, \quad (\xi \geq 0)$$

де

$$e^{\xi A_{\eta}} f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \xi^n A_{\eta}^n f.$$

Отже, природно ставити питання про наближення $T(\xi)f$ частинними сумами «узагальненого» ряду Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \xi^n A_{\eta}^n f$. Бутцер і Тільман [2] розглядають такі наближення для півгрупи класів $(0, C_1)$ та $(1, C_1)$, (позначення див. в [1] або [2]).

В п. 1 даної роботи розглядаються n -параметричні півгрупи лінійних обмежених операцій певних класів і ставиться питання про наближення їх частинними сумами подвійного ряду Тейлора. Для простоти розглядається двопараметрична півгрупа і доводяться теореми, аналогічні результатам Бутцера і Тільмана [2]. В п. 2 даються деякі застосування цих теорем для конкретних півгруп.

1. Нехай X — дійсний простір Банаха, $f \in X$, $\|f\|$ — норма елемента f . Нехай $E(X)$ — алгебра всіх обмежених лінійних перетворень X в X і $\{T(X)\}$ — двопараметрична півгрупа в $E(X)$, тобто параметр $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, ($\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, (x_1, x_2) одиничний вектор), є елементом евклідового простору $E^{(2)}$.

Аналогічно [1] введемо клас C_1 . А саме, скажемо, що півгрупа $\{T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\} \in C_1$, якщо виконуються умови

$$a_1) T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \in E(X) \text{ для } \alpha_i \geq 0 \ (i=1, 2), \quad T(0)=I;$$

$$a_2) T(x+y) = T(x) T(y) \text{ для } x, y \in E^{(2)};$$

$$a_3) \lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\alpha_2} T(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) f d\xi_1 d\xi_2 - f \right\| = 0, \quad f \in X.$$

Далі скажемо, що $\{T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\} \in (0, C_1)$ або $(1, C_1)$ в залежності від того, яка з умов виконується:

$$b_0) \int_0^1 \int_0^1 \|T(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) f\| d\xi_1 d\xi_2 < \infty$$

чи

$$b_1) \int_0^1 \int_0^1 \|T(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)\| d\xi_1 d\xi_2 < \infty.$$

Відомо [1], що умови a_3 , b_0 і b_1 виконуються, якщо півгрупа сильно неперервна в нулі.

Позначимо через A_i ($i=1, 2$) інфінітезимальні оператори відповідних однопараметричних півгруп $\{T(\alpha_i x_i)\}$, через ΔA_i — область означення оператора A_i . Введемо узагальнені кратні поліноми Тейлора

$$S_{n,m} f = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^m \frac{\alpha_1^k \alpha_2^i}{k! i!} A_1^k A_2^i f,$$

які мають сенс для

$$f \in \Delta A_1^k A_2^i \quad (k=\overline{0, n}; \quad i=\overline{0, m}). \quad (1)$$

Зауважимо, що умову (1) можна замінити умовою

$$f \in \Delta A_1^n A_2^m \cap \Delta A_1^n. \quad (2)$$

Дійсно, покладемо $A_i^0 = I$ ($i=1, 2$). Тоді з умови (1) маємо $f \in \Delta A_1^n A_2^m$ при $k=n$, $i=m$, а при $k=n$, $i=0$ матимемо $f \in \Delta A_1^n$. Навпаки, нехай (2) має місце. Тоді з теореми (10, 9, 4) із [1] випливає, що $f \in \Delta A_2^m A_1^n$ і $A_1^n A_2^m f = A_2^m A_1^n f$.

Тепер нехай $k \leq n$, $i \leq m$. Із $f \in \Delta A_1^n A_2^m$ випливає $f \in \Delta A_1^k A_2^m$, але оскільки $f \in \Delta A_1^k$, то $A_1^k A_2^m f = A_2^m A_1^k f$, а звідси

$$f \in \Delta A_2^i A_1^k \text{ і } A_2^i A_1^k f = A_1^k A_2^i f.$$

Тепер доведемо узагальнену формулу Тейлора, використовуючи відповідну формулу для однопараметричної півгрупи [1]:

$$T(t)f - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} A^k f = \frac{1}{(p-1)!} \int_0^t (t-u)^{p-1} T(u) A^p f du, \quad (f \in \Delta A^p). \quad (3)$$

Нехай $f \in (2)$. Тоді, застосовуючи двічі (3), одержимо

$$\begin{aligned}
T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) f - S_{n-1, m-1} f &= T(\alpha_1 x_1) \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\alpha_2^i}{i!} A_2^i f - S_{n-1, m-1} f + \\
&+ \frac{T(\alpha_1 x_1)}{(m-1)!} \int_0^{\alpha_2} (\alpha_2 - \xi_2)^{m-1} T(\xi_2 x_2) A_2^m f d\xi_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_1^k}{k!} A_1^k \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\alpha_2^i}{i!} A_2^i f + \\
&+ \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\alpha_1} (\alpha_1 - \xi_1)^{n-1} T(\xi_1 x_1) A_1^n \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\alpha_2^i}{i!} A_2^i f d\xi_1 + \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_1^k}{k!} A_1^k \frac{1}{(m-1)!} \int_0^{\alpha_2} (\alpha_2 - \xi_2)^{m-1} T(\xi_2 x_2) A_2^m f d\xi_2 - S_{n-1, m-1} f + \\
&+ \frac{1}{(n-1)! (m-1)!} \int_0^{\alpha_1} (\alpha_1 - \xi_1)^{n-1} T(\xi_1 x_1) A_1^n \int_0^{\alpha_2} (\alpha_2 - \xi_2)^{m-1} T(\xi_2 x_2) \times \\
&\times A_2^m f d\xi_2 d\xi_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\alpha_1} (\alpha_1 - \xi_1)^{n-1} T(\xi_1 x_1) A_1^n \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\alpha_2^i}{i!} A_2^i f d\xi_1 + \\
&+ \frac{1}{(m-1)!} \int_0^{\alpha_2} (\alpha_2 - \xi_2)^{m-1} T(\xi_2 x_2) A_2^m \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_1^k}{k!} A_1^k f d\xi_2 + \\
&+ \frac{1}{(n-1)! (m-1)!} \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\alpha_2} (\alpha_1 - \xi_1)^{n-1} (\alpha_2 - \xi_2)^{m-1} T(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) A_1^n A_2^m f d\xi_2 d\xi_1. \quad (4)
\end{aligned}$$

Якщо до одновимірних інтегралів в (4) застосувати (3), одержимо

$$\begin{aligned}
T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) f - S_{n-1, m-1} f &= T(\alpha_1 x_1) \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\alpha_2^i}{i!} A_2^i f - S_{n-1, m-1} f + \\
&+ T(\alpha_2 x_2) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_1^k}{k!} A_1^k f - S_{n-1, m-1} f + \\
&+ \frac{1}{(n-1)! (m-1)!} \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\alpha_2} (\alpha_1 - \xi_1)^{n-1} (\alpha_2 - \xi_2)^{m-1} T(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) \times \\
&\times A_1^n A_2^m f d\xi_1 d\xi_2.
\end{aligned}$$

Позначивши через

$$S_{m-1}^{(2)} f \text{ і } S_{n-1}^{(1)} f$$

частинні суми

$$\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\alpha_2^i}{i!} A_2^i f \text{ і } \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_1^k}{k!} A_1^k f,$$

останню рівність запишемо у вигляді

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) f - [T(\alpha_1 x_1) S_{m-1}^{(2)} f + T(\alpha_2 x_2) S_{n-1}^{(1)} f - S_{n-1, m-1} f] = \\ = \frac{1}{(n-1)! (m-1)!} \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\alpha_2} (\alpha_1 - \xi_1)^{n-1} (\alpha_2 - \xi_2)^{m-1} T(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) A_1^n A_2^m f d\xi_1 d\xi_2. \quad (5)$$

Теорема 1. Якщо

$$\{T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\} \in (0, C_1) \text{ і } f \in \Delta A_1^n \cap \Delta A_1^n A_2^m,$$

то

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \alpha_1 \rightarrow 0 \\ \alpha_2 \rightarrow 0}} \frac{n! m!}{\alpha_1^n \alpha_2^m} [T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - T(\alpha_1 x_1) S_{m-1}^{(2)} - T(\alpha_2 x_2) S_{n-1}^{(1)} - S_{n-1, m-1}] f - \\ - A_1^n A_2^m f = 0. \quad (6)$$

Отже

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) f - [T(\alpha_1 x_1) S_{m-1}^{(2)} + T(\alpha_2 x_2) S_{n-1}^{(1)} - S_{n-1, m-1}] f = \\ = \frac{\alpha_1^n \alpha_2^m}{n! m!} A_1^n A_2^m f + o(\alpha_1^n \alpha_2^m) = O(\alpha_1^n \alpha_2^m).$$

Доведення.

$$\int_0^{\alpha_1} \int_0^{\alpha_2} T(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) \frac{n! m!}{\alpha_1^n \alpha_2^m} \left[T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) f + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\alpha_1^k \alpha_2^i}{k! i!} A_1^k A_2^i f - \right. \\ \left. - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_1^k}{k!} A_1^k T(\alpha_2 x_2) f - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\alpha_2^i}{i!} A_2^i T(\alpha_1 x_1) f \right] d\xi_1 d\xi_2 = \\ = \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\alpha_2} T(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) \frac{n! m!}{\alpha_1^n \alpha_2^m} \left[T(\alpha_1 x_1) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_1^k}{k!} A_1^k \right] \cdot \left[T(\alpha_2 x_2) - \right. \\ \left. - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\alpha_2^i}{i!} A_2^i \right] f d\xi_2 d\xi_1 = \int_0^{\alpha_1} T(\xi_1 x_1) \frac{n!}{\alpha_1^n} \left[T(\alpha_1 x_1) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_1^k}{k!} A_1^k \right] \times \\ \times \int_0^{\alpha_2} T(\xi_2 x_2) \frac{m!}{\alpha_2^m} \left[T(\alpha_2 x_2) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\alpha_2^i}{i!} A_2^i \right] f d\xi_2 d\xi_1 = \int_0^{\alpha_1} T(\xi_1 x_1) \frac{n!}{\alpha_1^n} \times \\ \times \left[T(\alpha_1 x_1) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_1^k}{k!} A_1^k \right] \cdot [T(\alpha_2 x_2) - I] \frac{m!}{\alpha_2^m} \int_0^{\alpha_2} \left[T(\xi_2 x_2) - \sum_{i=0}^{m-2} \frac{\alpha_2^i}{i!} A_2^i \right] f d\xi_2 d\xi_1 = \\ = \frac{n! m!}{\alpha_1^n \alpha_2^m} \prod_{i=1}^2 [T(s_i x_i) - I] \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\alpha_2} \left[T(\xi_1 x_1) - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\alpha_1^k}{k!} A_1^k \right] \cdot \left[T(\xi_2 x_2) - \right. \\ \left. - \sum_{i=0}^{m-2} \frac{\alpha_2^i}{i!} A_2^i \right] f d\xi_2 d\xi_1 = \frac{n! m!}{\alpha_1^n \alpha_2^m} \prod_{i=1}^2 [T(s_i x_i) - I] \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\alpha_2} [T(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) f - \\ - (S_{n-2}^{(1)} T(\xi_2 x_2) f + S_{m-2}^{(2)} T(\xi_1 x_1) f - S_{n-2, m-2} f)] d\xi_1 d\xi_2,$$

використовуючи те, що $f \in \Delta A_1^n \cap \Delta A_2^m A_2^m$, формулу (2) із [2] та двічі застосовуючи основну тотожність із [2]:

$$\begin{aligned} & \int_0^s T(u) \frac{q!}{t^q} \left[T(t) f - \sum_{k=0}^{q-1} \frac{t^k}{k!} A^k f \right] du = \\ & = [T(s) - I] \frac{q!}{t^q} \int_0^t \left\{ T(u) f - \sum_{k=0}^{q-2} \frac{u^k}{k!} A^k f \right\} du \end{aligned}$$

для $f \in \Delta A^{q-1}$.

Позначимо через $B_{a_1, a_2}^{n, m} f$ вираз

$$\begin{aligned} & \frac{n!m!}{\alpha_1^n \alpha_2^m} \left[T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\alpha_1^k \alpha_2^i}{k!i!} A_1^k A_2^i f - \right. \\ & \left. - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_1^k}{k!} A_1^k T(\alpha_2 x_2) f - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\alpha_2^i}{i!} A_2^i T(\alpha_1 x_1) f \right]. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} & \frac{1}{s_1 s_2} \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\alpha_2} T(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) B_{a_1, a_2}^{n, m} f d\xi_2 d\xi_1 = \\ & = \frac{\prod_{i=1}^2 [T(s_i x_i) - I]}{s_1 s_2} \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\alpha_2} nm \frac{\xi_1^{n-1} \xi_2^{m-1}}{\alpha_1^n \alpha_2^m} B_{\xi_1, \xi_2}^{n-1, m-1} f d\xi_2 d\xi_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Перейдемо до границі при $s_1, s_2 \rightarrow 0$. Внаслідок умови (a_3) існує подвійна границя лівої частини (7), а значить, і границя правої частини. В силу того, що $f \in \Delta A_i$ ($i=1, 2$), існують прості границі правої частини (7) і внаслідок відомої теореми аналізу існує повторна границя (7), і вона дорівнює подвійній. Отже,

$$B_{a_1, a_2}^{n, m} f = \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\alpha_2} nm \frac{\xi_1^{n-1} \xi_2^{m-1}}{\alpha_1^n \alpha_2^m} B_{\xi_1, \xi_2}^{n-1, m-1} A_1 A_2 f d\xi_1 d\xi_2 \quad (8)$$

(тут ми використали те, що $f \in \Delta A_1 A_2$, і те, що $A_1 A_2$ — замкнута операція).

Тепер доведемо теорему 1 методом індукції. Для $n=1, m=1$ перевіримо вірність (6)

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{\alpha_1 \rightarrow 0 \\ \alpha_2 \rightarrow 0}} \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} [T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) f - T(\alpha_1 x_1) f - T(\alpha_2 x_2) f + f] = \\ & = \lim_{\substack{\alpha_1 \rightarrow 0 \\ \alpha_2 \rightarrow 0}} \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \prod_{i=1}^2 [T(\alpha_i x_i) - I] f = \lim_{\substack{\alpha_1 \rightarrow 0 \\ \alpha_2 \rightarrow 0}} \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\alpha_2} A_1 A_2 T(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) f d\xi_1 d\xi_2 = A_1 A_2 f \end{aligned}$$

в силу інтегрального зображення (10, 9, 6) з [1] і умови (a_3) .

Тепер припустимо, що теорема 1 вірна для $n-1, m-1$. Тоді з умови (1) випливає, що $A_1 A_2 f \in \Delta A_1^{n-1} A_2^{m-1}$. Дійсно,

$$A_1^n A_2^m f = A_1^n A_2^{m-1} A_2 f = A_2^{m-1} A_1^n A_2 f = A_2^{m-1} A_1^{n-1} A_1 A_2 f.$$

Отже,

$$B_{\alpha_1, \alpha_2}^{n-1, m-1} A_1 A_2 f$$

прямує до

$$A_1^{n-1} A_2^{m-1} A_1 A_2 f = A_1^n A_2^m f,$$

тобто

$$B_{\alpha_1, \alpha_2}^{n-1, m-1} A_1 A_2 f = A_1^n A_2^m f + o(1).$$

Використовуючи (8), маємо

$$\begin{aligned} B_{\alpha_1, \alpha_2}^{n, m} f &= \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\alpha_2} \frac{nm}{\alpha_1^n \alpha_2^m} \xi_1^{n-1} \xi_2^{m-1} A_1^n A_2^m f d\xi_2 d\xi_1 + \\ &+ o(1) \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\alpha_2} \frac{nm}{\alpha_1^n \alpha_2^m} \xi_1^{n-1} \xi_2^{m-1} d\xi_2 d\xi_1 = A_1^n A_2^m f + o(1), \end{aligned}$$

тобто

$$\lim_{\substack{\alpha_1 \rightarrow 0 \\ \alpha_2 \rightarrow 0}} \|B_{\alpha_1, \alpha_2}^{n, m} f - A_1^n A_2^m f\| = 0.$$

Якщо норма $\|T(x)\|$ обмежена, з (5) маємо

$$\begin{aligned} \|T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) f - \{S_{n-1}^{(1)} T(\alpha_2 x_2) f + S_{m-1}^{(2)} T(\alpha_1 x_1) f - S_{n-1, m-1} f\}\| &\leq \\ &\leq \frac{\alpha_1^n \alpha_2^m}{n! m!} \|A_1^n A_2^m f\| \sup_{0 < x_i < \alpha_i} \|T(x)\|, \quad (i=1, 2). \end{aligned}$$

Аналогічно, як в [2], можна довести такі твердження.

Теорема 2. Якщо

$$\{T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\} \in (0, C_1); \quad f_0 \in \Delta A_1^{n-1} \cap \Delta A_1^{n-1} A_2^{m-1};$$

$$\lim_{\substack{\alpha_1 \rightarrow 0 \\ \alpha_2 \rightarrow 0}} \left\| \frac{n! m!}{\alpha_1^n \alpha_2^m} [T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + S_{n-1, m-1} - S_{n-1}^{(1)} T(\alpha_2 x_2) - S_{m-1}^{(2)} T(\alpha_1 x_1)] f_0 - g_0 \right\| = 0,$$

то

$$f_0 \in \Delta A_1^n A_2^m \quad \text{і} \quad A_1^n A_2^m f_0 = g_0.$$

Теорема 3. Нехай $\{T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\} \in (1, C_1)$ і X — рефлексивний простір. Тоді, якщо $f_0 \in \Delta A_1^{n-1} \cap \Delta A_1^{n-1} A_2^{m-1}$ і

$$\lim_{\substack{\alpha_1 \rightarrow 0 \\ \alpha_2 \rightarrow 0}} \|B_{\alpha_1, \alpha_2}^{n, m} f_0\| < \infty, \quad \text{то} \quad f_0 \in \Delta A_1^n A_2^m \cap \Delta A_1^n$$

і

$$\lim_{\substack{\alpha_1 \rightarrow 0 \\ \alpha_2 \rightarrow 0}} B_{\alpha_1, \alpha_2}^{n, m} f_0 = A_1^n A_2^m f_0.$$

Наслідок 1. Якщо $\{T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\} \in (0, C_1)$, необхідно для $f_0 \in (1)$ і $A_1^n A_2^m f_0 = g_0$, щоб

$$\lim_{\substack{\alpha_1 \rightarrow 0 \\ \alpha_2 \rightarrow 0}} B_{\alpha_1, \alpha_2}^{n, m} f_0 = g_0$$

і достатньо, щоб

$$\lim_{\substack{\alpha_1 \rightarrow 0 \\ \alpha_2 \rightarrow 0}} B_{\alpha_1, \alpha_2}^{n, m} f_0 = g_0$$

хоча б для однієї послідовності

$$\{\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(j)}\}; \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_1^{(i)} = 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \alpha_2^{(j)} = 0.$$

Н а с л і д о к 2. Нехай $\{T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\} \in (1, C_1)$, X — рефлексивний простір, $f_0 \in \Delta A_1^{n-1} \cap \Delta A_1^{n-1} A_2^{m-1}$, $f_0 \in \Delta A_1^n A_2^m$ тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{\substack{\alpha_1 \rightarrow 0 \\ \alpha_2 \rightarrow 0}} \|B_{\alpha_1, \alpha_2}^{n, m} f_0\| < \infty.$$

Зауважимо, що використавши метод Леу [3] спряженої півгрупи, можна довести наступний результат.

Теорема 3*. Нехай $\{T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\} \in (0, C_1)$, $f_0 \in \Delta(A_1^n)^* \cap \Delta(A_1^{n-1})^* \times \times (A_2^{m-1})^*$ і $\lim_{\substack{\alpha_1 \rightarrow 0 \\ \alpha_2 \rightarrow 0}} \|B_{\alpha_1, \alpha_2}^{n, m} f_0\| < \infty$. Тоді $f_0 \in \Delta(A_1^n)^* (A_2^m)^*$ і $\lim_{\substack{\alpha_1 \rightarrow 0 \\ \alpha_2 \rightarrow 0}} (B_{\alpha_1, \alpha_2}^{n, m})^* f_0 = (A_1^n)^* (A_2^m)^* f_0$.

2. а) Півгрупа зсуву. Нехай $f(t_1, t_2) \in L_p(-\pi, \pi)$, $1 < p < \infty$, де $L_p(-\pi, \pi)$ — простір 2π -періодичних функцій, сумовних в p -му степені. Тоді, наприклад, має місце таке твердження, що випливає з наслідку 1 та результатів Леу [3]:

Для того, щоб

$$\frac{\partial^m f(t_1, t_2)}{\partial t_2^m}, \quad \frac{\partial^{n+m} f(t_1, t_2)}{\partial t_1^n \partial t_2^m} \in L_p(-\pi, \pi),$$

всі похідні нижчого порядку були абсолютно неперервні в $L_p(-\pi, \pi)$ по кожному змінному і

$$\frac{\partial^{n+m} f(t_1, t_2)}{\partial t_1^n \partial t_2^m} = g_0(t_1, t_2),$$

необхідно, щоб

$$\lim_{\substack{\alpha_1 \rightarrow 0 \\ \alpha_2 \rightarrow 0}} \left\| \frac{n!m!}{\alpha_1^n \alpha_2^m} \left[f(t_1 + \alpha_1, t_2 + \alpha_2) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_1^k}{k!} \frac{\partial^k f(t_1, t_2 + \alpha_2)}{\partial t_1^k} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\alpha_2^i}{i!} \frac{\partial^i f(t_1 + \alpha_1, t_2)}{\partial t_2^i} + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\alpha_1^k \alpha_2^i}{k! i!} \frac{\partial^{k+i} f(t_1, t_2)}{\partial t_1^k \partial t_2^i} \right] - \frac{\partial^{n+m} f(t_1, t_2)}{\partial t_1^n \partial t_2^m} \right\|_p = 0,$$

і достатньо, щоб хоч для однієї послідовності

$$\{\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(j)}\}, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_1^{(i)} = 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \alpha_2^{(j)} = 0$$

мало місце

$$\lim_{\substack{\alpha_1^{(i)} \rightarrow 0 \\ \alpha_2^{(j)} \rightarrow 0}} \left\| \frac{n!m!}{\alpha_1^{(i)n} \alpha_2^{(j)m}} \left[f(t_1 + \alpha_1^{(i)}, t_2 + \alpha_2^{(j)}) + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\alpha_1^{(i)k} \alpha_2^{(j)i}}{k! i!} \frac{\partial^{k+i} f}{\partial t_1^k \partial t_2^i} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_1^{(i)k}}{k!} \frac{\partial^k f(t_1, t_2 + \alpha_2^{(j)})}{\partial t_1^k} - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\alpha_2^{(j)i}}{i!} \frac{\partial^i f(t_1 + \alpha_1^{(i)}, t_2)}{\partial t_2^i} \right] - g_0(t_1, t_2) \right\|_p = 0.$$

б) Півгрупа Абеля—Пуассона. Двопараметрична півгрупа Абеля—Пуассона зв'язана з подвійно гармонічними функціями $f(W, Z)$, заданими на біциліндрі $D(|W| < 1, |Z| < 1)$. А саме, якщо функція $f(e^{it_1}, e^{it_2})$ задана на поверхні $T(|W|=1, |Z|=1)$, то в $D+T$ можна побудувати подвійно гармонічну функцію $f(W, Z)$ [4]:

$$f(W, Z) = f(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it_1}, e^{it_2}) P_{r_1}(\varphi_1 - t_1) P_{r_2}(\varphi_2 - t_2) dt_1 dt_2,$$

де $r_1 = e^{-\alpha_1}$, $r_2 = e^{-\alpha_2}$, P_r — ядро Пуассона.

Позначимо через $c_{kj}(f)$ коефіцієнт Фур'є функції f :

$$c_{kj}(f) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{is_1}, e^{is_2}) e^{-iks_1 - ijs_2} ds_1 ds_2. \quad (9)$$

Тоді теореми 1, 3* та міркування, аналогічні [5], дають нам такий результат.

Нехай $f_0 \in L_p(T)$, $1 < p \leq \infty$ і нехай існують функції $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l \in L_p(T)$, ($k=0, n-1; l=0, m-1$) і $g_{kl} \in L_p(T)$ такі, що $c_{ij}(p_k) = |i^k| c_{ij}(f_0)$, $c_{ij}(q_l) = |j^l| c_{ij}(f_0)$, $c_{ij}(g_{k,l}) = |i^k j^l| c_{ij}(f_0)$. Тоді для того, щоб існували функції p_n, q_m та $g_{n,m} \in L_p(T)$ такі, що $c_{ij}(p_n) = |i^n| c_{ij}(f_0)$, $c_{ij}(q_m) = |j^m| c_{ij}(f_0)$, $c_{ij}(g_{n,m}) = |i^n j^m| c_{ij}(f_0)$, необхідно і достатньо, щоб

$$\lim_{\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0} \left\| \frac{n!m!}{\alpha_1^n \alpha_2^m} \left[f(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2}) + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{m-1} \frac{\alpha_1^k \alpha_2^l}{k!l!} g_{k,l}(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_1^k}{k!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_k(e^{it_1}, e^{it_2}) P_{r_2}(\varphi_2 - t_2) dt_2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{l=0}^{m-1} \frac{\alpha_2^l}{l!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q_l(e^{it_1}, e^{it_2}) P_{r_1}(\varphi_1 - t_2) dt_1 \right\|_p < \infty.$$

в) Півгрупа Гаусса—Вейерштрасса. Нехай маємо систему диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t_1, t_2, x_1, x_2)}{\partial t_1} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}; \\ \frac{\partial u(t_1, t_2, x_1, x_2)}{\partial t_2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}. \end{cases} \quad u(0, 0, x_1, x_2) = f(x_1, x_2). \quad (10)$$

Відомо, що розв'язок цієї системи дається півгруповою операцією Гаусса—Вейерштрасса:

$$u(t_1, t_2, x_1, x_2) = \frac{1}{\pi \sqrt{t_1 t_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi_1, \xi_2) e^{-\sum_{k=1}^2 \frac{(x_k - \xi_k)^2}{t_k}} d\xi_1 d\xi_2.$$

Поставимо питання: які властивості повинна мати функція $f(x_1, x_2)$ з початкової умови (10), щоб розв'язок системи наближувався сумами Тейлора з заданою швидкістю? Відповідь дає наступна теорема, яка впливає з теореми 1, 3* і міркувань, аналогічних [5]:

Нехай $f \in L_p(R^2)$, де R^2 — вся площина, $1 < p \leq \infty$. Припустимо, що

$$\frac{\partial^{2k+2l-2} f(x_1, x_2)}{\partial x_1^{2k-1} \partial x_2^{2l-1}} \quad (k=0, \dots, n-1; l=0, \dots, m-1)$$

абсолютно неперервні по кожній змінній,

$$\frac{\partial^{2k+2l} f(x_1, x_2)}{\partial x_1^{2k} \partial x_2^{2l}} \in L_p(R^2).$$

Тоді для того, щоб $\frac{\partial^{2n+2m} f(x_1, x_2)}{\partial x_1^{2n} \partial x_2^{2m}}$ належала до простору $L_p(R^2)$, а похідні нижчого порядку були абсолютно неперервні, необхідно і достатньо, щоб

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\alpha_1 \rightarrow 0 \\ \alpha_2 \rightarrow 0}} \left\| \frac{n!m!}{\alpha_1^n \alpha_2^m} \left\{ \frac{1}{\pi \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v_1, v_2) e^{-\sum_{i=1}^2 \frac{(u_i - v_i)^2}{\alpha_i}} dv_1 dv_2 - \right. \right. \\ \left. - \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_1^k}{k!} \frac{1}{\sqrt{\pi \alpha_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v_1, u_2) e^{-\frac{(u_1 - v_1)^2}{\alpha_1}} dv_1 + \right. \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\alpha_2^i}{i!} \frac{1}{\sqrt{\pi \alpha_2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u_1, v_2) e^{-\frac{(u_2 - v_2)^2}{\alpha_2}} dv_2 - \right. \\ \left. \left. - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\alpha_1^k \alpha_2^i}{k! i!} \frac{\partial^{2k+2i} f(u_1, u_2)}{\partial u_1^{2k} \partial u_2^{2i}} \right] \right\} \right\|_p < \infty. \end{aligned}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Э. Хилле, Р. Филлипс. Функциональный анализ и полугруппы. Изд-во иностр. л-ры, М., 1962.
2. P. L. Butzer and H. G. Tillman. Mathem. Annalen, **140**, 256—262 (1960).
3. K. Leeuw. On the Adjoint Semigroup and Some Problems in the Theory of Approximation. Math. Z., **73**, № 3 (1960).
4. Б. Л. Фукс. Теория аналитических функций многих комплексных переменных. Гостехтеориздат, 1948.
5. О. А. Иванова. Некоторые теоремы об n -параметрической полугруппе линейных ограниченных операторов и их применения в теории функций (в печати).

О. А. ИВАНОВА

n -ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПОЛУГРУППЫ ЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ И СВЯЗЬ С ТЕОРИЕЙ АППРОКСИМАЦИИ

(резюме)

В работе доказываются теоремы о приближении n -параметрической полугруппы операторов определенного класса частными суммами обобщенного ряда Тейлора для функции e^{tA} , где A — инфинитезимальный оператор полугруппы. Эти теоремы аналогичны результатам Бутцера и Тильмана, полученным для однопараметрической полугруппы класса $(0, C_1)$ (или $(1, C_1)$). Приводятся примеры.

О. О. ІВАНОВА

НАБЛИЖЕННЯ СУМОВНИХ ФУНКЦІЙ КРАТНИМИ СИНГУЛЯРНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ

П. Л. Бутцер [1] розглядає наближення функцій $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ сингулярними інтегралами, використовуючи при цьому перетворення Фур'є. В даній роботі встановлені аналогічні результати для функції двох змінних. В п. 1 виводяться допоміжні твердження, необхідні для основних теорем.

1. Позначимо через $C_0(R^2)$ простір функцій $f(x, y)$, неперервних на всій площині і таких, що

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow \pm \infty} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow \pm \infty \\ y \rightarrow \pm \infty}} f(x, y) = f(\infty, \infty) = 0. \quad (1)$$

Знайдемо загальний вигляд лінійного функціоналу, означеного на класі таких функцій. Для цього спочатку введемо відповідну формулу для функціоналу $\Phi(\varphi)$, заданого на просторі $C_{[2\pi]}$ неперервних функцій $\varphi(x, y)$, 2π -періодичних відносно кожного аргумента.

Розширимо функціонал $\Phi(\varphi)$ на простір $C_{2\pi}$ всіх неперервних функцій, заданих на квадраті $[-\pi, \pi; -\pi, \pi]$, причому норма залишиться та ж сама. Відомо [2], що

$$\Phi(\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x, y) dg(x, y), \quad \|\Phi\|_{C_{2\pi}} = \text{var } g(x, y), \quad -\pi \leq x, y \leq \pi \quad (2)$$

де $g(x, y)$ — функція обмеженої варіації на квадраті $[-\pi, \pi; -\pi, \pi]$, тобто

$$\sup \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^l |g(x_k, y_i) + g(x_{k-1}, y_{i-1}) - g(x_k, y_{i-1}) - g(x_{k-1}, y_i)| < \infty \quad (2^*)$$

при будь-якому розбитті квадрата $[-\pi, \pi; -\pi, \pi]$ на прямокутники.

Формулу (2) можна звести до вигляду

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi) = & \varphi(\pi, \pi) [g(\pi, \pi) + g(\pi-0, \pi-0) - g(\pi, \pi-0) - g(\pi-0, \pi)] + \\ & + \varphi(\pi, -\pi) [g(\pi, -\pi+0) + g(\pi-0, -\pi+0) - g(\pi, -\pi) - g(\pi-0, -\pi)] + \\ & + \varphi(-\pi, \pi) [g(-\pi+0, \pi) + g(-\pi, \pi) - g(-\pi+0, \pi-0) - g(-\pi, -\pi+0)] + \\ & + \varphi(-\pi, -\pi) [g(-\pi+0, -\pi+0) + g(-\pi, -\pi) - g(-\pi+0, \pi) - \\ & - g(-\pi, -\pi+0)] + \int_{-\pi+0}^{\pi-0} \varphi(-\pi, y) d[g(-\pi+0, y) - g(-\pi, y)] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-\pi+0}^{\pi-0} \varphi(x, -\pi) d[g(x, -\pi+0) - g(x, -\pi)] + \\
& + \int_{-\pi+0}^{\pi-0} \varphi(\pi, y) d[g(\pi, y) - g(\pi-0, y)] + \\
& + \int_{-\pi+0}^{\pi-0} \varphi(x, \pi) d[g(x, \pi) - g(x, \pi-0)] + \int_{-\pi+0}^{\pi-0} \int_{-\pi+0}^{\pi-0} \varphi(x, y) dg(x, y), \quad (3)
\end{aligned}$$

причому

$$\begin{aligned}
\|\Phi\|_{C_{2\pi}} = & |\mu_1| + |\mu_2| + |\mu_3| + |\mu_4| + \text{var } g(x, y) + \\
& + \text{var}_y [g(-\pi+0, y) - g(-\pi, y)] + \text{var}_x [g(x, -\pi+0) - g(x, -\pi)] + \\
& + \text{var}_y [g(\pi, y) - g(\pi-0, y)] + \text{var}_x [g(x, \pi) - g(x, \pi-0)], \quad (3^*)
\end{aligned}$$

де $\text{var}_x, \text{var}_y$ означають варіації функції по x або по y відповідно, а μ_i — скорочені позначення відповідних виразів, які стоять в квадратних дужках в перших чотирьох доданках в (3).

Якщо функція $\varphi(x, y) \in C_{[2\pi]}$, то (3) набуває вигляду

$$\Phi(\varphi) = \varphi(\pi, \pi) (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) + \sum_{i=1}^4 I_i + \int_{-\pi+0}^{\pi-0} \int_{-\pi+0}^{\pi-0} \varphi(x, y) dg(x, y), \quad (4)$$

де I_i ($i=1, 4$) — відповідні одновимірні інтеграли з (3). Міркуючи, як в [3], одержимо, що

$$\|\Phi\|_{C_{[2\pi]}} = |\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4| + V + \text{var}_{-\pi < x, y < \pi} g(x, y),$$

де V — сукупність одновимірних варіацій з (3*).

Тепер нехай задано довільний лінійний функціонал Lf на просторі $C_0(R^2)$. Тоді, використовуючи заміну змінних $x = \text{tg } \frac{t}{2}$; $y = \text{tg } \frac{u}{2}$; $t = 2 \arctg x$; $u = 2 \arctg y$, одержимо з (4)

$$\begin{aligned}
Lf(x, y) = & L\varphi(t, u) = \varphi(\pi, \pi) (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) + \sum_{i=1}^4 I_i + \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) dg(\xi, \eta) = f(\infty, \infty) (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) + \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} f(-\infty, \eta) d[\omega(-\infty+0, \eta) - \omega(-\infty, \eta)] + \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, -\infty) d[\omega(\xi, -\infty+0) - \omega(\xi, -\infty)] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-\infty}^{\infty} f(\infty, \eta) d[\omega(\infty, \eta) - \omega(\infty - 0, \eta)] + \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \infty) d[\omega(\xi, \infty) - \omega(\xi, \infty - 0)] + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) d\omega(\xi, \eta). \quad (5)
\end{aligned}$$

Але в силу умови (1) звідси маємо

$$Lf(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) d\omega(\xi, \eta), \quad \|L\| = \varlimsup_{-\infty < \xi, \eta < \infty} \omega(\xi, \eta). \quad (6)$$

У формулі (6) функція $\omega(\xi, \eta)$ задана на всій площині, і ми рахуємо, що $\omega(\pm\infty, y) = g\left(\pm\frac{\pi}{2}, y\right)$, $\omega(x, \pm\infty) = g\left(x, \pm\frac{\pi}{2}\right)$,

$$\omega(-\infty + 0, y) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} g(x, y), \quad \omega(x, \infty - 0) = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x, y)$$

і т. д.

Аналогічно, як формулу (6), можна довести формулу для загального вигляду лінійного функціоналу, заданого на просторі неперервних на всій площині функцій $f(x, y)$, таких, що границі $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x, y)) = f(\pm\infty, y)$,

$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} f(x, y) = f(x, \pm\infty)$, $\lim_{\substack{x \rightarrow \pm\infty \\ y \rightarrow \pm\infty}} f(x, y) = f(\pm\infty, \pm\infty)$ існують.

Деякі означення:

1. Скажемо, що функція $P(u, v) \in F$, якщо

$$P(u, v) = \hat{f}(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixu - iyv} f(x, y) dx dy,$$

де $f(x, y) \in L_1(R^2)$.

2. Функція $P(u, v) \in F\mathfrak{S}$, якщо

$$P(u, v) = \overset{\vee}{g}(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixu - iyv} dg(x, y),$$

де $g(x, y)$ — функція обмеженої варіації в сенсі (2*) на всій площині.

Для $P(u, v) \in F\mathfrak{S}$ вводимо норму $\|P\| = \|\overset{\vee}{g}\| = \frac{1}{2\pi} \varlimsup \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixu - iyv} dg(x, y) \right\|$, а для $P(u, v) \in F$ маємо $\|P\| = \|\hat{f}\| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx dy = \|f\|_{L_1}$. Легко перевірити, що якщо $P(u, v) \in F\mathfrak{S}$, то

$$\left| \sum_{i,j=1}^{r,l} c_{i,j} P(u_i, v_j) \right| \leq \|P\| \cdot \left\| \sum_{i,j=1}^{r,l} c_{i,j} e^{-iu_i x - iv_j y} \right\|_{\infty}, \quad (7)$$

де $c_{i,j}$ — довільні комплексні, а u_i, v_j — дійсні числа.

Як обернення (7) можна довести таке твердження:

Теорема 1. Якщо $\varphi(u, v)$ вимірна функція на всій площині і існує така константа $M > 0$, що

$$\left| \sum_{i,j=1}^{r,l} c_{i,j} \varphi(u_i, v_j) \right| \leq M \left\| \sum_{i,j=1}^{r,l} c_{i,j} e^{-iu_i x - iv_j y} \right\|_{\infty},$$

то $f(u, v)$ майже всюди дорівнює $Q(u, v) \in F\mathfrak{S}$ і $\|Q\| = M$.

Для доведення використовуємо формулу (6). Застосовуються аналогічні міркування, як в (4) при доведенні відповідної теореми для функції однієї змінної. Зауважимо, що замість функції $\chi_{\varepsilon}(\tau)$, введеної в (4), нам потрібно ввести функцію $\chi_{\varepsilon}(\tau, \delta) = \chi_{\varepsilon}(\tau) \cdot \chi_{\varepsilon}(\delta)$, де $\chi_{\varepsilon}(\tau) = |\tau| (2\pi\varepsilon)^{-1} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ для $2\pi(n-1) \leq |\tau| \leq 2\pi n\varepsilon$.

2. Розглянемо двократний сингулярний інтеграл

$$I_{\rho}(x, y) = \frac{\rho_1 \rho_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u, y-v) K(\rho_1 u; \rho_2 v) du dv, \quad (8)$$

де $f(u, v) \in L_1(R^2)$, а ρ_i ($i=1, 2$) — додатні числа.

Нехай ядро $k(u, v)$ задовольняє умови

а) $K(u, v) \in L_1(R^2)$;

б) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(u, v) du dv = 1$.

Відомо [5], що $I_{\rho}(x, y)$ існує майже для всіх точок (x, y) і належить до класу $L_1(R^2)$. Позначимо через $\hat{I}_{\rho}(x, y)$ перетворення Фур'є інтеграла $I_{\rho}(x, y)$:

$$\hat{I}_{\rho}(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_{\rho}(x, y) e^{-iux - ivy} dx dy.$$

За теоремою про згортку функцій [5] маємо

$$\hat{I}_{\rho}(u, v) = \hat{f}(u, v) \hat{K}\left(\frac{u}{\rho_1}; \frac{v}{\rho_2}\right).$$

Позначимо через $U(\gamma_1, \gamma_2)$ клас функцій $f(x, y)$, які належать до $L_1(R^2)$, причому $\|I_{\rho} - f\| = 0$ ($\rho_1^{\gamma_1} \rho_2^{\gamma_2}$), $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$. Введемо функцію

$$H_{\gamma_1, \gamma_2}^0 = \begin{cases} \frac{1 - \hat{K}(u, v)}{|u^{\gamma_1} v^{\gamma_2}|} & uv \neq 0 \\ 0 & uv = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Якщо $H_{\gamma_1, \gamma_2}^0 \rightarrow C$ при $u^2 + v^2 \rightarrow 0$, покладемо

$$H_{\gamma_1, \gamma_2} = \begin{cases} \frac{1 - \hat{K}(u, v)}{u^{\gamma_1} v^{\gamma_2}} & uv \neq 0 \\ C & uv = 0. \end{cases}$$

Далі

$$\hat{f}(u, v) - \hat{I}_{\rho}(u, v) = \hat{f}(u, v) \left[1 - \hat{K}\left(\frac{u}{\rho_1}; \frac{v}{\rho_2}\right) \right]. \quad (10)$$

Комбінуючи (9) і (10), одержимо, що функція

$$\rho_1^{\gamma_1} \rho_2^{\gamma_2} \hat{f}(u, v) \left[1 - K \left(\frac{u}{\rho_1}; \frac{v}{\rho_2} \right) \right] = |u^{\gamma_1} v^{\gamma_2}| \hat{f}(u, v) H_{\gamma_1, \gamma_2}^0 \left(\frac{u}{\rho_1}; \frac{v}{\rho_2} \right)$$

є перетворення Фур'є від функції $\rho_1^{\gamma_1} \rho_2^{\gamma_2} (f - I_\rho)$.

Застосовуючи (10) та рівність $\|\hat{f}(u, v)\| = \|f(x, y)\|$, маємо, що

$$\left\| |u^{\gamma_1} v^{\gamma_2}| \hat{f}(u, v) H_{\gamma_1, \gamma_2}^0 \left(\frac{u}{\rho_1}; \frac{v}{\rho_2} \right) \right\| = \rho_1^{\gamma_1} \rho_2^{\gamma_2} \|I_\rho - f\|. \quad (11)$$

Із теореми 1 одержуємо такий результат:

Теорема 2. Функція $f(u, v) \in L_1(R^2)$ входить в клас $U(\gamma_1, \gamma_2)$, тоді і тільки тоді, коли існує число $M > 0$, причому

$$\left| \sum_{i,j=1}^{k,l} c_{i,j} |u_i^{\gamma_1} v_j^{\gamma_2}| \hat{f}(u_i, v_j) H_{\gamma_1, \gamma_2}^0 \left(\frac{u_i}{\rho_1}; \frac{v_j}{\rho_2} \right) \right| \leq M \left\| \sum_{i,j=1}^{k,l} c_{i,j} e^{-iu_i x - iv_j y} \right\|_\infty \quad (12)$$

для всіх $c_{i,j}$ комплексних, u_i, v_j дійсних і $\rho_1, \rho_2 > 0$.

Тепер можна встановити деякі прямі та обернені теореми.

Теорема 3. Нехай $H_{\gamma_1, \gamma_2}^0(u, v) \rightarrow C$ при $u^2 + v^2 \rightarrow 0$. Тоді з того, що $f \in U(\gamma_1, \gamma_2)$ випливає $|u^{\gamma_1} v^{\gamma_2}| \hat{f}(u, v) \in F\mathfrak{S}$.

Доведення. За теоремою 2 має місце нерівність (12). Перейдемо до границі в (12) при $\rho_i \rightarrow \infty$ і застосуємо теорему 1 до функції $|u^{\gamma_1} v^{\gamma_2}| \hat{f}(u, v)$.

Теорема 4. Нехай функція H_{γ_1, γ_2} існує і входить в $F\mathfrak{S}$. Тоді кожна $f \in L_1(R^2)$ така, що $|u^{\gamma_1} v^{\gamma_2}| \hat{f}(u, v) \in F\mathfrak{S}$, входить в $U(\gamma_1, \gamma_2)$.

Теорема 5. Нехай $U(\gamma_1, \gamma_2)$ містить таку функцію $f(u, v) \in L_1(R^2)$, що $|u^{\gamma_1} v^{\gamma_2}| \hat{f}(u, v) \rightarrow R \neq 0$ при $u^2 + v^2 \rightarrow \infty$. Тоді H_{γ_1, γ_2} існує і входить в клас $F\mathfrak{S}$.

Доведення цих теорем подібне до доведення теорем 2 і 3 з [1].

Теорема 6. Нехай кожна функція $f(u, v) \in L_1(R^2)$ така, що $|u^{\gamma_1} v^{\gamma_2}| \hat{f}(u, v) \in F\mathfrak{S}$ входить в клас $U(\gamma_1, \gamma_2)$. Тоді H_{γ_1, γ_2} існує і міститься в $F\mathfrak{S}$.

Доведення. Розглянемо $f(u, v) \in L_1(R^2)$ такого вигляду: $f(u, v) = f_1(u) f_2(v)$, де $f_1(u)$ і $f_2(v)$ сумовні на $(-\infty, \infty)$ і їх перетворення Фур'є є

$$\hat{f}_1(u) = \frac{1}{1 + |u|^{\gamma_1}}; \quad \hat{f}_2(v) = \frac{1}{1 + |v|^{\gamma_2}},$$

де $\gamma_1, \gamma_2 > 0$. Тоді

$$\hat{f}(u, v) = \hat{f}_1(u) \hat{f}_2(v); \quad |u^{\gamma_1} v^{\gamma_2}| \hat{f}(u, v) = |u^{\gamma_1}| \hat{f}_1(u) (v)^{\gamma_2} \hat{f}_2(v). \quad (13)$$

Відомо [1], що $|u^{\gamma_i}| \hat{f}_i(u) \in F\mathfrak{S}$, тобто

$$|u^{\gamma_i}| \hat{f}_i(u) = \frac{1}{V 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isu} dg_i(\sigma) \quad (i=1, 2). \quad (14)$$

Внаслідок (14) і (13)

$$|u^{\gamma_1} v^{\gamma_2}| \hat{f}(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma u - i\delta v} dg_1(\sigma) dg_2(\delta), \quad (15)$$

де $g_1(\sigma)$ і $g_2(\delta)$ — функції обмеженої варіації на $(-\infty, \infty)$. Вираз (15) можна переписати у формі

$$|u^{\gamma_1} v^{\gamma_2}| \hat{f}(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma u - i\delta v} d\omega(\sigma, \delta),$$

де $\omega(\sigma, \delta) = g_1(\sigma) g_2(\delta)$ і є функцією обмеженої варіації на всій площині.

Далі, $|u^{\gamma_1} v^{\gamma_2}| \hat{f}(u, v) = [1 - \hat{f}_1(u)] \cdot [1 - \hat{f}_2(v)] \rightarrow 1$ при $u^2 + v^2 \rightarrow 0$. Застосовуючи теорему 5, доводимо теорему 6.

ЛІТЕРАТУРА

1. P. L. Butzer. Approximation and Fourier—Stieltjes Transforms. Archive Rat. Meshan. and Anal., 5, № 5, 415—419 (1960).
2. P. Lévy. Leçons d'Analyse fonctionnelle. Paris, 1922.
3. Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимаций. Гостехиздат, 1947.
4. Phillips. On Fourier—Stieltjes integrals. Trans. Amer. Math. Soc., 69, № 2 (1950).
5. S. Bochner and K. Chandrasekharan. Fourier transforms. Princeton, 1949.

О. А. ИВАНОВА

ПРИБЛИЖЕНИЕ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ КРАТНЫМИ СИНГУЛЯРНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

(резюме)

В работе обобщаются результаты Бутцера о приближении суммируемых функций сингулярными интегралами на случай функций многих переменных. Попутно установлен общий вид линейных функционалов, определенных на классе непрерывных на всей плоскости и таких, что $\lim_{y \rightarrow \pm \infty} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow \pm \infty} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow \pm \infty \\ y \rightarrow \pm \infty}} f(x, y) = 0$.

Т. Л. МАРТИНОВИЧ, Б. М. КОРДУБА

ОДИН СПОСІБ РОЗВ'ЯЗКУ ПРОСТОРОВОЇ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ З ОСЬОВОЮ СИМЕТРІЄЮ

Розглянемо граничну задачу Діріхле для рівняння Пуассона з осьовою симетрією

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -q(r, z) \quad (1)$$

в області $-\infty < z < \infty$, $0 \leq r \leq R$ площини r, z при граничних умовах

$$\begin{aligned} u(r, z)|_{r=R} &= u_R, \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} u(r, z) = 0; \\ u|_{L_\beta} &= u_\beta(r, z), \quad (\beta = 1, 2, \dots, s), \end{aligned} \quad (2)$$

де L_β — поверхні обертання з спільною віссю $r=0$;

$$q(r, z) = \sum_{\beta=1}^s q_\beta(r_\beta(z), z) \delta(r - r_\beta(z)); \quad (3)$$

$q_\beta(r_\beta(z), z)$ — функція на поверхні L_β ;

$\delta(r - r_\beta(z))$ — функція Дірака;

$r_\beta = r_\beta(z)$ — рівняння поверхні L_β ($\beta = 1, 2, \dots, s$).

Застосуємо до рівняння (1) в інтервалі $0 \leq r \leq R$ перетворення Ханкеля з скінченними границями [1]

$$\begin{aligned} \bar{u}(z, \xi_i) &= \int_0^R r u(r, z) J_0(r \xi_i) dr; \\ u(r, z) &= \frac{2}{R^2} \sum_i \bar{u}(z, \xi_i) \frac{J_0(r \xi_i)}{[J_1(R \xi_i)]^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

де сума береться по всіх додатних корнях рівняння

$$J_0(R \xi_i) = 0; \quad (5)$$

$J_0(z)$, $J_1(z)$ — функції Бесселя першого роду нульового і першого порядку.

Із рівності

$$\int_0^R r \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) J_0(r \xi_i) dr = \left[r \frac{\partial u}{\partial r} J_0(r \xi_i) \right]_0^R - \xi_i [r u J_0'(r \xi_i)]_0^R - \xi_i^2 \bar{u}(z, \xi_i).$$

одержаної інтегруванням по частинах, граничних умов задачі і рівності (5), знаходимо

$$\int_0^R r \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) J_0(r\xi_i) dr = -\xi_i^2 \bar{u}(z, \xi_i). \quad (6)$$

Помножаючи обидві частини рівняння (1) на $rJ_0(r\xi_i)$ і інтегруючи по r від 0 до R , враховуючи (6), знаходимо, що трансформанта Ханкеля задовольняє звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d^2 \bar{u}(z, \xi_i)}{dz^2} - \xi_i^2 \bar{u}(z, \xi_i) = -\bar{q}(z, \xi_i), \quad (7)$$

де

$$\bar{q}(z, \xi_i) = \int_0^R r q(r, z) J_0(r\xi_i) dr.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (7), що зникає на нескінченності, візьмемо у вигляді

$$\bar{u}(z, \xi_i) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2 + \xi_i^2} \int_{-\infty}^\infty \bar{q}(t, \xi_i) \cos \lambda(t-z) dt. \quad (8)$$

Враховуючи (8), формула (4) після обчислення інтеграла по λ набуде вигляду

$$u(r, z) = \frac{1}{R^2} \sum_i \frac{J_0(r\xi_i)}{\xi_i [J_1(R\xi_i)]^2} \int_{-\infty}^\infty e^{-\xi_i |t-z|} dt \int_0^R u q(u, t) J_0(u\xi_i) du. \quad (9)$$

У випадку ненульових граничних умов задачі при $r=R$ на розв'язок (9) необхідно накласти розв'язок однорідного рівняння (1). Цей розв'язок при граничних умовах

$$u_0(r, z)|_{r=R} = u_R(z); \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} u(R, z) = 0$$

має вигляд

$$u_0(r, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{I_0(r\lambda)}{I_0(R\lambda)} \left\{ \int_{-\infty}^\infty u(R, t) \cos \lambda(t-z) dt \right\} d\lambda. \quad (10)$$

Функція $u(R, t)$ повинна задовольняти умови, що забезпечують збіжність інтеграла. $I_0(z)$ — модифікована функція Бесселя першого роду нульового порядку.

Враховуючи (3) і операцію

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) \delta(x-a) dx = f(a),$$

з (9) одержуємо

$$u(r, z) = \frac{1}{R^2} \sum_{\beta=1}^s \sum_i \frac{J_0(r\xi_i)}{\xi_i [J_1(R\xi_i)]^2} \int_{a_\beta}^{b_\beta} r_\beta(t) J_0(r_\beta(t) \xi_i) q(r_\beta(t), t) e^{-\xi_i |t-z|} dt. \quad (11)$$

Якщо в останній формулі неперервну функцію $q(r_\beta, z)$ на кожній з поверхонь L_β замінити значеннями в окремих точках, поклавши

$$q(r_\beta, t) = \sum_{\alpha=1}^{m_s} q_\beta^{(\alpha)} \delta(t - z_\alpha), \quad (12)$$

то одержимо приближене зображення $u(r, z)$ у вигляді

$$u(r, z) = \frac{1}{R^2} \sum_{\beta=1}^s \sum_{\alpha=1}^{m_s} q_\beta^{(\alpha)} r_\beta^{(\alpha)} \sum_i \frac{J_0(r_\beta^{(\alpha)} \xi_i) J_0(r \xi_i)}{\xi_i [J_1(R \xi_i)]^2} e^{-\xi_i |z_\alpha - z|}, \quad (13)$$

де внутрішня сума береться по всіх додатних корнях рівняння

$$J_0(R \xi_i) = 0.$$

Викладений вище метод застосовувався до розрахунку електростатичного поля, створеного електронно-оптичною системою, що складається з трьох циліндричних електродів з спільною віссю $r=0$ (розміри вказані на рис. 1).

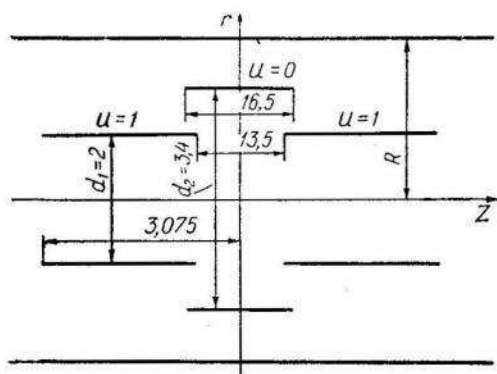


Рис. 1.

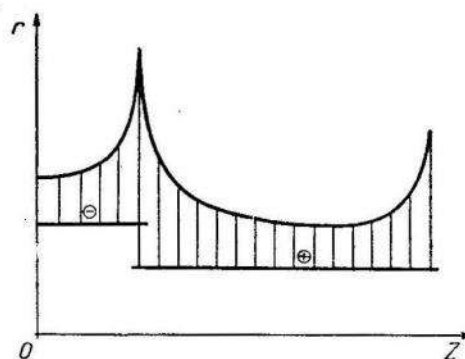


Рис. 2.

На крайніх електродах потенціал дорівнює одиниці, на середньому — нулю. Вся система вміщувалась в заземлений циліндр радіуса R . Задача розв'язувалась при $R=10, 15, 20$. Підрахунок при цих значеннях R вказує, що значення потенціалу в області, що являє найбільший інтерес (всередині циліндрів), збігаються з двома знаками.

Завдяки симетрії системи відносно площини $z=0$ мають місце співвідношення

$$q_\beta^{(\alpha)} = q_\beta^{(m_\beta + 1 - \alpha)}, \quad r_\beta^{(\alpha)} = r_\beta^{(m_\beta + 1 - \alpha)} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m_\beta). \quad (14)$$

На рис. 2 зображено чверть осьового перетину даної системи.

Скориставшись заданими значеннями потенціалу на електродах з формули (14), складаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь n -го порядку (в нашому випадку $n=22$) для визначення невідомих густин зарядів $q_\beta^{(\alpha)}$.

На рис. 2 дано графік розподілу цих густин на кожному з електродів при різних значеннях $r=R$. Аналогічна задача розв'язувалась нами методом прямих [2]. Криві розподілу густин зарядів, одержані методом прямих і викладеним вище методом, при різних значеннях R в прийнятому масштабі повністю збігаються.

При відомих значеннях густин зарядів $q_\beta^{(\alpha)}$ потенціал поля в будь-якій точці розглядуваної області визначається за формулою (14).

Розрахунок проводився на машині «Урал-1».

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Снеддон. Преобразование Фурье. М., 1955.
2. Т. Л. Мартынович, Б. М. Кордуба. Применение метода прямых в сочетании с методом интегральных преобразований к расчету электростатических полей с осевой симметрией. Журн. вычисл. математики и матем. физики, 5, № 6 (1965).

Т. Л. МАРТЫНОВИЧ, Б. М. КОРДУБА

ОДИН СПОСОБ РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ

(резюме)

Рассматривается метод расчета пространственной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в цилиндрической системе координат. В качестве иллюстрации метода приводится расчет поля потенциала электронно-оптической системы, состоящей из трех цилиндрических электродов.

Г. Л. БУЙМОЛА

ДЕЯКІ ПИТАННЯ ГЕОМЕТРОГРАФІЇ n -ВИМІРНОГО ЕВКЛІДОВОГО ПРОСТОРУ

Задачі на побудову 1-го і 2-го степеня в двовимірній евклідовій площині розв'язуються за допомогою циркуля і лінійки і зводяться до креслення прямих ліній і кіл — єдиних кривих сталої кривини в цій площині.

Дані і побудовані фігури в двовимірній площині складаються з точок, прямих і кіл та їх сполук. Побудова прямої в цій площині здійснюється звичайною лінійкою. Лемуанів символ побудови буде $Op(2R_1+R_2)$ і простота $\bar{S}=3$ [1, 2].

Коло в двовимірній площині може бути заданим фіксованою точкою (центром) і радіусом (у вигляді відрізка AB). Побудова його здійснюється за допомогою циркуля. Лемуанів символ побудови буде $Op(3C_1+C_2)$, простота $S=4$.

До цих приладів побудови нам здається доцільним долучити найпростіший прилад, за допомогою якого відзначають (будують) точки на прямій або на площині. Цей прилад будемо називати *точкографом* і уявляти у вигляді гостро підструганого олівця або вістря (наприклад, ніжки циркуля). Лемуанів символ «побудови» (фіксування) точки буде $Op(T_1+T_2)$; $S=2$, де T_1 — підготовча операція встановлення вістря точкографа в точку, а T_2 — фіксування точки.

У просторі n -вимірів Π^n , крім точок Π^0 , прямих Π^1 і кіл K^1 , з якими ми маємо справу при розв'язуванні задач у двовимірній площині Π^2 , з'являються ще нові елементи. В тривимірному просторі — площини і сфери, що є аналогами прямої і кола в Π^2 , а в просторах вищого числа виміру — їх узагальнення, площини і сфери вищого виміру.

Оскільки площина і сфера є поверхнями сталої кривини в тривимірному просторі, то виникає думка про такі побудови, які здійснювалися б шляхом «проведення» (побудови) поверхонь сталої кривини, тобто не тільки побудови точок, прямих і кіл, але і двовимірних площин і сфер, а в просторах вищого числа вимірів — площин і сфер вищого виміру, аналогів двовимірної площини і сфери. Для таких побудов необхідні вже спеціальні прилади. Крім лінійки і циркуля, за допомогою яких здійснюється в площині Π^2 побудова прямих і кіл, ми будемо користуватися приладами, що не вживалися досі, — *площинографом* і *сферографом*.

Площинограф — прилад, за допомогою якого в тривимірному просторі Π^3 будується двовимірна площина, задана трьома точками, що не лежать на одній прямій, або двома прямими, які або перетинаються

або паралельні (взагалі кажучи, по заданому симплексу). Так само як для побудови прямої в площині Π^2 , лінійка прикладається до двох заданих точок $Op(2R_1)$, а потім креслиться лінія $Op(R_2)$, в тривимірному просторі Π^3 ми прикладаємо до трьох точок A, B, C (або «настроюємо на три точки») площинограф $Op(3P_1)$, а потім проводимо площину $Op(P_2)$.

Площинограф можна уявити собі як прилад, що складається з двох лінійок, які перетинаються в точці A і шарнірно закріплені в ній. Одна з цих лінійок (базисна), яку позначимо через AB , закріплюється нерухомо в точках A і B , а друга лінійка «настроюється» на точку C , і потім обертанням її навколо точки A «описується» площина. Можна, звичайно, цей прилад уявляти собі інакше, наприклад у вигляді деякої пластинки, що «креслить» площину [4].

Сферограф. Аналогом до кола в площині Π^2 в тривимірному просторі є сфера. Побудова сфери в Π^3 здійснюється за допомогою сферографа і мислиться так само, як і побудова кола в площині Π^2 .

В тривимірному просторі сферограф можна уявити собі як деяке півколо, що спирається на діаметр AB . Точка O — центр цього кола — фіксована. Точки A і B змінюють своє положення на прямій AB в залежності від заданого радіуса сфери. Відповідно до радіуса змінюється і дуга півкола. Обертанням цього півкола навколо діаметра AB , як навколо осі, описується сфера K^2 заданого радіуса.

Для «побудови» сфери досить помістити точку O сферографа в центр сфери $Op(Q_1)$. «Настройка» приладу на заданий радіус позначається символом $Op(3Q_1)$. Для цього треба задати, крім точки O — центра сфери, ще одну довільну точку M сфери. Операція «побудови» сфери позначається так: $Op(Q_2)$.

Отже, загальний Лемуанів символ побудови сфери за допомогою сферографа буде $Op(4Q_1+Q_2)$.

При всіх побудовах за допомогою вказаних приладів (зокрема, площинографа і сферографа) припускається також, що площини і сфери, «описані» (чи побудовані) цими приладами, залишаються десь у просторі Π^3 побудованими.

У просторах більшого числа вимірів $\Pi^4, \Pi^5, \dots, \Pi^n$ для побудови площин і сфер більшого ніж Π^2 і K^2 вимірів ми повинні ввести нові уявлювані прилади — аналоги площинографа і сферографа. Ми будемо називати їх гіперплощинографами і гіперсферографами і позначати відповідно Γ_p^{n-1} і Γ_Q^{n-1} . Уявний прилад Γ_p^{n-1} дає можливість побудувати в n -вимірному просторі Π^n $n-1$ -вимірну площину (гіперплощину) шляхом прикладання цього приладу до n точок, що не належать одній $n-2$ -вимірній площині. Лемуанів символ цієї побудови буде $Op(nU_1+U_2)$, де U_1 позначає підготовчу операцію прикладання приладу до даних точок, а U_2 — побудову (креслення) гіперплощини Π^{n-1} .

Гіперсферограф Γ_Q^{n-1} ми уявляємо як прилад, що дає можливість «будувати» гіперсфери в n -вимірному просторі шляхом обертання його навколо деякої «осі», якщо задано центр і радіус її. (Тут «радіус» можна уявляти як частину простору Π^{n-1} , що обертається навколо Π^{n-2} як центра). Символ побудови буде $Op[(n+1)V_1+V_2]$, де V_1 — операція прикладання приладу до точки, а V_2 — «побудова» гіперсфери.

Зауважимо таке.

На прямій Π^1 елементами побудови є точки Π^0 , «побудова» яких здійснюється за допомогою *одного* лише приладу — *точкографа*.

На двовимірній площині Π^2 елементами побудови є точки Π^0 , прямі Π^1 і кола K^1 . Для побудови їх використовуємо три прилади: *точко-*

граф, лінійку і циркуль. За допомогою цих же приладів ми здійснюємо в Π^2 побудови різних геометричних фігур, що складаються з точок, прямих і кіл.

У тривимірному просторі Π^3 до вказаних елементів простору додаються ще двовимірні площини Π^2 і сфери K^2 , для побудови яких вводиться *площинограф* і *сферограф*. За допомогою вказаних п'яти приладів ми можемо уявно здійснювати в Π^3 різні геометричні побудови.

У просторах більшого числа вимірів $\Pi^4, \Pi^5, \dots, \Pi^n$ ми маємо більше елементів — об'єктів нашої побудови, і відповідно використовується більше число приладів побудови, названих нами гіперплощинографами і гіперсферографами відповідних просторів. Число їх, як неважко бачити, дорівнює $2n-1$.

Отже, за допомогою $2n-1$ приладів можна побудувати всі основні елементи n -вимірного евклідового простору.

Обґрунтування теорії геометричних побудов в n -вимірному евклідовому просторі можна провести за тією ж схемою, що і обґрунтування геометричних побудов у двовимірній площині Π^2 (планіметрії) і тривимірній Π^3 (стереометрії) [5, 6].

У цій статті робиться спроба узагальнити на n -вимірний простір деякі відомі визначення, що встановлюють клас конструктивних елементів площини Π^2 і тривимірного простору Π^3 .

Нехай M — скінчена множина точок, прямих, кіл, площин, сфер, гіперплощин і гіперсфер n -вимірного евклідового простору, що містить принаймні $n+1$ точок, які не лежать в одній $n-1$ -вимірній площині. Елементи цієї множини будемо називати *даними*.

Сукупність всіх геометричних образів, які можуть бути одержаними із даних застосуванням скінченного числа можливих операцій обраного комплексу приладів побудови, прийнято називати класом K конструктивних елементів, що відповідає даній задачі. Якщо мати на увазі вказані нами вище прилади, як прилади побудови в n -вимірному евклідовому просторі Π^n , то можна встановити клас конструктивних елементів цього простору за допомогою наступних визначень.

1. Всі дані в задачі на побудову елементи, а також довільні точки n -вимірного простору (які необхідні для побудови як допоміжні елементи), є *конструктивними*.

2. Будь-який простір Π^i ($i=1, 2, \dots, n$) є конструктивним в Π^n , якщо конструктивні елементи, які визначають його положення в просторі Π^n , тобто, якщо заданий (конструктивний) симплекс $S(i+1)$ простору Π^i .

3. Всі елементи конструктивного простору (в тому числі кола, сфери, гіперсфери...), що входять у клас конструктивних елементів цього простору, є конструктивними.

4. Будь-який простір Π^m є конструктивним у просторі Π^n , якщо він є перетином двох конструктивних просторів (у тому числі кіл, сфер, гіперсфер і т. д.) Π^k і Π^l , що належать простору Π^n , тобто $\Pi^k \times \Pi^l = \Pi^m$, де $m=k+l-n > 0$.

Всі «побудови» в n -вимірному евклідовому просторі проводяться уявно, але для полегшення, де можна, використовується рисунок, що наочно ілюструє процес побудови.

У наведеній нижче таблиці подано результати розгляду деяких основних операцій побудови за допомогою вказаних приладів: Лемуанів символ і простота цих побудов.

Елемент побудови в Π^n	Симплекс (чим визначається)	Прилад побудови	Символ побудови	Простота побудови
Π^0	$S(1)$	Точкограф	$Op(T_1 + T_2)$	2
Π^1	$S(2)$	Лінійка	$Op(2R_1 + R_2)$	3
Π^2	$S(3)$	Площинограф	$Op(3P_1 + P_2)$	4
Π^{n-1}	$S(n)$	Гіперплощинограф	$Op[(n-1+1)U_1 + U_2]$	$(n-1)+2=n+1$
K^0	$O(r^0)$	Точкограф	$Op(2T_1 + T_2)$	3
K^1	$O(r^1)$	Циркуль	$Op(3C_1 + C_2)$	4
K^2	$O(r^2)$	Сферограф	$Op(4Q_1 + Q_2)$	5
.....				
K^{n-1}	$O(r^{n-1})$	Гіперсферограф	$Op[(n-1+2)V_1 + V_2]$	$(n-1)+3=n+2$

Лемуанів символ і простоту $\bar{S}$ побудови перетину двох фігур, елементів n -вимірного простору, можна записати так: в Π^2 — перетин двох прямих $\Pi^1 \times \Pi^1 = \Pi^0$. Символ цієї побудови і простота буде $Op(4R_1 + 2R_2 + T_2)$; $\bar{S} = 7$. В n -вимірному просторі дві площини будь-якого числа вимірів m і l перетинаються по площині виміру $l+m-n$ при $l+m > n$. Символ побудови

$$Op[(m+1)U_1 + (l+1)U_1 + 2U_2], \bar{S} = m+l+4.$$

Перетин двох гіперсфер різного виміру m і l дає гіперсферу виміру $m+l-n$ при $m+l > n$,

$$K^m \times K^l = K^{m+l-n}.$$

Символ побудови і простота буде мати вигляд

$$Op[(m+2)V_1 + V_2 + (l+2)V_1 + V_2]; \bar{S} = m+l+6.$$

Розглянемо задачу.

Задача 1. Визначити простоту побудови спільної площини двох просторів Π_1^3 і Π_2^3 , що належать одному чотиривимірному простору Π^4 [3].

Розв'язання. Що така площина існує, видно з того, що

$$\Pi_1^3 \times \Pi_2^3 = \Pi^2.$$

Нехай простір Π^4 визначається симплексом $ABCDE$ (див. рисунок). Простори Π_1^3 і Π_2^3 задані відповідно симплексами $(ABDE)$ і $(BCDE)$. Всі точки A, B, C, D, E симплексів Π_1^3 і Π_2^3 , крім точки F симплекса Π_2^3 , є в той же час вершинами основного симплекса $(ABCDE)$ чотири-

вимірного простору. Тому точка F повинна бути визначеною відносно симплекса $(ABCDE)$. Спроектуємо точку F з вершини A симплекса $(ABCDE)$ на гіпергрань $\Pi_3^3 = (BCDE)$. Точку перетину AF з гіпергранню Π_3^3 позначимо через M_1 . Символ і простота цієї побудови буде

$$Op(2R_1 + R_2 + 4P_1 + P_2 + T_2), \bar{S} = 9.$$

Далі проектуємо точку M_1 в просторі $\Pi_3^3 = (BCDE)$ з вершини B як центра на гіпергрань (CDE) . Точку перетину променя BM_1 з гіпергранню (CDE) позначимо через M_2 .

Будемо мати:

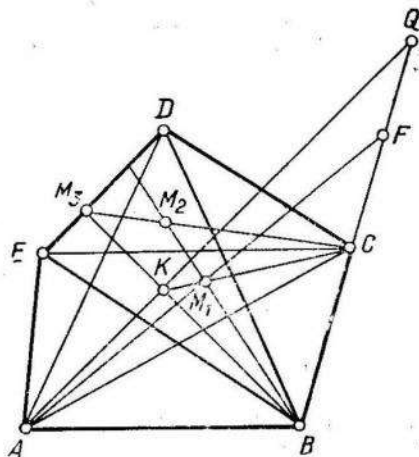
$$Op(2R_1 + R_2 + 3P_1 + P_2 + T_2), \bar{S} = 8.$$

Потім проектуємо точку M_2 площини (CDE) на пряму DE з точки C як центра. Позначимо одержану точку перетину CM_2 і DE через M_3 . Символ і простота цієї побудови буде

$$Op(4R_1 + 2R_2 + T_2), \bar{S} = 7.$$

Таким чином, точка F повністю визначена відносно симплекса $(ABCDE)$ своїми афінними координатами:

$$x = (DEM_3); y = (CM_3M_2); z = (BM_2M_1); \\ t = (AM_1F),$$



Зауважимо, що дані гіперплощини $\Pi_1^3 = (ABDE)$ і $\Pi_2^3 = (BCDF)$ мають спільну пряму BD . Тому для побудови спільної їм площини досить побудувати будь-яку спільну точку гіперплощин Π_1^3 і Π_2^3 , не інцидентну прямій BD . Побудуємо, наприклад, точку Q перетину прямої CF , що належить гіперплощині Π_2^3 з гіперплощиною Π_1^3 . Проведемо пряму CM_1 . Вона повністю лежить в гіперплощині $\Pi_3^3 = (BCDE)$. Площина (BDE) є основою гіперплощини Π_1^3 , оскільки гіперплощина Π_1^3 є проектуючою і належить гіперплощині Π_3^3 .

Точку K перетину прямої CM_1 з площиною (BDE) дістанемо, провівши пряму BM_3 :

$$K = BM_3 \times CM_1; Op(4R_1 + 2R_2 + T_2), \bar{S} = 7.$$

Отже, точка K є основою шуканої точки Q на гіперплощині $(BCDE)$. Далі знаходимо

$$Q = CF \times AK; Op(4R_1 + 2R_2 + T_2), \bar{S} = 7,$$

Точка Q перетину прямої CF з гіперплощиною $(ABDE)$ є спільною точкою гіперплощин $(ABDE)$ і $(BCDF)$.

Спільна площина цих гіперплощин визначається точками B, D і Q .

$$Op(3P_1 + P_2), \bar{S} = 4.$$

Загальний символ проведеної побудови можна записати у вигляді:

$$Op(16R_1 + 8R_2 + 10P_1 + 3P_2 + 5T_2), \bar{S} = 42.$$

Задача 2. Через дану точку A простору Π^3 провести площину, перпендикулярну даній прямій BC .

Розв'язання. (Розглядається випадок, коли точка A не інцидентна прямій BC). З двох точок N_1 і N_2 прямої BC як центрів будемо дві сфери $N_1(N_1A)$ і $N_2(N_2A)$; $Op(4Q_1 + 2Q_2), \bar{S} = 6$. Ці сфери перетнуться по деякому колу K^1 , яке лежатиме в шуканій площині γ . Прикладаючи до будь-яких трьох точок цього кола площинограф, проводимо площину γ : $Op(3P_1 + P_2)$. Загальний символ цієї побудови:

$$Op(4Q_1 + 2Q_2 + 3P_1 + P_2), \bar{S} = 10.$$

Побудова складається з двох сфер і одної площини.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Адлер. Теория геометрических построений. Одесса, 1910.
2. E. Lemoine. Géometrographie ou art des constructions géométriques. Paris, «Scientia», 18.
3. Е. А. Глазунов и Н. Ф. Четверухин. Аксонометрия, 1953.
4. Н. Ф. Четверухин. Вопросы методологии и методики геометрических построений в школьном курсе геометрии. Изв. Акад. пед. наук, вып. 6.
5. А. Л. Пикус. Об одном способе обоснования геометрических построений на плоскости и в пространстве, «Математическое просвещение», 3 (1958).
6. Е. С. Кочеткова. Обоснование геометрических построений в пространстве. «Математика в школе», 2 (1942).

Г. Л. БУЙМОЛА

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГЕОМЕТРОГРАФИИ n -МЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

(резюме)

В статье рассмотрены некоторые задачи на построение в 3- и 4-мерном пространстве с помощью введенного автором комплекса инструментов: точкограф, плоскограф, сферограф, гиперплоскографы и гиперсферографы. Составлены символы элементарных операций этими инструментами в n -мерном пространстве, а также указана простота построения по Лемуану.

Т. Л. МАРТИНОВИЧ

ДО ПИТАННЯ ПРО ПІДКРІПЛЕННЯ АНІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ ПРУЖНИМ СТЕРЖНЕМ

Анізотропна пластинка з круговим отвором, підкріпленим тонким ізотропним стержнем (кільцем) сталого перерізу, розглядалась у працях М. П. Шереметьєва [1, 2]. В цих працях підкріплювальний стержень вважався досить вузьким і при аналітичному записі умов спряження припускалося, що дотик пластинки із стержнем відбувається вздовж осі стержня, тобто нехтувалося відстанню осі стержня від фактичної лінії дотику.

В цій статті, як і в роботі [3] для ізотропної пластинки, ми не робимо цього припущення, а вважаємо, що пластинка дотикається стержня вздовж його крайньої поверхні. Підкріплювальний стержень може бути такої ширини, щоб до нього ще була застосовна гіпотеза нормального плоского перерізу. При складанні рівнянь рівноваги елемента стержня враховуються його розміри.

Позначимо компоненти вектора внутрішнього (усередненого по висоті) напруження, що передається на стержень з боку пластинки, по осях натуральної системи nt через $N^{(i)}$, $T^{(i)}$.

На контурі спаю пластинки із стержнем L повинні справджуватися такі умови, подані в комплексній формі:

$$\begin{aligned} u_1 + iv_1 &= u + iv, \\ N_1^{(i)} + iT_1^{(i)} &= N^{(i)} + iT^{(i)}, \end{aligned} \quad (1)$$

де через u_1 і v_1 позначені компоненти вектора зміщення точок контура L в декартових координатах xy , які відносяться до пластини, а через u і v — ті самі величини для стержня.

Контурні рівності (1) можна виразити через дві аналітичні в своїх площинах функції $\varphi_1(z_1)$ і $\psi_1(z_2)$ комплексного змінного $z_1 = x + s_1 y$ та $z_2 = x + s_2 y$ у такому вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [(p_1 + iq_1) \varphi_1(z_1) + (\bar{p}_1 + i\bar{q}_1) \overline{\varphi_1(z_1)} + (p_2 + iq_2) \psi_1(z_2) + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2) \overline{\psi_1(z_2)}] = \\ = -ie^{-i\alpha} \frac{d}{ds} (u + iv); \\ \frac{d}{dt} [(s_1 - i) \varphi_1(z_1) + (\bar{s}_1 - i) \overline{\varphi_1(z_1)} + (s_2 - i) \psi_1(z_2) + (\bar{s}_2 - i) \overline{\psi_1(z_2)}] = \\ = -i(N^{(i)} + iT^{(i)}) \quad \text{на } L, \end{aligned} \quad (2)$$

де s_1 , s_2 , p_1 , p_2 , q_1 , q_2 — відомі сталі величини, що залежать від пружних характеристик пластинки; α — кут, утворений зовнішньою нормаллю

лю $\vec{n}$ з додатним напрямком осі x . Осі $n\tau$ орієнтовані так само, як і осі xy ; t — афікс точки межі області.

В основу розрахунків стержня покладено гіпотезу нормального жорсткого перерізу. Виходячи з цієї гіпотези в праці [3], ми дістали залежність між переміщеннями точок крайнього волокна стержня, що контактує з пластинкою, відносним подовженням його осі e_0 і кутом повороту поперечного перерізу кільця θ у такій формі

$$e^{-i\alpha} \frac{d}{ds_1} (u+iv) = - \left[\theta - i \left(\frac{r_0}{r_1} e_0 - \varepsilon_1 \frac{d\theta}{ds_1} \right) \right]. \quad (3)$$

З рівнянь рівноваги елемента кільця з врахуванням його розмірів знаходимо [3]

$$N^{(i)} + iT^{(i)} = - \frac{1}{2h} \left[\frac{d}{ds_1} (V_n + iV_\tau) + \frac{i}{r_1} (V_n + iV_\tau) \right] + \frac{h^*}{h} \frac{r_2}{r_1} (N + iT); \quad (4)$$

$$V_n = \frac{dM}{ds_1} + \varepsilon_1 \frac{dV_\tau}{ds_1} - 2h^* b \frac{r_2}{r_1} T. \quad (5)$$

Тут позначено: V_n і V_τ — компоненти головного вектора внутрішніх зусиль, що діють в довільному перерізі стержня; N і T — компоненти вектора зовнішнього (усередненого по висоті) напруження, прикладеного до стержня, по осях натуральної системи $n\tau$; M — момент внутрішніх зусиль у довільному перерізі стержня; r_1 і r_2 — радіуси кривини крайніх волокон стержня, причому під r_1 ми будемо розуміти радіус кривини того крайнього волокна, вздовж якого пластинка дотикається стержня; елемент дуги цього волокна ми позначили через ds_1 ; ε_1 — віддаль крайнього волокна стержня, що контактує з пластинкою, від його осі в площині їх кривини; $2h$ — висота пластинки; $2h^*$ — висота того краю стержня, що не контактує з пластинкою; b — ширина стержня в площині його осі; r_0 — радіус кривини осі стержня.

При малих деформаціях, приймаючи гіпотезу нормального перерізу, закон Гука для криволінійного стержня зводиться до співвідношень [6]

$$e_0 = \frac{V_\tau}{g_1} + \frac{M}{r_0 g_1};$$

$$\frac{d\theta}{ds_1} = \frac{r_0}{r_1} \left[\frac{M}{g_2} + \frac{M}{r_0^2 g_1} + \frac{V_\tau}{r_0 g_1} \right]. \quad (6)$$

де $g_1 = E^* F$ — жорсткість стержня на розтяг; $g_2 = E^* I'$ — жорсткість стержня на згин; F — площа нормального перерізу стержня; E^* — модуль Юнга для стержня;

$$I' = \int_F \frac{r_0}{r_0 + y} y^2 dF,$$

де y — змінна величина, відраховувана від осі стержня. Для прямокутного перерізу стержня $2h^* \times b$ величина I' дорівнює

$$I' = \lambda I_z,$$

де $I_z = \frac{h^* b^3}{6}$ — момент інерції перерізу стержня; b — ширина стержня;

$$\lambda = 12 \left(\frac{r_0^3}{b^3} \ln \frac{2r_0 + b}{2r_0 - b} - \frac{r_0^2}{b^2} \right),$$

або у формі ряду

$$\lambda = 1 + \frac{3b^2}{20r_0^2} + \frac{3b^4}{112r_0^4} + \frac{3b^6}{576r_0^6} + \dots$$

Нормальні напруження в перерізі стержня визначаються за формулою

$$\sigma = \frac{V_\tau}{F} + \frac{M}{r_0 F} + \frac{My}{I' r_0 + y} \quad (7)$$

На підставі співвідношень (3), (4) та (6) крайові умови (2) набувають вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [(p_1 + iq_1) \varphi_1(z_1) + (\bar{p}_1 + i\bar{q}_1) \overline{\varphi_1(z_1)} + (p_2 + iq_2) \psi_1(z_2) + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2) \overline{\psi_1(z_2)}] = \\ = \left(\frac{V_\tau}{g_1} + i \int_0^{s_1} \frac{V_\tau}{r_1 g_1} ds_1 \right) + \left(MG_1 + i \int_0^{s_1} MG_2 ds_1 \right) + i\theta_0; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [(s_1 - i) \varphi_1(z_1) + (\bar{s}_1 - i) \overline{\varphi_1(z_1)} + (s_2 - i) \psi_1(z_2) + (\bar{s}_2 - i) \overline{\psi_1(z_2)}] = \\ = -i \frac{h^*}{h} \frac{r_2}{r_1} (N + iT) + \frac{i}{2h} \left[\frac{d}{ds_1} (V_n + iV_\tau) + \frac{i}{r_1} (V_n + iV_\tau) \right] \text{ на } L, \end{aligned} \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} V_n = \frac{dM}{ds_1} + \varepsilon_1 \frac{dV_\tau}{ds_1} - 2h^* b \frac{r_2}{r_1} T; \\ G_1 = \frac{1}{r_0 g_1} - \varepsilon_1 \frac{r_0}{r_1 g_2}; \quad G_2 = \frac{1}{r_1 r_0 g_1} + \frac{r_0}{r_1 g_2}; \end{aligned} \quad (10)$$

θ_0 — значення кута повороту перерізу стержня при $s=0$. У тому випадку, коли радіус кривини волокна, вздовж якого пластинка спаяна зі стержнем, більший від радіуса кривини стержня, тобто $r_1 > r_0$, у виразах (10) потрібно знаки при ε_1 і b замінити на зворотні.

Одержані контурні умови (8) та (9) будуть вихідними при розв'язуванні задач про пружну рівновагу анізотропної пластинки, край якої прикріплений ізотропним стержнем. Поперечний переріз стержня може бути довільної форми, але симетричний відносно площини кривини осі, тобто площини пластинки.

Для прикладу розглянемо нескінченну анізотропну пластинку з круговим отвором радіуса r_1 , край якого підкріплений замкнутим ізотропним стержнем сталого перерізу. Для простоти викладу будемо вважати, що кільце вільне від дії зовнішніх зусиль і напруження на нескінченності обмежені:

$$X_x^\infty = p, \quad Y_y^\infty = q; \quad X_y^\infty = 0.$$

Область зміни z , зайняту пластинкою, відобразимо на зовнішність одиничного кола функцією:

$$z = \omega(\zeta) = r_1 \zeta; \quad t = r_1 \sigma; \quad \sigma = e^{i\theta}. \quad (11)$$

Тоді, очевидно, функції

$$\begin{aligned} z_1 = \omega_1(\zeta_1) = \frac{r_1}{2} \left[(1 - is_1) \zeta_1 + (1 + is_1) \frac{1}{\zeta_1} \right]; \\ z_2 = \omega_2(\zeta_2) = \frac{r_1}{2} \left[(1 - is_2) \zeta_2 + (1 + is_2) \frac{1}{\zeta_2} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

будуть також конформно переводити відповідні області зміни z_1 і z_2 на зовнішність одиничного кола, причому для контурних точок змінні ζ_1 і ζ_2 набувають одного і того самого значення $\sigma = e^{i\theta}$.

Якщо ввести позначення

$$\begin{aligned}\Phi_1[\omega_1(\zeta_1)] &= \Phi(\zeta_1); & \Psi_1[\omega_2(\zeta_2)] &= \Psi(\zeta_2); \\ \Phi'(\sigma) &= \Phi(\sigma); & \Psi'(\sigma) &= \Psi(\sigma),\end{aligned}$$

то контурні умови (8) та (9) в перетвореній області зведуться до такого вигляду

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_1} \left[(p_1 + iq_1) \Phi(\sigma) - (\bar{p}_1 + i\bar{q}_1) \frac{1}{\sigma^2} \overline{\Phi(\sigma)} + (p_2 + iq_2) \Psi(\sigma) - (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2) \frac{1}{\sigma^2} \overline{\Psi(\sigma)} \right] = \\ = \frac{V_\tau}{g_1} + \int_1^\sigma \frac{V_\tau}{g_1} \frac{d\sigma}{\sigma} + MG_1 + \int_1^\sigma MG_2 r_1 \frac{d\sigma}{\sigma} + i\theta_0; \\ \frac{1}{r_1} \left[(s_1 - i) \Phi(\sigma) - (\bar{s}_1 - i) \frac{1}{\sigma^2} \overline{\Phi(\sigma)} + (s_2 - i) \Psi(\sigma) - (\bar{s}_2 - i) \frac{1}{\sigma^2} \overline{\Psi(\sigma)} \right] = \\ = \frac{i}{2h} \left\{ \epsilon_1 \frac{\sigma}{r_1^2} \left(\sigma \frac{d^2 V_\tau}{d\sigma^2} + 2 \frac{dV_\tau}{d\sigma} \right) - \frac{\sigma}{r_1^2} \left(\sigma \frac{d^2 M}{d\sigma^2} + 2 \frac{dM}{d\sigma} \right) - \frac{1}{r_1} \left(\sigma \frac{dV_\tau}{d\sigma} + V_\tau \right) \right\} \text{ на } \gamma; \quad (13)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_n &= \frac{i\sigma}{r_1} \left(\frac{dM}{d\sigma} - \epsilon_1 \frac{dV_\tau}{d\sigma} \right); & G_1 &= \frac{1}{r_0 g_1} + \epsilon_1 \frac{r_0}{r_1 g_2}; \\ N^{(i)} &= -\frac{i}{2hr_1} \left(\sigma \frac{dV_n}{d\sigma} + iV_\tau \right); \\ T^{(i)} &= -\frac{i}{2hr_1} \left(\sigma \frac{dV_\tau}{d\sigma} - iV_n \right).\end{aligned} \quad (14)$$

Функції $\Phi(\zeta_1)$ і $\Psi(\zeta_2)$, що визначають напружений стан в анізотропній пластинці, в розглядуваному прикладі в змінних ζ_1 і ζ_2 будуть мати вигляд

$$\begin{aligned}\Phi(\zeta_1) &= \frac{r_1(1-is_1)}{2} A_0^* \zeta_1 + \Phi_0(\zeta_1); \\ \Psi(\zeta_2) &= \frac{r_1(1-is_2)}{2} (B_0^* + iC_0^*) \zeta_2 + \Psi_0(\zeta_2),\end{aligned} \quad (15)$$

де $\Phi_0(\zeta_1)$ та $\Psi_0(\zeta_2)$ — регулярні в своїх областях функції, включаючи нескінченно віддалену точку; A_0^* , B_0^* , C_0^* — відомі сталі величини, які виражаються через напруження на нескінченності відомим чином [5].

Тому функції $\Phi(\sigma)$ і $\Psi(\sigma)$ можемо подати у вигляді таких рядів:

$$\Phi(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sigma^{-n}; \quad \Psi(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sigma^{-n}, \quad (16)$$

причому

$$A_0 = \frac{r_1(1-is_1)}{2} A_0^*; \quad B_0 = \frac{r_1(1-is_2)}{2} (B_0^* + iC_0^*); \quad A_1 = 0; \quad B_1 = 0. \quad (17)$$

Вирази внутрішніх зусиль у перерізі кільця подамо у формі комплексних рядів Фур'є:

$$\begin{aligned} V_r &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sigma^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_n \sigma^{-n}; \\ M &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \sigma^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta}_n \sigma^{-n}. \end{aligned} \quad (18)$$

Підставляючи (16) та (18) в крайові умови (13) і зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях σ , приходимо до таких систем алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} (\bar{p}_1 + i\bar{q}_1) \bar{A}_2 + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2) \bar{B}_2 &= (p_1 + iq_1) A_0 + (p_2 + iq_2) B_0 - \frac{r_1}{g_1} \alpha_0 - \\ &- r_1 G_1 \beta_0 - \frac{r_1}{g_1} C_1 - r_1^2 G_2 C_2 - i r_1 \theta_0; \\ (\bar{s}_1 - i) \bar{A}_2 + (\bar{s}_2 - i) \bar{B}_2 &= (s_1 - i) A_0 + (s_2 - i) B_0 + \frac{i}{2h} \alpha_0; \\ \frac{\alpha_0}{g_1} + G_2 r_1 \beta_0 &= 0; \quad \bar{\beta}_1 = 0; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{r_1}{2g_1} \bar{\alpha}_2 + \frac{r_1}{2} (2G_1 - r_1 G_2) \bar{\beta}_2 - (p_1 + iq_1) A_2 - (p_2 + iq_2) B_2 &= -(\bar{p}_1 + i\bar{q}_1) \bar{A}_0 - \\ &- (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2) \bar{B}_0; \\ \frac{1}{2h} \left(1 + \frac{2\varepsilon_1}{r_1} \right) \bar{\alpha}_2 - \frac{2}{2hr_1} \bar{\beta}_2 + i(\bar{s}_1 - i) A_2 + i(\bar{s}_2 - i) B_2 &= i(\bar{s}_1 - i) \bar{A}_0 + i(\bar{s}_2 - i) \bar{B}_0; \\ \frac{1}{r_1} [(\bar{p}_1 + i\bar{q}_1) \bar{A}_{n+2} + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2) \bar{B}_{n+2}] &= - \left[\frac{1}{g_1} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \alpha_n + \left(G_1 + \frac{r_1 G_2}{n} \right) \beta_n \right]; \\ \frac{1}{r_1} [(\bar{s}_1 - i) \bar{A}_{n+2} + (\bar{s}_2 - i) \bar{B}_{n+2}] &= \frac{i}{2hr_1} \left[\frac{n(n+1)}{r_1} \beta_n + (n+1) \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{r_1} n \right) \alpha_n \right], \\ &n=1, 2, 3, \dots; \\ \frac{1}{r_1} [(p_1 + iq_1) A_n + (p_2 + iq_2) B_n] &= \frac{1}{g_1} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \bar{\alpha}_n + \left(G_1 - \frac{r_1 G_2}{n} \right) \bar{\beta}_n; \\ \frac{1}{r_1} [(s_1 - i) A_n + (s_2 - i) B_n] &= - \frac{i}{2hr_1} \left[\frac{n(n-1)}{r_1} \bar{\beta}_n - (n-1) \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{r_1} n \right) \bar{\alpha}_n \right], \\ &n=3, 4, 5, \dots \end{aligned}$$

Тут C_1 та C_2 — сталі інтегрування:

$$C_1 = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n - \bar{\alpha}_n}{n}; \quad C_2 = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n - \bar{\beta}_n}{n}. \quad (20)$$

Із системи рівнянь (19) випливає, що всі непарні коефіцієнти A_n , B_n , α_n і β_n ($n=1, 3, 5, \dots$) рівні нулеві.

Якщо матеріал пластинки є ортотропним і напрямки осей координат x і y збігаються з головними напрямками пружності, то коефіцієн-

ти $a_{16}=0$, $a_{26}=0$, а останні виражаються через модулі Юнга, коефіцієнти Пуассона і модуль зсуву (головні) [4]:

$$a_{11}=\frac{1}{E_1}; \quad a_{22}=\frac{1}{E_2}; \quad a_{12}=-\frac{\nu_1}{E_1}=-\frac{\nu_2}{E_2}; \quad a_{66}=\frac{1}{G}. \quad (21)$$

Для багатьох ортотропних матеріалів параметри s_1 і s_2 чисто уявні:

$$s_1=i\beta_1^*; \quad s_2=i\beta_2^*. \quad (22)$$

Тоді величини p_1 і p_2 будуть дійсними, а величини q_1 і q_2 — чисто уявними [4]:

$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{\beta_1^{*2} + \nu_1}{E_1}; & q_1 &= -i \frac{1 + \nu_2 \beta_1^{*2}}{\beta_1^* E_2}; \\ p_2 &= -\frac{\beta_2^{*2} + \nu_1}{E_1}; & q_2 &= -i \frac{1 + \nu_2 \beta_2^{*2}}{\beta_2^* E_2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Сталі A_0^* , B_0^* при умові (22) виражаються через напруження на нескінченності такими формулами [5]:

$$A_0^* = -\frac{\sigma_x^{(\infty)} + \beta_1^{*2} \sigma_y^{(\infty)}}{2(\beta_1^{*2} - \beta_2^{*2})}; \quad B_0^* = \frac{\sigma_x^{(\infty)} + \beta_2^{*2} \sigma_y^{(\infty)}}{2(\beta_1^{*2} - \beta_2^{*2})}; \quad C_0^* = \frac{\tau_{xy}^{(\infty)}}{2\beta_2^*}. \quad (24)$$

Із системи (19), з врахуванням (23), випливає, що для ортотропної пластинки при $\tau_{xy}^{(\infty)}=0$ коефіцієнти A_n , B_n , α_n і β_n будуть величинами дійсними; тому можемо покласти

$$C_1=0; \quad C_2=0, \quad \theta_0=0.$$

Для кільця прямокутного перерізу $2h^* \times b$ систему рівнянь (19) запишемо в безмірних величинах δ і γ , поклавши

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{b}{r_1}; \quad \gamma = \frac{h^*}{h}; \quad I' = \lambda J_z = \lambda \frac{h^* b^3}{6}; \quad \varepsilon_1 = \frac{b}{2}; \\ g_1 &= 2h^* b E^*; \quad g_2 = \lambda E^* \frac{h^* b^3}{6}. \end{aligned} \quad (25)$$

Враховуючи (23) і (25), система рівнянь (19) набуде вигляду

$$\begin{aligned} (\bar{p}_1 + i\bar{q}_1) A_2 + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2) B_2 &= (p_1 + iq_1) A_0 + (p_2 + iq_2) B_0 - \alpha'_0 a_0; \\ (1 + \beta_1^*) A_2 + (1 + \beta_2^*) B_2 &= (1 - \beta_1^*) A_0 + (1 - \beta_2^*) B_0 - \gamma \alpha'_0; \\ \frac{1}{2E^* \delta} \alpha'_2 + a_2 \beta'_2 &= (p_1 + iq_1) A_2 + (p_2 + iq_2) B_2 - (\bar{p}_1 + i\bar{q}_1) A_0 - (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2) B_0; \\ \gamma(1 + \delta) \alpha'_2 - 2\gamma \delta \beta'_2 &= -(1 + \beta_1^*) A_2 - (1 + \beta_2^*) B_2 + (1 + \beta_1^*) A_0 + (1 + \beta_2^*) B_0; \\ (\bar{p}_1 + i\bar{q}_1) A_{n+2} + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2) B_{n+2} &= -\frac{1}{E^* \delta} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \alpha'_n - \left(b_0 + \frac{1}{n} b_2\right) \beta'_n; \\ (1 + \beta_1^*) A_{n+2} + (1 + \beta_2^*) B_{n+2} &= -\gamma \delta n(n+1) \beta'_n - \frac{\gamma}{2} (n+1) (2 - \delta n) \alpha'_n; \\ &\quad (n=2, 4, \dots) \\ (p_1 + iq_1) A_n + (p_2 + iq_2) B_n &= \frac{1}{E^* \delta} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \alpha'_n + \left(b_0 - \frac{1}{n} b_2\right) \beta'_n; \\ (1 - \beta_1^*) A_n + (1 - \beta_2^*) B_n &= \gamma \delta n(n-1) \beta'_n - \frac{\gamma}{2} (n-1) (2 + \delta n) \alpha'_n; \\ &\quad (n=4, 6, \dots) \end{aligned} \quad (26)$$

де

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{3(2-\delta)^3}{2E^*\delta[3(2-\delta)^2 + \lambda\delta^2]}; \quad \beta_0^1 = -\frac{\lambda(2-\delta)\delta}{2[\lambda\delta^2 + 3(2-\delta)^2]} \alpha_0'; \\ a_2 &= \frac{\lambda\delta^3 - 3(2-\delta)^2(1-\delta)}{\lambda E^*(2-\delta)\delta^2}; \\ b_0 &= \frac{2\lambda\delta + 3(2-\delta)^2}{\lambda E^*\delta(2-\delta)}; \quad \lambda = 3 \frac{(2-\delta)^2}{\delta^2} \left[\frac{2-\delta}{2\delta} \ln \frac{1}{1-\delta} - 1 \right]; \\ b_2 &= \frac{2[\lambda\delta^2 + 3(2-\delta)^2]}{\lambda E^*\delta(2-\delta)}; \quad \alpha_n = 2h^* \alpha_n'; \quad \beta_n = 2h^* b \beta_n'. \end{aligned} \quad (27)$$

Розв'язуючи систему (26), знайдемо коефіцієнти A_n , B_n , α_n і β_n ; ці коефіцієнти залежатимуть від параметра α_0 .

Внаслідок голоморфності функцій $\Phi(\zeta_1)$ і $\Psi(\zeta_2)$ коефіцієнти розкладу їх A_n і B_n з ростом номера n прямують до нуля. Тому знайдеться такий номер N , починаючи з якого всі коефіцієнти A_n і B_n з наперед заданим ступенем точності можна покласти рівними нулеві, тобто

$$A_N(\alpha_0') = 0; \quad B_N(\alpha_0') = 0. \quad (28)$$

Номер « N » повинен бути підібраний так, щоб параметр α_0' , знайдений з першої і другої умов (28), а також з умов $\alpha_N'(\alpha_0') = 0$ і $\beta_N'(\alpha_0') = 0$, з прийнятим ступенем точності збігався.

Для кільця прямокутного перерізу формула (7) в безмірних величинах запишеться

$$\sigma = \frac{V_\tau}{2h^*b} + \frac{\eta M}{2h^*b^2}, \quad (29)$$

де

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{2k(1-\delta)[\delta^2(\lambda+3) - 12\delta + 12] - 3(2-\delta)^3}{\lambda k \delta(1-\delta)(2-\delta)}; \\ k &= \frac{r}{r_2}; \quad \frac{r_1}{r} = \frac{1}{k(1-\delta)}. \end{aligned}$$

Розглянемо числовий приклад. За ортотропну пластинку візьмемо склотекстоліт КАСТ-В товщиною 1 см з пружними даними $E_1 = 1,97 \cdot 10^5$ кг/см²; $E_2 = 1,36 \cdot 10^5$ кг/см²; $G = 0,33 \cdot 10^5$ кг/см²; $\nu_2 = 0,12$.

Підкріплюване кільце прямокутного поперечного перерізу з дюралюміна з модулем пружності $E^* = 7,2 \cdot 10^5$ кг/см².

Пластинка розтягується в напрямі осі x зусиллям $\sigma_x^{(\infty)} = p$ ($\sigma_y^{(\infty)} = 0$, $\tau_{xy}^{(\infty)} = 0$). Обчислення проводились при $\gamma = 1$, $\delta = 0,2$. Числові значення кільцевих напружень σ_θ в пластинці і σ — в кільці в окремих точках вздовж лінії спаю наведені в таблиці.

θ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
σ_θ/p	0,348	0,284	0,199	0,244	0,438	0,707	0,929	0,979	0,821	0,689
σ/p	1,597	1,619	1,684	1,779	1,891	2,001	2,099	2,173	2,219	2,235
$\sigma_\theta^{(0)}/p$	-0,831	-0,688	-0,356	0,029	0,432	0,896	1,508	2,350	3,328	3,834

Тут через $\sigma_\theta^{(0)}$ позначені напруження, що виникають в пластинці з круговим отвором без підкріплення.

ЛІТЕРАТУРА

1. М. П. Шереметьев. Плоско-напряженное состояние пластинки с подкрепленным круговым отверстием. Инженер. сб., т. XIV, Изд-во АН СССР, 1953.
2. М. П. Шереметьев. Пластинки с подкрепленным краем. Изд-во Львов. ун-та, 1960.
3. Т. Л. Мартинович. Пружна рівновага пластинки з криволінійним контуром, підкріпленням пружним кільцем. Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 1, 1965.
4. С. Г. Лехніцький. Анізотропні пластинки. Держтехвидав, 1957.
5. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около отверстий. Гостехтеориздат, 1951.
6. М. М. Филоненко-Бородич. Курс сопротивления материалов, ч. I, Гостехтеориздат, 1955.

Т. Л. МАРТЫНОВИЧ

К ВОПРОСУ О ПОДКРЕПЛЕНИИ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ УПРУГИМ СТЕРЖНЕМ

(резюме)

Рассматривается задача о подкреплении анизотропной пластинки с криволинейным отверстием упругим стержнем постоянного сечения. В отличие от аналогичных работ других авторов, здесь учитывается расстояние оси стержня от фактической линии касания. Приводятся граничные условия задачи. В качестве примера рассмотрена анизотропная пластинка с круговым отверстием, подкрепленным упругим стержнем.

В. О. ЛІХАЧОВ

ДЕЯКІ ЧИСЛОВІ РОЗРАХУНКИ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ЦИЛІНДРА

Як відомо, точні розв'язки просторових задач теорії пружності навіть у випадку простих обмежених областей (наприклад, циліндричної) знайдені лише для певних крайових умов. Нами використані деякі з цих розв'язків у випадку мішаної задачі для циліндра скінченної довжини [1, 2] і одержані числові значення нормальних напружень конкретних задач.

Введемо циліндричну систему координат таким чином: вісь oz направимо по осі циліндра; початок координат виберемо в точці перетину осі oz з площиною нижньої основи циліндра, яка збігається з площиною $z=0$. Тоді безрозмірна координата $\zeta = \frac{z}{R}$ визначає положення поперечних перерізів, а положення точки в будь-якому перерізі визначається координатою $x = \frac{r}{R}$, де R — радіус циліндра.

Нехай тепер циліндр знаходиться під дією осесиметричного навантаження, прикладеного до його торців:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\mu_k x) \\ \tau_{rz} &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_1(\mu_k x) \end{aligned} \right\} \text{ для } \zeta=0, \zeta=l, 0 < x < 1,$$

де l — довжина циліндра, $J_1(\mu_k) = 0$, а на бічній поверхні задовольняються умови

$$u_r(x, \zeta) = 0, \quad \tau_{rz}(x, \zeta) = 0 \quad \text{при } x=1, \quad 0 < \zeta < l.$$

Розглянемо приклади і наведемо для них числові значення нормальних напружень $\sigma_z(x, \zeta)$. Ці значення зведені в таблицю і на їх основі побудовані графіки для деяких поперечних перерізів (рис. 1—4).

Приклад 1.

$$a_0 = 1, \quad a_k = 0, \quad c_k = \frac{2}{\mu_k J_2(\mu_k)}, \quad l = 1$$

$\zeta \backslash x$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
1,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0,9	0,994	0,884	0,860	0,875	1,10	1,22
0,8	0,945	0,852	0,785	0,861	1,12	1,25
0,7	0,906	0,869	0,809	0,903	1,09	1,19
0,6	0,936	0,915	0,898	0,952	1,05	1,10

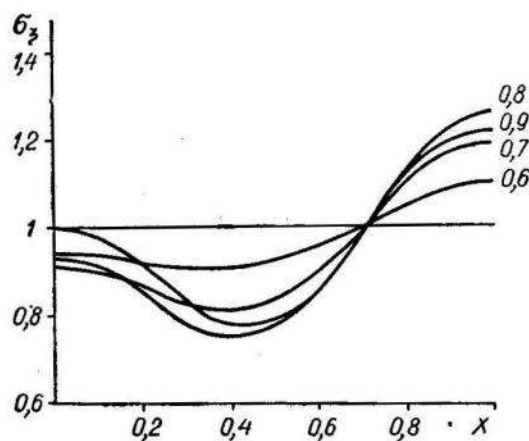


Рис. 1.

Приклад 2.

$$a_0=1, \quad a_k=0, \quad c_k=\frac{2}{\mu_k J_2(\mu_k)}, \quad l=2$$

$\zeta \backslash x$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
2,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
1,8	0,879	0,798	0,732	0,862	1,14	1,28
1,6	0,767	0,744	0,775	0,936	1,12	1,22
1,4	0,806	0,811	0,876	0,973	1,08	1,12
1,2	0,902	0,914	0,946	0,986	1,04	1,06

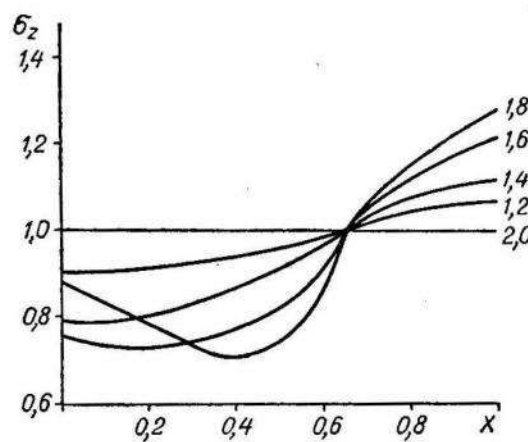


Рис. 2.

Приклад 3.

$$a_k = \frac{8}{\mu_k^2 J_2(\mu_k)}; \quad c_k = 2 \frac{16 - \mu_k^2}{\mu_k^3 J_2(\mu_k)}; \quad l=1$$

$\zeta \backslash x$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,9	1,93	1,86	1,43	0,409	-0,762	-1,27
0,8	1,98	1,83	1,28	0,304	-0,697	-1,12
0,7	1,91	1,74	1,15	0,240	-0,634	-0,987
0,6	1,81	1,63	1,07	0,213	-0,591	-0,911
0,5	1,72	1,56	1,04	0,221	-0,573	-0,895

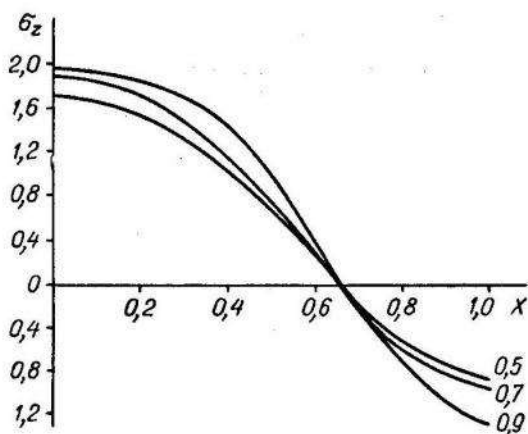


Рис. 3.

Приклад 4.

$$a_k = \frac{8}{\mu_k^2 J_2(\mu_k)}; \quad c_k = 2 \frac{16 - \mu_k^2}{\mu_k^3 J_2(\mu_k)}; \quad l=2$$

$\zeta \backslash x$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
1,9	1,89	1,83	1,41	0,404	-0,749	-1,25
1,7	1,66	1,49	0,985	0,199	-0,543	-0,840
1,5	1,16	1,02	0,628	0,099	-0,352	-0,524
1,3	0,779	0,676	0,402	0,055	-0,227	-0,332
1,0	0,547	0,474	0,281	0,037	-0,159	-0,231

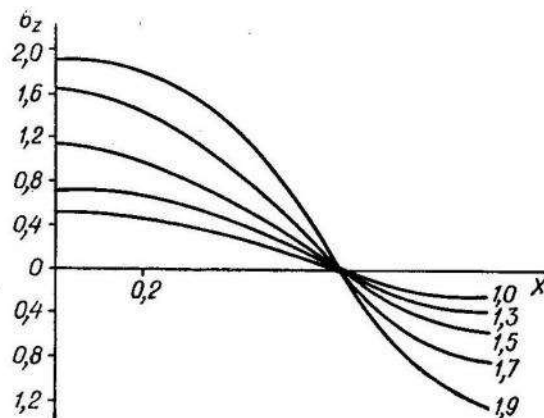


Рис. 4.

ЛІТЕРАТУРА

1. Б. Л. Абрамян. К задаче о симметричной деформации круглого цилиндра. ДАН Арм.ССР, 19, № 1 (1954).
2. Б. Л. Абрамян. Некоторые задачи равновесия круглого цилиндра. ДАН Арм.ССР, 26, № 2 (1958).

В. А. ЛИХАЧЕВ

НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРА

(резюме)

На основании работ Б. Л. Абрамяна рассматривается пространственная осесимметрическая задача теории упругости для цилиндра конечной длины при конкретном образом заданной осесимметрической нагрузке. Приводятся числовые результаты, графики.

Д. Г. ХЛЕБНІКОВ

ДЕЯКІ ЗАДАЧІ ЗГИНУ ПЛАСТИНОК У ФОРМІ СМУГИ З ПІДКРІПЛЕНИМИ КРАЯМИ

Ефективним засобом розв'язку задач згину непідкріплених пластинок у формі півплощини та смуги є метод інтегральних перетворень Фур'є [7]. Цей метод може бути застосований також у випадку пластинок з підкріпленням краєм. Так, у роботі [8] розв'язано задачу згину пластинки-смуги, один з країв якої затиснено, а другий підкріплено тонким пружним стержнем. У даній роботі досліджується згин пластинки у формі смуги з обома підкріпленими краями. Як граничний випадок одержано розв'язок задачі про згин півплощини з підкріпленням краєм, яка іншим шляхом розглядається в роботах А. А. Галасі [1, 2].

1. ЗГИН ПЛАСТИНКИ-СМУГИ З ПІДКРІПЛЕНИМИ КРАЯМИ

Розглянемо ізотропну пластинку в формі смуги $(-\infty < x < \infty, -a \leq y \leq a)$, краї $y = \pm a$ якої підкріплено тонкими пружними стержнями однакової жорсткості (рис. 1). Пластинка перебуває під дією заданого поперечного навантаження інтенсивності $q(x, y)$, що задовольняє умови статички

$$\int_{-a}^a dy \int_{-\infty}^{\infty} q(x, y) dx = 0; \quad (1.1)$$

$$\int_{-a}^a dy \int_{-\infty}^{\infty} x q(x, y) dx = \int_{-a}^a y dy \int_{-\infty}^{\infty} q(x, y) dx = 0.$$

Прогин пластинки $w(x, y)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D} \quad (1.2)$$

і граничні умови [4, стор. 103] *

$$\begin{aligned} \pm \kappa_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}; \\ \pm \kappa_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned} \quad \text{при } y = \pm a, \quad (1.3)$$

* Слід зауважити, що в монографіях [4] (стор. 104, формула (115), [5] (стор. 97, формула (109), [6] (стор. 313, формула (195)) при виводі другої умови допущена помилка в знаку. Для її виправлення в лівих частинах вказаних формул слід замінити мінус на плюс.

причому

$$\kappa_2 = \frac{G_2}{D}, \quad \kappa_3 = \frac{G_3}{D}. \quad (1.4)$$

Тут G_2 і G_3 — жорсткості стержня на згин та кручення, D — циліндрична жорсткість пластинки, ν — коефіцієнт Пуассона. В формулах (1.3) при $y=a$ ($y=-a$) слід брати верхній (нижній) знак.

Трансформанту Фур'є деякої функції $f(x)$ будемо позначати далі через $\tilde{f}(\lambda)$, тобто

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx; \quad (1.5)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda. \quad (1.6)$$

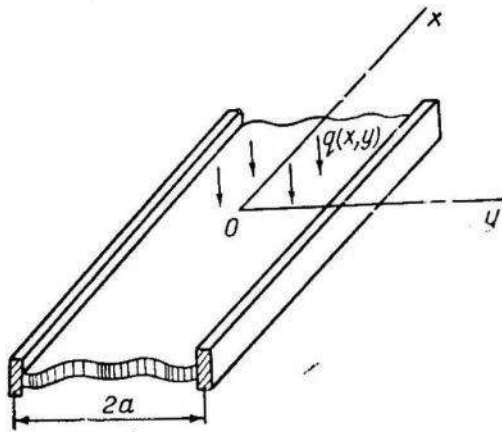


Рис. 1.

($y=0$). У випадку симетричного навантаження пластинки функція $q(x, y)$ є парною по y , і трансформанта прогину має вигляд

$$\tilde{w} = A_1 \operatorname{ch} \lambda y + B_1 \lambda y \operatorname{sh} \lambda y + \tilde{w}_0, \quad (1.7)$$

де $\tilde{w}_0$ — частинний розв'язок перетвореного рівняння (1.2), який дається формулою [7, стор. 88]

$$\tilde{w}_0 = \frac{1}{2D\lambda^3} \int_0^y [\lambda(y-t) \operatorname{ch} \lambda(y-t) - \operatorname{sh} \lambda(y-t)] \tilde{q}(\lambda, t) dt. \quad (1.8)$$

Задовольняючи умови (1.3), одержимо для визначення A_1 і B_1 систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} A_1 [\kappa_2 \lambda \operatorname{ch} \lambda a + (1-\nu) \operatorname{sh} \lambda a] + B_1 [\kappa_2 \lambda^2 a \operatorname{sh} \lambda a - \\ - (1+\nu) \operatorname{sh} \lambda a + (1-\nu) \lambda a \operatorname{ch} \lambda a] = K(\lambda); \\ A_1 [\kappa_3 \lambda \operatorname{sh} \lambda a + (1-\nu) \operatorname{ch} \lambda a] + B_1 [\kappa_3 \lambda (\operatorname{sh} \lambda a + \lambda a \operatorname{ch} \lambda a) + \\ + 2 \operatorname{ch} \lambda a + (1-\nu) \lambda a \operatorname{sh} \lambda a] = -L(\lambda), \end{aligned} \quad (1.9)$$

в яких

$$\begin{aligned} K(\lambda) = \frac{1}{2D\lambda^3} \int_0^a \{ \kappa_2 \lambda [\operatorname{sh} \lambda(a-t) - \lambda(a-t) \operatorname{ch} \lambda(a-t)] + \\ + 2 \operatorname{ch} \lambda(a-t) - (1-\nu) \lambda(a-t) \operatorname{sh} \lambda(a-t) \} \tilde{q}(\lambda, t) dt, \\ L(\lambda) = \frac{1}{2D\lambda^3} \int_0^a \{ \kappa_3 \lambda^2 (a-t) \operatorname{sh} \lambda(a-t) + (1-\nu) \lambda(a-t) \operatorname{ch} \lambda(a-t) + \\ + (1+\nu) \operatorname{sh} \lambda(a-t) \} \tilde{q}(\lambda, t) dt. \end{aligned} \quad (1.10)$$

З системи (1.9) одержимо

$$A_1 = \frac{1}{\Delta_1(\lambda a)} \{ [\kappa_3 \lambda (\operatorname{sh} \lambda a + \lambda a \operatorname{ch} \lambda a) + 2 \operatorname{ch} \lambda a + (1-\nu) \lambda a \operatorname{sh} \lambda a] K(\lambda) + \\ + [\kappa_2 \lambda^2 a \operatorname{sh} \lambda a - (1+\nu) \operatorname{sh} \lambda a + (1-\nu) \lambda a \operatorname{ch} \lambda a] L(\lambda) \}; \quad (1.11)$$

$$B_1 = -\frac{1}{\Delta_1(\lambda a)} \{ [\kappa_3 \lambda \operatorname{sh} \lambda a + (1-\nu) \operatorname{ch} \lambda a] K(\lambda) + \\ + [\kappa_2 \lambda \operatorname{ch} \lambda a + (1-\nu) \operatorname{sh} \lambda a] L(\lambda) \},$$

де

$$\Delta_1(\lambda a) = \kappa_2 \kappa_3 \lambda^2 (\operatorname{ch} \lambda a \operatorname{sh} \lambda a + \lambda a) + 2 \kappa_2 \lambda \operatorname{ch}^2 \lambda a + 2 \kappa_3 \lambda \operatorname{sh}^2 \lambda a + \\ + (3+\nu)(1-\nu) \operatorname{sh} \lambda a \operatorname{ch} \lambda a - (1-\nu)^2 \lambda a. \quad (1.12)$$

Для дослідження збіжності інтеграла, що одержується в результаті обернення за Фур'є виразу (1.7) для трансформанти прогину, зауважимо, що у випадку симетричного навантаження умови рівноваги (1.1) можна записати

$$\int_0^a \tilde{q}(0, y) dy = \int_0^a \tilde{q}'_\lambda(0, y) dy = 0. \quad (1.13)$$

Тому, як впливає з (1.10), при $\lambda \rightarrow 0$ $K(\lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, $L(\lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$ і на основі (1.11) $A_1 = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$.

Таким чином, прогин $w(x, y)$ виражається розбіжним інтегралом. Це пов'язане з тим, що при прийнятій постановці задачі прогин визначається з точністю до жорсткого зміщення пластинки, і для означеності задачі необхідно задати значення w в якій-небудь точці, наприклад, прийняти $w(0, 0) = 0$. Таким шляхом [7] приходимо до остаточного розв'язку у вигляді збіжного інтеграла

$$w = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [(A_1 \operatorname{ch} \lambda y + B_1 \lambda y \operatorname{sh} \lambda y + \tilde{w}_0) e^{-i\lambda x} - A_1] d\lambda, \quad (1.14)$$

причому A_1 і B_1 даються формулами (1.11).

Якщо навантаження на пластинку антисиметричне відносно осі x , то

$$\tilde{w} = A_2 \operatorname{sh} \lambda y + B_2 \lambda y \operatorname{ch} \lambda y + \tilde{w}_0, \quad (1.15)$$

де A_2 і B_2 аналогічним способом визначаються з умов (1.3) і мають вигляд

$$A_2 = \frac{1}{\Delta_2(\lambda a)} \{ [\kappa_3 \lambda (\operatorname{ch} \lambda a + \lambda a \operatorname{sh} \lambda a) + 2 \operatorname{sh} \lambda a + (1-\nu) \lambda a \operatorname{ch} \lambda a] K(\lambda) + \\ + [\kappa_2 \lambda^2 a \operatorname{ch} \lambda a - (1+\nu) \operatorname{ch} \lambda a + (1-\nu) \lambda a \operatorname{sh} \lambda a] L(\lambda) \}; \quad (1.16)$$

$$B_2 = -\frac{1}{\Delta_2(\lambda a)} \{ [\kappa_3 \lambda \operatorname{ch} \lambda a + (1-\nu) \operatorname{sh} \lambda a] K(\lambda) + \\ + [\kappa_2 \lambda \operatorname{sh} \lambda a + (1-\nu) \operatorname{ch} \lambda a] L(\lambda) \},$$

причому

$$\Delta_2(\lambda a) = \kappa_2 \kappa_3 \lambda^2 (\operatorname{sh} \lambda a \operatorname{ch} \lambda a - \lambda a) + 2 \kappa_2 \lambda \operatorname{sh}^2 \lambda a + 2 \kappa_3 \lambda \operatorname{ch}^2 \lambda a + \\ + (3+\nu)(1-\nu) \operatorname{sh} \lambda a \operatorname{ch} \lambda a + (1-\nu)^2 \lambda a. \quad (1.17)$$

З трьох умов статичи (1.1) в даному випадку дві задовольняються тотожно, а третю можна записати

$$\int_0^a y \tilde{q}(0, y) dy = 0. \quad (1.18)$$

Ця умова забезпечує збіжність при $\lambda=0$ інтеграла, який виражає прогин w . Насправді, з (1.15) — (1.17) випливає, що при $\lambda \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= (A_2 + B_2) \lambda y + O(1); \\ A_2 + B_2 &= \frac{2}{\Delta_2(\lambda a)} [\lambda a K(\lambda) - L(\lambda)] + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

Нарешті, на основі (1.18) при $\lambda \rightarrow 0$ $\lambda a K(\lambda) - L(\lambda) = O(1)$, якщо функція $\tilde{q}(\lambda, y)$ є парною по λ , тобто навантаження $q(x, y)$ є симетричним відносно осі y , і $\lambda a K(\lambda) - L(\lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ при антисиметричному навантаженні. Тепер видно, що в обох випадках інтеграл Фур'є для прогину w буде збіжним у точці $\lambda=0$.

Нехай до підкріпленого краю пластинки прикладено розподілені поперечні зусилля $p(x)$ і розподілений момент інтенсивності $m(x)$. Тоді (верхній знак — для симетричної задачі, нижній — для антисиметричної)

$$q(x, y) = p(x) [\delta(y-a) \pm \delta(y+a)] + m(x) [\delta'(y-a) \mp \delta'(y+a)], \quad (1.19)$$

де $\delta(z)$ — імпульсна дельта-функція.

З (1.8), (1.10) випливає, що

$$K(\lambda) = \frac{\tilde{p}(\lambda)}{D\lambda^3}, \quad L(\lambda) = \frac{\tilde{m}(\lambda)}{D\lambda^2}, \quad \tilde{w}_0 = 0. \quad (1.20)$$

Умови рівноваги (1.1) запишуться так: $\tilde{p}(0) = \tilde{p}'(0) = 0$ (симетрична задача), $\tilde{m}(0) = a\tilde{p}(0)$ (антисиметрична задача), що, як і раніше, забезпечує збіжність інтегралів Фур'є.

Як приклад розглянемо пластинку, що знаходиться під дією зосереджених моментів M , які прикладено до підкріплених країв пластинки в точках $(0, a)$ і $(0, -a)$. У цьому випадку

$$p(x) = 0, \quad m(x) = M\delta(x). \quad (1.21)$$

Прогин $w(x, y)$ виражається формулою (1.14), в якій потрібно взяти $\tilde{w}_0 = 0$ і

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{M}{D\lambda^2 \Delta_1(\lambda a)} [\kappa_2 \lambda^2 a \operatorname{sh} \lambda a - (1+\nu) \operatorname{sh} \lambda a + (1-\nu) \lambda a \operatorname{ch} \lambda a]; \\ B_1 &= -\frac{M}{D\lambda^2 \Delta_1(\lambda a)} [\kappa_2 \lambda \operatorname{ch} \lambda a + (1-\nu) \operatorname{sh} \lambda a]. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Наведемо також формули для згинаючого моменту M_y . На середній лінії

$$\begin{aligned} (M_y)_{y=0} &= \frac{M}{\pi} \int_0^\infty \{ \kappa_2 \lambda [2 \operatorname{ch} \lambda a - (1-\nu) \lambda a \operatorname{sh} \lambda a] + \\ &+ (3+\nu)(1-\nu) \operatorname{sh} \lambda a - (1-\nu)^2 \lambda a \operatorname{ch} \lambda a \} \frac{\cos \lambda x d\lambda}{\Delta_1(\lambda a)}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

на контурі підкріплення

$$(M_y)_{y=a} = \frac{M}{\pi} \int_0^\infty [2\kappa_3 \lambda \operatorname{ch}^2 \lambda a + (3+\nu)(1-\nu) \operatorname{ch} \lambda a \operatorname{sh} \lambda a - \\ - (1-\nu)^2 \lambda a] \frac{\cos \lambda x d\lambda}{\Delta_1(\lambda a)}. \quad (1.24)$$

2. ПІВПЛОЩИНА З ПІДКРІПЛЕНИМ КРАЄМ

Результати попереднього параграфу дозволяють шляхом граничного переходу одержати розв'язок задачі про згин пластинки у формі півплощини, край якої підкріплено тонким пружним стержнем.

Нехай до підкріпленого краю $y=0$ пружної ізотропної півплощини ($y \geq 0$) прикладено розподілені поперечні зусилля $p(x)$ та розподілені моменти $m(x)$. Таку задачу було розглянуто А. А. Галасі [1, 2]. Заміняючи в (1.7) (або в (1.15)) y на $a-y$ та враховуючи (1.11) (або (1.16)) і (1.20), одержимо після граничного переходу при $a \rightarrow \infty$

$$\tilde{w} = \frac{e^{-|\lambda| y}}{D |\lambda|^3 \Delta(|\lambda|)} \{ [\kappa_3 |\lambda| (1+|\lambda| y) + (1-\nu) |\lambda| y + 2] \tilde{p}(\lambda) + \\ + [\kappa_2 \lambda^2 y + (1-\nu) |\lambda| y - (1+\nu)] |\lambda| \tilde{m}(\lambda) \}; \quad (2.1)$$

де

$$\Delta(\lambda) = \kappa_2 \kappa_3 \lambda^2 + 2(\kappa_2 + \kappa_3) \lambda + (3+\nu)(1-\nu). \quad (2.2)$$

Для моментів будемо мати формули

$$M_x = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\kappa_3 \lambda [1+\nu + (1-\nu) \lambda y] + (1-\nu)^2 \lambda y + 2(1-\nu^2)}{\lambda \Delta(\lambda)} e^{-\lambda y} d\lambda \int_{-\infty}^\infty p(t) \cos \lambda(t-x) dt + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\kappa_2 \lambda [2\nu + (1-\nu) \lambda y] + (1-\nu)^2 \lambda y - (1-\nu)^2}{\Delta(\lambda)} e^{-\lambda y} d\lambda \int_{-\infty}^\infty m(t) \cos \lambda(t-x) dt; \\ M_y = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\kappa_3 [1+\nu - (1-\nu) \lambda y] - (1-\nu)^2 y}{\Delta(\lambda)} e^{-\lambda y} d\lambda \int_{-\infty}^\infty p(t) \cos \lambda(t-x) dt + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\kappa_2 \lambda [2 - (1-\nu) \lambda y] - (1-\nu)^2 \lambda y + (3+\nu)(1-\nu)}{\Delta(\lambda)} e^{-\lambda y} d\lambda \int_{-\infty}^\infty m(t) \cos \lambda(t-x) dt; \quad (2.3) \\ H_{xy} = \frac{1-\nu}{\pi} \int_0^\infty \frac{\kappa_3 \lambda^2 y + (1-\nu) \lambda y + 1+\nu}{\lambda \Delta(\lambda)} e^{-\lambda y} d\lambda \int_{-\infty}^\infty p(t) \sin \lambda(t-x) dt - \\ - \frac{1-\nu}{\pi} \int_0^\infty \frac{\kappa_2 \lambda (1-\lambda y) - (1-\nu) \lambda y + 2}{\Delta(\lambda)} e^{-\lambda y} d\lambda \int_{-\infty}^\infty m(t) \sin \lambda(t-x) dt,$$

а для перерізуючих сил

$$\begin{aligned}
 N_x = & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\kappa_3 \lambda + 1 - \nu}{\Delta(\lambda)} e^{-\lambda y} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \sin \lambda(t-x) dt + \\
 & + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\kappa_2 \lambda + 1 - \nu}{\Delta(\lambda)} \lambda e^{-\lambda y} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} m(t) \sin \lambda(t-x) dt; \\
 N_y = & -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\kappa_3 \lambda + 1 - \nu}{\Delta(\lambda)} e^{-\lambda y} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \cos \lambda(t-x) dt - \\
 & - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\kappa_2 \lambda + 1 - \nu}{\Delta(\lambda)} \lambda e^{-\lambda y} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} m(t) \cos \lambda(t-x) dt.
 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Якщо на підкріплюючий стержень діє зосереджений момент M , прикладений в початку координат, то на лінії контакту пластинки і стержня ($y=0$) момент M_y розподіляється за законом

$$(M_y)_{y=0} = \frac{M}{\pi \kappa_2} \int_0^{\infty} \frac{[2\lambda + (3+\nu)(1-\nu)] \cos \lambda x' d\lambda}{k\lambda^2 + 2(1+k)\lambda + (3+\nu)(1-\nu)}, \quad (2.5)$$

де безрозмірні величини позначено

$$k = \frac{\kappa_3}{\kappa_2} = \frac{G_3}{G_2}, \quad x' = \frac{x}{\kappa_2}. \quad (2.6)$$

Нескладними перетвореннями вираз (2.5) приводиться до вигляду

$$(M_y)_{y=0} = \frac{M}{\pi \kappa_2} \sum_{n=1}^2 m_n \left\{ \sin(\lambda_n x') \left[\frac{\pi}{2} - \text{Si}(\lambda_n x') \right] - \cos(\lambda_n x') \text{Ci}(\lambda_n x') \right\}. \quad (2.7)$$

Тут

$$\lambda_n = \frac{1+k+(-1)^n \sqrt{(1-k)^2 + (1+\nu)^2}}{k}, \quad m_n = (-1)^n \frac{2\lambda_n - (3+\nu)(1-\nu)}{2\sqrt{(1-k)^2 + (1+\nu)^2}} \quad (n=1, 2). \quad (2.8)$$

У випадку рівних жорсткостей стержня на згин та кручення ($G_2 = G_3$, $k=1$)

$$\lambda_1 = 2m_1 = 1-\nu, \quad \lambda_2 = 2m_2 = 3+\nu. \quad (2.9)$$

Відзначимо, що згинаючий момент M_y на лінії контакту пластинки і стержня має в точці $x=0$ логарифмічну особливість.

3. ЗГИН ПЛАСТИНКИ-СМУГИ, ОПЕРТОЇ ВЗДОВЖ ПІДКРІПЛЕНИХ КРАЇВ

Нехай пластинка у формі смуги ($-\infty < x < \infty$, $-a \leq y \leq a$) є вільно опертою вздовж підкріплених країв $y = \pm a$ (рис. 2). Граничні умови мають вигляд

$$\begin{aligned}
 w = 0, \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \pm \kappa_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \quad \text{при } y = \pm a.
 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Розв'язок поставленої задачі одержується з формул п. 1 шляхом граничного переходу при $\kappa_2 \rightarrow \infty$.

При симетричному навантаженні пластинки трансформанта прогину дається формулою (1.7), причому вирази A_1 і B_1 одержуються з формул (1.10)–(1.12) при $\kappa_2 \rightarrow \infty$ і мають вигляд

$$A_1 = \frac{1}{2D\lambda^3\Delta_1^*(\lambda a)} \int_0^a \{(\kappa_3\lambda \operatorname{sh} \lambda a + 2 \operatorname{ch} \lambda a) [\lambda t \operatorname{ch} \lambda (a-t) + \operatorname{sh} \lambda (a-t)] -$$

$$- [\kappa_3\lambda^2 (a-t) + 2] \lambda a \operatorname{ch} \lambda t - \kappa_3\lambda^2 a \operatorname{sh} \lambda t\} \tilde{q}(\lambda, t) dt; \quad (3.2)$$

$$B_1 = \frac{1}{2D\lambda^3\Delta_1^*(\lambda a)} \int_0^a [\kappa_3\lambda^2 (a-t) \operatorname{sh} \lambda t -$$

$$- (\kappa_3\lambda \operatorname{sh} \lambda a + 2 \operatorname{ch} \lambda a) \operatorname{sh} \lambda (a-t)] \tilde{q}(\lambda, t) dt,$$

де

$$\Delta_1^*(\lambda a) = \kappa_3\lambda (\operatorname{sh} \lambda a \operatorname{ch} \lambda a + \lambda a) +$$

$$+ 2 \operatorname{ch}^2 \lambda a \quad (3.3)$$

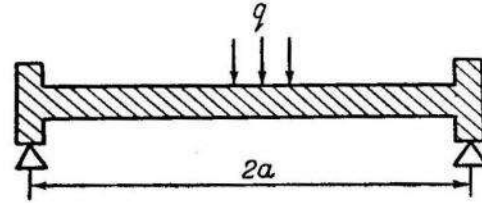


Рис. 2.

Аналогічно при антисиметричному навантаженні пластинки трансформанта прогину має вигляд (1.15), де

$$A_2 = \frac{1}{2D\lambda^3\Delta_2^*(\lambda a)} \int_0^a \{(\kappa_3\lambda \operatorname{ch} \lambda a + 2 \operatorname{sh} \lambda a) [\lambda t \operatorname{ch} \lambda (a-t) + \operatorname{sh} \lambda (a-t)] -$$

$$- [\kappa_3\lambda^2 (a-t) + 2] \lambda a \operatorname{sh} \lambda t - \kappa_3\lambda^2 a \operatorname{ch} \lambda t\} \tilde{q}(\lambda, t) dt; \quad (3.4)$$

$$B_2 = \frac{1}{2D\lambda^3\Delta_2^*(\lambda a)} \int_0^a [\kappa_3\lambda^2 (a-t) \operatorname{ch} \lambda t - (\kappa_3\lambda \operatorname{ch} \lambda a +$$

$$+ 2 \operatorname{sh} \lambda a) \operatorname{sh} \lambda (a-t)] \tilde{q}(\lambda, t) dt,$$

причому

$$\Delta_2^*(\lambda a) = \kappa_3\lambda (\operatorname{sh} \lambda a \operatorname{ch} \lambda a - \lambda a) + 2 \operatorname{sh}^2 \lambda a. \quad (3.5)$$

Зауважимо, що при $\lambda \rightarrow 0$ $A_2 + B_2 = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$. Це забезпечує збіжність інтеграла, який одержується при оберненні згідно з (1.6) виразу (1.15) для $\tilde{w}$.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. В точці $(0, c)$ пластинки ($c > 0$) прикладена зосереджена сила P . Я ще розбити задачу на симетричну та антисиметричну і перейти до безрозмірних величин

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{a}, \quad \zeta = \frac{c}{a}, \quad \delta = \frac{\kappa_3}{a}, \quad (3.6)$$

то після викладок одержимо остаточний вираз прогину

$$w = \frac{Pa^2}{4\pi D} \int_0^\infty [f_1(\eta, \zeta, \lambda) + f_2(\eta, \zeta, \lambda)] \cos \lambda \xi d\lambda \quad \text{при } -1 \leq \eta \leq \zeta. \quad (3.7)$$

Функції $f_1(\eta, \zeta, \lambda)$ та $f_2(\eta, \zeta, \lambda)$, що відповідають симетричній та антисиметричній складовим навантаження, мають вигляд

$$f_1(\eta, \zeta, \lambda) = \frac{1}{\lambda^3 \Delta_1^*(\lambda)} \{ (\delta \lambda \operatorname{sh} \lambda + 2 \operatorname{ch} \lambda) [\operatorname{sh} \lambda (1 - \zeta) (\operatorname{ch} \lambda \eta - \lambda \eta \operatorname{sh} \lambda \eta) + \\ + \lambda \zeta \operatorname{ch} \lambda (1 - \zeta) \operatorname{ch} \lambda \eta] + \delta \lambda^3 (1 - \zeta) (\eta \operatorname{sh} \lambda \zeta \operatorname{sh} \lambda \eta - \operatorname{ch} \lambda \zeta \operatorname{ch} \lambda \eta) - \\ - (\delta \lambda \operatorname{sh} \lambda \zeta + 2 \operatorname{ch} \lambda \zeta) \lambda \operatorname{ch} \lambda \eta \}; \quad (3.8)$$

$$f_2(\eta, \zeta, \lambda) = \frac{1}{\lambda^3 \Delta_2^*(\lambda)} \{ (\delta \lambda \operatorname{ch} \lambda + 2 \operatorname{sh} \lambda) [\operatorname{sh} \lambda (1 - \zeta) (\operatorname{sh} \lambda \eta - \lambda \eta \operatorname{ch} \lambda \eta) + \\ + \lambda \zeta \operatorname{ch} \lambda (1 - \zeta) \operatorname{sh} \lambda \eta] + \delta \lambda^3 (1 - \zeta) (\eta \operatorname{ch} \lambda \zeta \operatorname{ch} \lambda \eta - \operatorname{sh} \lambda \zeta \operatorname{sh} \lambda \eta) - \\ - (\delta \lambda \operatorname{ch} \lambda \zeta + 2 \operatorname{sh} \lambda \zeta) \lambda \operatorname{sh} \lambda \eta \}.$$

При $\zeta \leq \eta \leq 1$ у відповідності з теоремою Максвелла про взаємність переміщень прогин записується

$$w = \frac{Pa^2}{4\pi D} \int_0^\infty [f_1(\zeta, \eta, \lambda) + f_2(\zeta, \eta, \lambda)] \cos \lambda \xi d\lambda. \quad (3.9)$$

Граничні значення параметра δ відповідають шарнірному опираю ($\delta=0$) або жорсткому затисненню ($\delta=\infty$) країв пластини. Ці задачі розглянуто в монографії Я. С. Уфлянда [7, стор. 96—100]. При $\delta \rightarrow 0$ і $\delta \rightarrow \infty$ формули (3.8) узгоджуються з відповідними формулами в [7].

У випадку шарнірно опертої пластинки ($\delta=0$) інтеграли (3.7), (3.9) шляхом контурного інтегрування і застосування теореми про лишки [9, стор. 16] перетворюються в ряд [4, стор. 169]:

$$w = \frac{2Pa^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left(1 + \frac{\pi}{2} m |\xi| \right) e^{-\frac{\pi}{2} m |\xi|} \sin \frac{\pi}{2} m (1 + \zeta) \sin \frac{\pi}{2} m (1 + \eta). \quad (3.10)$$

Значення згинаючого моменту на підкріпленому краї таке:

$$(M_y)_{\eta=1} = - \frac{P\delta}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{\lambda \operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda \zeta - \lambda \zeta \operatorname{sh} \lambda \zeta \operatorname{ch} \lambda}{\delta \lambda (\operatorname{sh} 2\lambda + 2\lambda) + 4 \operatorname{ch}^2 \lambda} + \right. \\ \left. + \frac{\lambda \operatorname{ch} \lambda \operatorname{sh} \lambda \zeta - \lambda \zeta \operatorname{ch} \lambda \zeta \operatorname{sh} \lambda}{\delta \lambda (\operatorname{sh} 2\lambda - 2\lambda) + 4 \operatorname{sh}^2 \lambda} \right] \cos \lambda \xi d\lambda. \quad (3.11)$$

При $\delta \rightarrow \infty$, тобто для зашцімленої пластинки, звідси одержується формула (23.13) монографії [7].

Приклад 2. Зосереджена сила P прикладена в центрі пластинки. Вираз прогину одержується з (1.7), (1.8), (3.2), якщо покласти $q(x, y) = P\delta(x)\delta(y)$, або з формул (3.7)—(3.9) граничним переходом $\zeta \rightarrow 0$.

Максимальний прогин має місце під силою

$$w_{\max} = \frac{Pa^2}{2\pi D} \int_0^\infty \frac{\delta \lambda (\operatorname{sh}^2 \lambda - \lambda^2) + \operatorname{sh} 2\lambda - 2\lambda}{\lambda^3 [\delta \lambda (\operatorname{sh} 2\lambda + 2\lambda) + 4 \operatorname{ch}^2 \lambda]} d\lambda. \quad (3.12)$$

Його можна записати у вигляді

$$w_{\max} = \alpha \frac{Pa^2}{D}. \quad (3.13)$$

Підраховані шляхом чисельного інтегрування деякі значення коефіцієнта α при різних значеннях параметра підкріплення δ дано в таблиці.

Коефіцієнти α і β у формулах (3.13) і (3.17) для максимального прогину

$\delta = \frac{G_3}{aD}$	Зосереджена сила $W_{\max} = \alpha \frac{Pa^2}{D}$	Рівномірне навантаження по лінії $y=0$ $W_{\max} = \beta \frac{2q_0 a^3}{D}$
	α	β
0	0,0678	0,0406
0,1	0,0666	0,0397
0,5	0,0628	0,0370
1	0,0595	0,0347
5	0,0491	0,0274
10	0,0446	0,0243
50	0,0365	0,0189
100	0,0345	0,0175
∞	0,0290	0,0138

* Підрахунки для таблиці проведено в обчислювальному центрі Львівського держуніверситету на ЕЦОМ „Урал-1“ А. Р. Денисовою, якій автор висловлює щирю подяку.

Для обчислення $w_{\max}$ при малих значеннях δ зручно користуватися розкладом

$$w_{\max} = \frac{Pa^2}{2\pi D} (a_0 - a_1\delta + a_2\delta^2 + \dots + (-1)^n a_n \delta^n + (-1)^{n+1} r_n \delta^{n+1}), \quad (3.14)$$

де

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} 2\lambda - 2\lambda}{\lambda^3 \operatorname{ch}^2 \lambda} d\lambda; \\ a_n &= \frac{1}{4^n} \int_0^\infty \frac{[\lambda (\operatorname{sh} 2\lambda + 2\lambda)]^{n-1} \operatorname{sh}^2 \lambda}{\operatorname{ch}^{2(n+1)} \lambda} d\lambda \quad (n=1, 2, \dots); \\ r_n &= \frac{1}{4^n} \int_0^\infty \frac{[\lambda (\operatorname{sh} 2\lambda + 2\lambda)]^n \operatorname{sh}^2 \lambda d\lambda}{\operatorname{ch}^{2(n+1)} \lambda [\delta \lambda (\operatorname{sh} 2\lambda + 2\lambda) + 4 \operatorname{ch}^2 \lambda]}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Коефіцієнти a_n розкладу (3.14) шляхом нескладних перетворень виражаються через протабульовані інтеграли [10]. Значення кількох перших коефіцієнтів такі:

$$a_0 = 0,42628, \quad a_1 = 0,08333, \quad a_2 = 0,05537, \quad a_3 = 0,04719.$$

Приклад 3. Навантаження q_0 є рівномірно розподіленим вздовж осі y по всій ширині пластинки. В цьому випадку $q(x, y) = q_0 \delta(x)$, і прогин має вигляд

$$\begin{aligned} w = \frac{q_0 a^3}{\pi D} \int_0^\infty \left[1 - 2 \frac{\delta \lambda (\lambda \operatorname{ch} \lambda + \operatorname{sh} \lambda) + \lambda \operatorname{sh} \lambda + 2 \operatorname{ch} \lambda}{\delta \lambda (\operatorname{sh} 2\lambda + 2\lambda) + 4 \operatorname{ch}^2 \lambda} \operatorname{ch} \lambda \eta + \right. \\ \left. + 2 \frac{(\delta \lambda \operatorname{sh} \lambda + \operatorname{ch} \lambda) \lambda \eta \operatorname{sh} \lambda \eta}{\delta \lambda (\operatorname{sh} 2\lambda + 2\lambda) + 4 \operatorname{ch}^2 \lambda} \right] \frac{\cos \lambda \xi}{\lambda^4} d\lambda. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Найбільшого значення прогин досягає в центрі пластинки ($\xi = \eta = 0$), де його можна записати

$$w_{\max} = \beta \frac{2q_0 a^3}{D}. \quad (3.17)$$

Ряд значень коефіцієнта β при різних δ наводиться в таблиці, з якої видно, що при рівномірному розподілі сили $P = 2aq_0$ по ширині пластинки максимальний прогин зменшується в 1,7—2,1 раза.

Згинаючий момент M_y на підкріпленому краї $y = a$ виражається так:

$$(M_y)_{\eta=1} = -\frac{q_0 a \delta}{\pi} \int_0^\infty \frac{(\operatorname{sh} 2\lambda - 2\lambda) \cos \lambda \xi d\lambda}{\lambda [\delta \lambda (\operatorname{sh} 2\lambda + 2\lambda) + 4 \operatorname{ch}^2 \lambda]}. \quad (3.18)$$

У випадку вільно опертої невідкріпленої пластинки ($\delta = 0$) вираз прогину у вигляді ряду дано в монографії [4, стор. 176]. Цей вираз одержується з (3.16) при $\delta = 0$ за допомогою контурного інтегрування та використання теореми про лишки [9]:

$$w = \frac{8q_0 a^3}{\pi^4 D} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^4} \left[1 + \frac{\pi}{2} (2k+1) |\xi| \right] e^{-\frac{\pi}{2} (2k+1) |\xi|} \cos \frac{\pi}{2} (2k+1) \eta. \quad (3.19)$$

Для затисненої по краях пластинки задача розв'язана П. Ф. Папковичем [3]. Вирази (3.16), (3.18) при $\delta \rightarrow \infty$ переходять у формули П. Ф. Папковича.

Приклад 4. Якщо взяти $q(x, y) = q_0 \operatorname{sgn} x$, то одержимо розв'язок для рівномірно навантаженої пластинки-півсмуги ($0 \leq x < \infty$, $-a \leq y \leq a$), у якій край $x = 0$ та підкріплені края $y = \pm a$ є вільно опертими:

$$w = \frac{2q_0 a^4}{\pi D} \int_0^\infty \left[1 - 2 \frac{\delta \lambda (\lambda \operatorname{ch} \lambda + \operatorname{sh} \lambda) + \lambda \operatorname{sh} \lambda + 2 \operatorname{ch} \lambda}{\delta \lambda (\operatorname{sh} 2\lambda + 2\lambda) + 4 \operatorname{ch}^2 \lambda} \operatorname{ch} \lambda \eta + \right. \\ \left. + 2 \frac{(\delta \lambda \operatorname{sh} \lambda + \operatorname{ch} \lambda) \lambda \eta \operatorname{sh} \lambda \eta}{\delta \lambda (\operatorname{sh} 2\lambda + 2\lambda) + 4 \operatorname{ch}^2 \lambda} \right] \frac{\sin \lambda \xi}{\lambda^5} d\lambda. \quad (3.20)$$

Вираз прогину (3.16) в попередній задачі одержується звідси диференціюванням по x і заміною $2q_0$ на q_0 . Це впливає з рівності

$$\frac{d}{dx} (q_0 \operatorname{sgn} x) = 2q_0 \delta(x).$$

Перейшовши у формулі (3.20) до границі при $\delta \rightarrow \infty$, одержимо прогин рівномірно навантаженої пластинки-півсмуги, затисненої по краях $y = \pm a$ і опертої по краю $x = 0$ [4, стор. 252].

ЛІТЕРАТУРА

1. А. А. Галаси. К вопросу о напряжениях в пластинке, подкрепленной тонким упругим стержнем. Науч. зап. Ужгород. гос. ун-та, т. 18, 1957.
2. А. А. Галаси. К вопросу приложения интегральных преобразований в теории упругости. Доклады и сообщения Ужгород. гос. ун-та, сер. физ.-мат. наук, № 4, 1961.
3. П. Ф. Папкович. Труды по строительной механике корабля, т. 3, Судпромгиз, Л., 1962, стр. 298—303.
4. С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. Пластинки и оболочки. Физматгиз, М., 1963.
5. С. П. Тимошенко. Пластинки и оболочки. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
6. С. П. Тимошенко. Устойчивость упругих систем. ГИТТЛ, М., 1955.

7. Я. С. Уфлянд. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд. АН СССР, М.—Л., 1963.

8. М. П. Шереметьев, Д. Г. Хлебников. Згин нескінченної смуги з підкріпленням краєм. Прикладна механіка, т. 7, в. 2, 1961.

9. А. М. Эфрос, А. М. Данилевский. Операционное исчисление и контурные интегралы. Харьков, 1937.

10. C. B. Ling. Tables of values of the integrals $\int_0^{\infty} \frac{x^m}{\operatorname{sh}^p x} dx$ and $\int_0^{\infty} \frac{x^m}{\operatorname{ch}^p x} dx$.

Journal of Mathematics and Physics, v. 31, № 1, 58—62 (1952).

Д. Г. ХЛЕБНИКОВ

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ПЛАСТИНОК В ФОРМЕ ПОЛУПЛОСКОСТИ И ПОЛОСЫ С ПОДКРЕПЛЕННЫМИ КРАЯМИ

(резюме)

Методом интегральных преобразований Фурье решены задачи об изгибе тонкой пластинки в форме полосы, оба края которой подкреплены тонкими упругими стержнями. Рассмотрены случаи, когда подкрепленные края пластинки: 1) свободны от нагрузки или загружены заданными усилиями и моментами; 2) свободно оперты.

Предельным переходом получено решение рассмотренной ранее А. А. Галаси [1, 2] задачи об изгибе полуплоскости с подкрепленным краем.

С. П. ГАВЕЛЯ, В. М. КОСАРЧИН

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НА ЕЛЕКТРОННО-ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЦИФРОВІЙ МАШИНІ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ

Нижче будуються алгоритми розв'язування на електронно-обчислювальній машині крайових задач для пологих оболонок з отворами знакосталої гауссової кривини, а також аналогічних періодичних задач для замкнутих оболонок, окреслених по поверхнях обертання. Крайові умови відповідають деякому випадку пружного закріплення.

Запропоноване В. З. Власовим [1, стор. 437] припущення про сталість головних кривин k_1, k_2 пологої оболонки дозволяє записати систему рівнянь її пружної рівноваги у вигляді

$$(1 - \kappa) \Delta u + 2\kappa \partial \partial' u = -4\kappa \delta \partial' w; \quad (1)$$

$$\Delta \Delta w = \frac{1 - \sigma^2}{Eh^3} Z - \frac{12}{h^2} \delta \partial' u - \frac{12}{h^2} (k_1^2 + k_2^2 + 2\sigma k_1 k_2) w. \quad (2)$$

Тут

$$\delta = \frac{1}{1 + \sigma} \begin{pmatrix} k_1 + \sigma k_2 & 0 \\ 0 & k_2 + \sigma k_1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \partial = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix};$$

$$\partial' = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \quad \Delta = \partial \partial' = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right), \quad \kappa = \frac{1 + \sigma}{3 - \sigma};$$

x_1, x_2 — криволінійні координати довільної точки x серединної поверхні оболонки: $u_1 = u_1(x), u_2 = u_2(x), w = w(x)$ — компоненти вектора зміщень; $Z = Z(x)$ — напрямлене по нормалі зовнішнє навантаження; E і σ — модуль Юнга і коефіцієнт пружності матеріалу відповідно; h — товщина оболонки.

Нехай оболонка заповнює в площині $x_1 O x_2$ область Ω з границею S , що складається з прямокутника $x_1 = \pm a_1, x_2 = \pm a_2$ та еліпса $x_1 = b_1 + a_1 \cos t, x_2 = b_2 + a_2 \sin t$.

Вважаються виконаними граничні умови

$$u_1|_S = u_2|_S = w|_S = 0; \quad (3)$$

$$D \Delta w|_S = \left(M_n - D \frac{1 - \sigma}{\rho} \frac{\partial w}{\partial n} \right)|_S = 0, \quad (4)$$

де $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \sigma^2)}$; ρ — радіус кривини еліпса.

При побудові алгоритму розв'язування задачі (1), (2), (3), (4) для пологої оболонки знакосталої гауссової кривини може бути в значній мірі збережена схема, запропонована в [2] для пологої сферичної оболонки.

Коефіцієнти u_{ilm} , u_{2lm} , w_{lm} розкладів

$$u_i(x) = \sum_{l, m=1, 2, 3, \dots} u_{ilm} \sin \frac{l\pi}{2} \left(\frac{x_1}{\alpha_1} + 1 \right) \sin \frac{m\pi}{2} \left(\frac{x_2}{\alpha_2} + 1 \right); \quad (5)$$

$$w(x) = \sum_{l, m=1, 2, 3, \dots} w_{lm} \sin \frac{l\pi}{2} \left(\frac{x_1}{\alpha_1} + 1 \right) \sin \frac{m\pi}{2} \left(\frac{x_2}{\alpha_2} + 1 \right) \quad (6)$$

будуть визначатися формулами

$$u_{ilm} = \sum_{q=0}^{\infty} \kappa^q u_{i, q; lm}; \quad w_{lm} = \sum_{q=0}^{\infty} \kappa^q w_{q; lm};$$

$$u_{i, q; lm} = \sum_{kn} G_{knlm} \Phi_{i, q; kn};$$

$$w_{q, lm} = \sum_{kn} G_{knlm} v_{q, kn}; \quad v_{q, lm} = \sum_{kn} G_{knlm} F_{q, kn};$$

$$\begin{aligned} \Phi_{1, q-1; lm} = & \left(\frac{l^2 \pi^2}{4\alpha_1^2} - \frac{m^2 \pi^2}{4\alpha_2^2} \right) u_{1, q-1; lm} - \sum_{rs} \frac{\pi^2 rs}{2\alpha_1 \alpha_2} \gamma_{rl} \gamma_{sm} u_{2, q-1; rs} - \\ & - \frac{2(k_1 + \sigma k_2)}{1 + \sigma} \sum_r \frac{\pi r}{\alpha_1} \gamma_{rl} w_{q-1; rm}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{2, q-1; lm} = & \left(\frac{m^2 \pi^2}{4\alpha_2^2} - \frac{l^2 \pi^2}{4\alpha_1^2} \right) u_{2, q-1; lm} - \sum_{rs} \frac{\pi^2 rs}{2\alpha_1 \alpha_2} \gamma_{rl} \gamma_{1m} u_{1, q-1; rs} - \\ & - \frac{2(k_2 + \sigma k_1)}{1 + \sigma} \sum_r \frac{\pi r}{\alpha_2} \gamma_{rm} w_{q-1; rm}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$F_{0kn} = \frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3 \alpha_1 \alpha_2} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \int_{-\alpha_2}^{\alpha_2} Z(x_1, x_2) \sin \frac{k\pi}{2} \left(\frac{x_1}{\alpha_1} + 1 \right) \sin \frac{m\pi}{2} \left(\frac{x_2}{\alpha_2} + 1 \right) dx_1 dx_2;$$

$$\begin{aligned} F_{qkn} = & -\frac{6}{h^2} (k_1 + \sigma k_2) \sum_r \frac{\pi r}{\alpha_1} \gamma_{rk} u_{1, q; rn} - \frac{6}{h^2} (k_2 + \sigma k_1) \sum_r \frac{\pi r}{\alpha_2} \gamma_{rn} u_{2, q; kr} - \\ & - \frac{3-\sigma}{1+\sigma} (k_1^2 + k_2^2 + 2\sigma k_1 k_2) w_{q-1; kn}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$G_{lmkn} = \frac{4\alpha_1^2 \alpha_2^2}{\pi^2 (l^2 \alpha_2^2 + m^2 \alpha_1^2)} \left(N_{lmkn} - \begin{bmatrix} k & n \\ l & m \end{bmatrix} \right);$$

$$N_{lmkn} = \frac{1}{k^2 \alpha_2^2 + n^2 \alpha_1^2} \sum_{rs} (P_{kns} P_{lmr} R_{1, rs} + Q_{kns} Q_{lmr} R_{2, rs});$$

$$\cos \frac{l\pi}{2} \left(\frac{x_l}{\alpha_l} + 1 \right) = \sum_k \gamma_{lk} \sin \frac{k\pi}{2} \left(\frac{x_l}{\alpha_l} + 1 \right); \quad \begin{bmatrix} k & n \\ l & m \end{bmatrix} = \delta_{kl} \delta_{nm};$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$P_{lmn} = \int_0^{2\pi} \sin \frac{l\pi}{2} \left(\frac{\xi_1}{\alpha_1} + 1 \right) \sin \frac{m\pi}{2} \left(\frac{\xi_2}{\alpha_2} + 1 \right) \cos nt \, dt;$$

$$Q_{lmn} = \int_0^{2\pi} \sin \frac{l\pi}{2} \left(\frac{\xi_1}{\alpha_1} + 1 \right) \sin \frac{m\pi}{2} \left(\frac{\xi_2}{\alpha_2} + 1 \right) \sin nt \, dt;$$

R_{1nk} і R_{2nk} — елементи оберненої матриці системи

$$\sum_{l, mk} \frac{P_{lmn} P_{lmk}}{l^2 \alpha_2^2 + m^2 \alpha_1^2} u_{1k} + \sum_{lmk} \frac{P_{lmn} Q_{lmk}}{l^2 \alpha_2^2 + m^2 \alpha_1^2} u_{2k} = \sum_{lm} \frac{\alpha_1 \alpha_2 P_{lmn}}{l^2 \alpha_2^2 + m^2 \alpha_1^2} F_{lm};$$

$$\sum_{lmk} \frac{Q_{lmn} P_{lmk}}{l^2 \alpha_2^2 + m^2 \alpha_1^2} u_{1k} + \sum_{lmk} \frac{Q_{lmn} Q_{lmk}}{l^2 \alpha_2^2 + m^2 \alpha_1^2} u_{2k} = \sum_{lm} \frac{\alpha_1 \alpha_2 Q_{lmn}}{l^2 \alpha_2^2 + m^2 \alpha_1^2} F_{lm}.$$

При умові достатньої малості кривин k_1, k_2 збіжність цього ітераційного за індексом q процесу обчислень впливає з доведеної в [3] теореми.

Розглянемо тепер замкнуту оболонку з еліптичними отворами, окреслену по поверхні обертання знакосталої гауссової кривини з пологим меридіаном, напружений стан якої задовольняє умову n -кратної періодичності вздовж паралелей $x_1 = \text{const}$. Можливість відповідно до викладеного в [4] способу уявного розчленування такої оболонки на смуги, що періодично повторюються, дозволяє при $n > 2$ побудувати алгоритм її розрахунку шляхом невеликої зміни наведеного вище.

З цією метою функції $\sin \frac{m\pi}{2} \left(\frac{x_2}{\alpha_2} + 1 \right)$ слід замінити функціями $\cos \frac{m\pi}{2} \frac{x_2}{\alpha_2}$ у формулах, які визначають u_1, w, F_q , і функціями $\sin \frac{m\pi}{2} \frac{x_2}{\alpha_2}$ при визначенні u_2 .

Формули (7), (8), (9) спрощуються:

$$\Phi_{1, q-1, lm} = \left(\frac{l^2 \pi^2}{4 \alpha_1^2} - \frac{m^2 \pi^2}{4 \alpha_2^2} \right) u_{1, q-1, lm} - \sum_r \frac{\pi^2 r m}{2 \alpha_1 \alpha_2} \gamma_{rl} u_{2, q-1, rm} -$$

$$- \frac{2(k_1 + \sigma k_2)}{1 + \sigma} \sum_r \frac{\pi r}{\alpha_1} \gamma_{rl} w_{q-1, rm};$$

$$\Phi_{2, q-1, lm} = \left(\frac{m^2 \pi^2}{4 \alpha_2^2} - \frac{l^2 \pi^2}{4 \alpha_1^2} \right) u_{2, q-1, lm} + \sum_r \frac{\pi^2 r m}{2 \alpha_1 \alpha_2} \gamma_{rl} u_{1, q-1, rm} -$$

$$- \frac{2(k_2 + \sigma k_1)}{1 + \sigma} \frac{m\pi}{\alpha_2} w_{q-1, lm};$$

$$F_{q, lm} = - \frac{6}{h^2} (k_1 + \sigma k_2) \sum_r \frac{\pi r}{\alpha_1} \gamma_{rl} u_{1, q, rm} - \frac{6}{h^2} (k_2 + \sigma k_1) \frac{\pi m}{\alpha_2} u_{2, q, lm} -$$

$$- \frac{3 - \sigma}{1 + \sigma} (k_1^2 + k_2^2 + 2\sigma k_1 k_2) w_{q-1, lm}.$$

Побудовані таким чином програми виявляються придатними для довільно заданих в кожному конкретному випадку зовнішнього навантаження Z та параметрів оболонки: $k_1, k_2; \alpha_1, \alpha_2; a_1, a_2; b_1, b_2; \sigma, E$. Така загальність дозволяє дослідити залежність напруженого стану оболонки від значень цих параметрів шляхом порівняння результатів обчислень. Розрахунок контрольного варіанту на електронно-обчислювальній машині типу «Стріла-4» виявляє (при $b_2 = 0$) ефективність по-

будованого алгоритму, дозволяючи визначити коефіцієнти u_{ilm} , u_{2lm} , w_{lm} розкладів (5), (6) для $l, m=1, 2, 3, \dots, 10$. Це забезпечує високу точність (порядку 0,5%) при визначенні зміщень $u_1(x)$, $u_2(x)$, $w(x)$ і цілком задовільну точність при визначенні напружень.

ЛІТЕРАТУРА

1. В. З. Власов. Общая теория оболочек. Гостехиздат, М—Л., 1949.
2. С. П. Гавеля, В. М. Косарчин. Пружна рівновага пологої сферичної оболонки, обмеженої еліпсом і прямокутником. Зб. робіт аспірантів. Вид-во Львів. ун-ту, 1963.
3. Я. Б. Лопатинский. Об одном методе решения второй основной задачи теории упругости. Теоретическая и прикладная математика, вып. 1, Львов, 1958.
4. Н. В. Колкунов. Расчет оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны на периодическую нагрузку. Труды II Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. К., 1962.

С. П. ГАВЕЛЯ, В. Н. КОСАРЧИН

РЕШЕНИЕ НА ЭЛЕКТРОННО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ЦИФРОВОЙ МАШИНЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

(резюме)

Построены алгоритмы решений на электронно-вычислительной машине граничных задач для пологих оболочек с отверстиями знакопостоянной гауссовой кривизны, а также аналогичных периодических задач для замкнутых оболочек, очерченных по поверхностям вращения. Граничные условия соответствуют некоторому виду упругого закрепления.

А. І. ПИЛИПОВИЧ

ПРО ГЕОМЕТРИЧНІ ПОБУДОВИ В ПРОСТОРІ

Питанням теорії геометричних побудов присвячено багато наукових праць. Але майже всі вони стосуються конструктивних питань на площині. Потреба розв'язувати стереометричні задачі приводить до необхідності побудов геометричних фігур в просторі, вміння вірно зображати просторові фігури. Питання зображення просторових фігур привертає увагу геометрів і тепер. Для прикладу візьмемо роботи М. Ф. Четверухіна [1].

Всі задачі на побудову в просторі зводились до зображення просторових фігур і шуканих елементів на плоскому рисунку. Побудови безпосередньо в просторі мало досліджувалися, що не може бути виправданим.

Всяку побудовану фігуру можна розкласти на деякі елементи. Будемо розглядати такі *елементи побудови*: 1) нульвимірні елементи — точки, 2) одновимірні — прямі, кола, конічні перерізи, 3) двовимірні — площини, сфери, поверхні другого порядку. Поняття поряд у елемента буде дано нижче. Всі згадані елементи можуть бути даними і заданими. Дані елементи вже побудовані, тоді як задані ще треба побудувати, після чого вони перейдуть в клас даних елементів.

Сполученням двох елементів називають сукупність точок, які належать хоч би одному з цих елементів. *Перетином* двох елементів називають сукупність точок, спільних для обох елементів. В результаті перетину двох вказаних елементів одержуємо нові елементи, які можуть бути нульвимірними або одновимірними.

Задача на побудову полягає в тому, що наперед заданими інструментами треба побудувати деяку фігуру, якщо дано деякі інші фігури — так звані елементи побудови і вказані деякі співвідношення між даними фігурами і шуканою. Кожна фігура, яка відповідає усім умовам задачі, є розв'язком задачі. Процес розв'язування конструктивної задачі вибраним комплексом інструментів побудови полягає в знаходженні сполучень, перетинів і інцидентностей на базі відомих елементів побудови.

Клас одновимірних і клас двовимірних елементів розбивається на підкласи елементів першого порядку і елементів другого порядку.

Елементами першого (відповідно другого) порядку називаються такі елементи, перетин яких з прямою є один нульвимірний елемент (відповідно два нульвимірні елементи). Слід відмітити, що порядок даного елемента збігається з степенем його рівняння.

Будемо розрізняти конструктивні задачі першого і другого порядків. Конструктивною *задачею першого (відповідно другого) порядку* називається задача, розв'язання якої вимагає побудов, в результаті яких одержуємо елемент першого порядку або один нульвимірний еле-

мент (відповідно — елемент другого порядку або два нульвимірні елементи). Звичайно в задачі другого порядку як проміжна ланка можуть виконуватись побудови, які приводять і до елементів першого порядку.

Хоч порядок і степінь конструктивної задачі збігаються, ми вживаємо перший термін, маючи намір провести чисто геометричне обґрунтування можливості розглядуваних побудов без допомоги алгебри. При цьому без посилання на відповідні теореми будемо користуватись як відомими такими, наприклад, фактами:

1) площина і не інцидентна їй пряма визначають єдину інцидентну їм точку,

2) площина і поверхня другого порядку визначають криву другого порядку,

3) два кінчні перерізи визначають чотири точки і т. п.

Будемо розглядати побудови, що приводять до просторової задачі другого порядку. Як відомо, всяка задача другого порядку на площині може бути розв'язана циркулем і лінійкою — інструментами, — які креслять лінії постійної кривини. Їх аналогами в просторі є площина і сфера, для «креслення» котрих (фіксування в просторі) користуватимось площинографом і сферографом — інструментами, запропонованими Г. Л. Буймола [3]. Опис інструментів подається у вигляді аксіом, які в абстрактній формі виражають властивості даних інструментів.

Аксіома 1 (площинографа). За допомогою площинографа можна виконати такі побудови:

1) побудувати площину, задану будь-якими елементами, які визначають цю площину.

2) побудувати довільну площину.

Аксіома 2 (сферографа). За допомогою сферографа можна виконати такі геометричні побудови:

1) побудувати сферу, якщо дано її центр і відрізок, рівний діаметру сфери (або його кінці), або радіус сфери,

2) побудувати довільну сферу.

Наочний опис цих інструментів подано в статті Г. Л. Буймоли «Про деякі питання геометрографії n -вимірного евклідового простору», вміщеній у даному збірнику.

Незалежно від того, якими інструментами побудовано дві фігури, приймемо як аксіому таку вимогу щодо цих фігур:

Аксіома 3. Якщо дано дві які-небудь фігури, то даними вважаються і їх сполучення, перетин, або окремі точки, інцидентні обидвом фігурам, якщо такі точки існують. На основі аксіоми 3 можна встановити, чи дані фігури мають спільні елементи чи не мають їх.

При розв'язуванні просторової конструктивної задачі часто необхідно вибирати довільні точки площини, сфери, інцидентні або неінцидентні даному елементу, що є можливим на основі аксіом 1, 2, 3. Всі елементи простору, віднесені до певного конструктивного класу, визначеного аксіомами 1—3, називають *конструктивними*.

Розглянемо питання можливості розв'язання згаданим комплексом інструментів конструктивної задачі другого порядку в тривимірному евклідовому просторі.

Для доведення можливості розв'язку певними засобами всіх задач другого порядку на площині треба переконатися, як відомо, що цими засобами можна виконати вісім наступних основних операцій [4].

Операція 1. Побудова прямої лінії.

Операція 2. Визначення точки перетину даної прямої з заданою прямою.

Операція 3. Визначення точки перетину даного кола з заданою прямою.

Операція 4. Побудова кола з даним центром і заданим радіусом.

Операція 5. Визначення точки перетину даної прямої з заданим колом.

Операція 6. Визначення точки перетину даного кола з заданим.

Операція 7. Визначення точок перетину даного кінцевого перерізу з заданою прямою.

Операція 8. Визначення точок перетину даної прямої з заданим п'ятьма точками кінцевим перерізом.

Аналогічні цим операціям в просторі такі операції:

Операція 9. Проведення площини.

Операція 10. Визначення точки перетину даної площини з заданою прямою.

Операція 11. Визначення точки перетину даної прямої з заданою площиною.

Операція 12. Визначення точок перетину даного кола і заданої площини.

Операція 13. Визначення точок перетину даної площини і заданого кола.

Операція 14. Проведення сфери.

Операція 15. Визначення точок перетину даної прямої і заданої сфери.

Операція 16. Визначення точок перетину даної сфери і заданої прямої.

Операція 17. Визначення точок перетину даного кола і заданої сфери.

Операція 18. Визначення точок перетину даної сфери і заданого кола.

Операція 19. Визначення точок перетину даного кінцевого перерізу з заданою площиною.

Операція 20. Визначення точок перетину даної площини з заданим кінцевим перерізом.

Операція 21. Визначення лінії перетину даної поверхні другого порядку з заданою площиною.

Операція 22. Визначення лінії перетину даної площини з заданою поверхнею другого порядку.

Операція 23. Визначення точок перетину даної поверхні другого порядку з заданою прямою.

Операція 24. Визначення точок перетину даної прямої з заданою поверхнею другого порядку.

З а у в а ж е н н я. Операції визначення лінії перетину площини і сфери, двох сфер зводяться до операції 4. Операція визначення лінії перетину двох площин зводиться до операції 1.

Операції побудови довільних точок заданого кінцевого перерізу і заданої поверхні другого порядку зводяться відповідно до операції 8 і 24.

Отже, для доведення можливості розв'язання всякої задачі другого порядку вибраним комплексом інструментів, треба показати, що цим комплексом можуть бути виконані операції 1—24. Спочатку відзначимо можливість побудови заданої прямої на основі аксіом 1 і 3 і заданого кола на основі аксіом 2, 3.

Можна зауважити, що всі задані елементи операцій 1—24, крім операцій 8, 20, 22, 24, можуть бути віднесені в клас даних за допомогою

інструментів побудови на основі аксіом 1—3. Тоді на основі аксіоми 3 будуть відомими шукані перетини.

Доведемо можливість виконання операції 8, яка зводиться до відшукання подвійних точок двох проєктивних рядів, визначених п'ятьма точками. Але ця задача, як відомо, розв'язується шляхом проведення лише прямих ліній, якщо в площині кінчного перерізу накреслене довільне коло. Оскільки проведення прямих і кола можливе на основі аксіом 1—3, виконання операції 8 — можливе.

Операція 20 зводиться до операції 8, якщо провести площину даного кінчного перерізу. В перетині даної площини з площиною кінчного перерізу одержимо пряму. Точки перетину цієї прямої з кінчним перерізом є шуканими.

Доведемо можливість виконання операції 22. Поверхня другого порядку може бути задана дев'ятьма точками загального положення, які визначають в'язку прямих з центром S і корелятивно відповідну їй в'язку площин з центром S' . В перетині даної площини α з заданою поверхнею одержуємо криву другого порядку, яка буде визначеною, якщо будуть відомими п'ять її точок. Для знаходження цих п'яти точок використаємо той факт, що площина α перетинає в'язку прямих у чотирьох точках, а в'язку площин по чотирьох прямих, корелятивно відповідних цим точкам. Якщо вибрати в площині α деяку пряму a_1 і побудувати відповідну їй в даній кореляції точку A_1 (що вимагає проведення лише прямих ліній [2]), а потім через a_1 і S' провести площину β' , то пряма $b \equiv A_1S$ відповідатиме площині β' . Точка B перетину прямої b з площиною β' належить кривій другого порядку ω_1 , по якій β' перетинає задану поверхню. Пучку площин $b(\mu)$ в'язки S , що проходить через пряму b , корелятивно відповідає в площині β' пучок прямих $S'(m')$. Пучок площин $b(\mu)$ перетинає площину β' по пучку прямих $B(m)$. Пучок $B(m)$ проєктивний пучку $S'(m')$, а тому точки перетину відповідних прямих цих пучків належать кривій ω_1 . Побудувавши так п'ять точок кривої ω_1 , можемо знайти точки перетину прямої a_1 з кривою ω_1 , які будуть шуканими.

Змінюючи положення прямої a_1 в площині α в положення a_2, a_3 , побудуємо їм відповідні криві ω_2, ω_3 . Точки перетину прямих a_1, a_2, a_3 з кривими $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ визначають шість точок кривої (другого порядку) перетину площини α з заданою поверхнею. Але всі проміжні побудови є можливими, що й доводить можливість виконання операції 22.

Операція 24 може бути виконана, тому що вона є проміжною ланкою побудов операції 22.

Отже, на основі того, що всяка конструктивна задача другого порядку зводиться до виконання операції 8, що можливе на основі прийнятих аксіом, має місце таке твердження:

Теорема. Всяка конструктивна задача другого порядку в просторі може бути розв'язана за допомогою площинографа і сферографа.

Прийнята система аксіом є *повною*, тому що даній реалізації об'єктів, які ми одержуємо на основі аксіом 1—3 і називаємо елементами побудови, може бути однозначно поставлена у відповідність арифметична реалізація. Ця відповідність між об'єктами цих обох реалізацій є взаємно однозначною, а самі реалізації — ізоморфними, з чого й випливає повнота системи аксіом 1—3.

Дана система аксіом є *незалежною*. Справді, як було сказано, аксіома 3 не залежить від аксіом приладів, які в свою чергу не залежать від аксіоми 3, тому що аксіома 3 не вимагає можливості ніяких побудов. Аксіоми приладів не залежні, тому що прилади побудови не можуть замінити одне одного.

Несуперечливість прийнятої системи аксіом впливає з несуперечливості її арифметичної реалізації. Отже, прийнята аксіоматика задовольняє вимоги, які ставляться до всякої системи аксіом.

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. Ф. Четверухин. Изображение фигур в курсе геометрии. М., 1958.
2. Н. Ф. Четверухин. Проективная геометрия. М., 1953.
3. Г. Л. Буймола. Некоторые вопросы теории геометрических построений в n -мерном евклидовом пространстве. Тезисы докладов второй Всесоюзной геометрической конференции. Харьков, 1964.
4. А. Адлер. Теория геометрических построений. Л., 1940.

А. И. ПИЛИПОВИЧ

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЯХ В ПРОСТРАНСТВЕ

(резюме)

Рассматривается вопрос о решении задачи второго порядка в трехмерном евклидовом пространстве с помощью плоскографа и сферографа на основе принятых аксиом.

М. М. ШЕРЕМЕТА

ПРО ЗВ'ЯЗОК МІЖ РОСТОМ ФУНКЦІЇ, АНАЛІТИЧНОЇ В КРУЗІ, І МОДУЛЯМИ КОЕФІЦІЄНТІВ ЇЇ РЯДУ ТЕЙЛОРА

Нехай функція $f(z)$ аналітична в крузі $|z| < 1$ і має принаймні одну особливу точку на $|z| = 1$. Запишемо ряд Тейлора для функції $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \quad (1)$$

Ріст функції $f(z)$ будемо виміряти за допомогою функції $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, $0 < r < 1$. Вивченню зв'язку між ростом $M(r)$ і коефіцієнтами a_n присвячено велику кількість робіт [1—7]. Зауважимо, що деякі результати в цьому напрямі неодноразово перевідкривались, наприклад, результат Ж. Валірона [2] пізніше незалежно доводився в [3, 7, 8]. Переважно ріст функції $f(z)$ виміряють за допомогою величин:

$$\rho_1 = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1} \frac{\ln M(r)}{-\ln(1-r)}, \text{ або } \rho_2 = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1} \frac{\ln \ln M(r)}{-\ln(1-r)}.$$

Сюн Цзін-лай [5] і Г. А. Фрідман [6] використовували більш досконалу шкалу росту, порівнюючи деякі ітерації логарифма від $M(r)$ з певними функціями $U\left(\frac{1}{1-r}\right)$. В даній роботі ми подаємо декілька нових теорем, в яких порівнюється ріст різних функцій від $M(r)$ і від $\frac{1}{1-r}$. Наші теореми стосуються переважно до функцій, для яких $\rho_1 = \rho_2 = \infty$.

Ми будемо використовувати функції з класу Λ , який визначається так. Скажемо, що додатна функція $\alpha(x)$, визначена на (a, ∞) , належить до класу Λ , якщо вона диференційована на (a, ∞) , строго монотонно зростає на (a, ∞) , при $x \rightarrow \infty$ прямує до ∞ і є повільно зростаючою функцією [9], тобто для всіх c , $0 < c < \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(cx)}{\alpha(x)} = 1,$$

причому прямування до границі рівномірне відносно c , $0 < c_1 \leq c \leq c_2 < \infty$. Будемо вважати, що $\alpha(\infty) = \infty$.

Через $\ln_k x$ будемо позначати k -у ітерацію логарифма: $\ln_1 x = \ln x$, $\ln_k x = \ln \ln_{k-1} x$, $k \geq 2$. За означенням $\ln^+ x = \ln x$ при $x \geq 1$ і $\ln^+ x = 0$ при $x < 1$, $\ln_k^+ x$ — k -а ітерація від $\ln^+ x$. Через $\exp_k x$ позначимо k -у ітерацію $\exp x$. У нас будуть зустрічатися значення функції в точках, де функція

не визначена. Тоді приписуємо функції значення 1. Будемо вважати, що $\frac{1}{0} = \infty$. Зауважимо, що, степеневий ряд (1) має радіус збіжності 1; тому

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \quad \text{і} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^+ |a_n|}{n} = 0.$$

1. Доведемо таку теорему:

Теорема 1. Нехай $\alpha(x) \in \Lambda$, $\beta(x) \in \Lambda$. Позначимо через $F(x; c)$ функцію: $F(x; c) = \beta^{-1}(c\alpha(x))$, $0 < c < \infty$. Припустимо, що для всіх c , $0 < c < \infty$ виконується

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \alpha \left[\frac{x}{F(x; c)} \right] = \alpha(x) (1 + o(1)) \text{ при } x \rightarrow \infty; \\ \text{б)} \quad & \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{d \ln F(x; c)}{d \ln x} < 1. \end{aligned}$$

Тоді справджується рівність

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 1} \frac{\alpha(\ln M(r))}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(n)}{\beta\left(\frac{n}{\ln^+ |a_n|}\right)}. \quad (2)$$

Зауважимо, що за функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ можна взяти $\alpha(x) = \ln_{k+i} x$, $i \geq 1$, $\beta(x) = \ln_k x$, $k \geq 2$. Легко бачити, що вони задовольняють умови теореми 1.

Перейдемо до доведення теореми. Нехай

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 1} \frac{\alpha(\ln M(r))}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)} = c.$$

Припустимо, що $c < \infty$. Для довільного $\varepsilon > 0$, починаючи з деякого $r = r_0(\varepsilon)$, виконується нерівність

$$\frac{\alpha(\ln M(r))}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)} \leq c + \varepsilon = \rho, \quad \text{або} \quad M(r) \leq \exp \left\{ \alpha^{-1} \left[\rho \beta \left(\frac{1}{1-r} \right) \right] \right\}.$$

Використовуючи формулу Коші, одержуємо

$$|a_n| \leq r^{-n} M(r) \leq r^{-n} \exp \left\{ \alpha^{-1} \left[\rho \beta \left(\frac{1}{1-r} \right) \right] \right\}. \quad (3)$$

Обираємо $r = r(n)$ так, щоб

$$\frac{1}{1-r} = F \left[\frac{n}{F\left(n; \frac{1}{\rho}\right)}; \frac{1}{\rho} \right]. \quad (4)$$

З (4) і умови а) видно, що $r(n)$ визначене для всіх достатньо великих n і при $n \geq n_0(\varepsilon)$ виконується $r \geq r_0(\varepsilon)$. Підставимо $r = r(n)$ в (3), тоді

$$|a_n| \leq \left\{ 1 - \frac{1}{F \left[\frac{n}{F\left(n; \frac{1}{\rho}\right)}; \frac{1}{\rho} \right]} \right\}^{-n} \cdot \exp \left\{ \frac{n}{F\left(n; \frac{1}{\rho}\right)} \right\}.$$

З умови а) бачимо, що нерівність

$$\left\{ 1 - \frac{1}{F\left[\frac{n}{F\left(n; \frac{1}{\rho}\right)}; \frac{1}{\rho}\right]} \right\}^{-n} \leq \exp \left\{ \frac{n \ln 3}{F\left(n; \frac{1+o(1)}{\rho}\right)} \right\}$$

виконується для всіх n , починаючи з деякого $n=N_0$. Тоді при $n \geq \max(n_0(\varepsilon), N_0)$ одержимо

$$|a_n| \leq \exp \left\{ \frac{2n \ln 3}{F\left(n; \frac{1+o(1)}{\rho}\right)} \right\} + \frac{\alpha(n)(1+o(1))}{\beta\left(2 \ln 3 \frac{n}{\ln^+ |a_n|}\right)} \leq \rho.$$

Починаючи з деякого $n=n_2 \geq \max(n_0(\varepsilon), N_0)$, маємо (за означенням повільно зростаючої функції): $\alpha(n) \leq (\rho + \varepsilon) \beta\left(\frac{n}{\ln^+ |a_n|}\right) = (c + 2\varepsilon) \beta\left(\frac{n}{\ln^+ |a_n|}\right)$. Спрямовуючи $n \rightarrow \infty$, потім $\varepsilon \rightarrow 0$, одержуємо

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 1} \frac{\alpha(\ln M(r))}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)} = c \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(n)}{\beta\left(\frac{n}{\ln^+ |a_n|}\right)}. \quad (5)$$

Для $c = \infty$ ця нерівність тривіальна. Тепер доведемо обернену нерівність. Нехай

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(n)}{\beta\left(\frac{n}{\ln^+ |a_n|}\right)} = c.$$

Припустимо, що $c < \infty$. Для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $N_0(\varepsilon)$, що при $n \geq N_0(\varepsilon)$ виконується

$$\alpha(n) \leq \rho \beta\left(\frac{n}{\ln^+ |a_n|}\right),$$

де $\rho = c + \varepsilon$, або

$$|a_n| \leq \exp \left\{ \frac{n}{F\left(n; \frac{1}{\rho}\right)} \right\}.$$

Нерівність

$$\sqrt[n]{|a_n| r^n} \leq \exp \left\{ \frac{1}{F\left(n; \frac{1}{\rho}\right)} \right\} \cdot r \leq r^{1/2} \quad (6)$$

виконується для всіх $n \geq n_0(r) \geq N_0(\varepsilon)$. Тоді

$$\sum_{n=n_0(r)+1}^{\infty} |a_n| r^n \leq \sum_{n=n_0(r)+1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}} < \frac{2}{1-r}. \quad (7)$$

Виразимо $n_0(r)$ через r . З нерівності (6) маємо

$$\left[F\left(n; \frac{1}{\rho}\right) \right]^{-1} \leq -\frac{1}{2} \ln r.$$

Використовуючи співвідношення

$$\frac{1}{-\ln r} \sim \frac{1}{1-r} \text{ при } r \rightarrow 1, \quad (8)$$

маємо

$$F\left(n; \frac{1}{\rho}\right) \geq \frac{2(1+o(1))}{1-r} \quad \text{і} \quad n \geq \alpha^{-1} \left\{ \rho \beta \left[\frac{2(1+o(1))}{1-r} \right] \right\},$$

тобто за $n_0(r)$ можна взяти при $r \geq r_0$

$$n_0(r) = E \left[\alpha^{-1} \left\{ \rho \beta \left[\frac{2(1+o(1))}{1-r} \right] \right\} \right]. \quad (9)$$

Далі, функція $\Phi(x) = x \left[F\left(x; \frac{1}{\rho}\right) \right]^{-1}$ має при $x \geq x_1$ в силу умови в) додатну похідну. Отже, $n \left[F\left(n; \frac{1}{\rho}\right) \right]^{-1}$ монотонно зростає з ростом n , починаючи з деякого $n = n_1$. Нехай $N = \max(N_0(\varepsilon), n_1)$. Тепер

$$\begin{aligned} M(r) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n = \sum_{n=0}^N |a_n| r^n + \sum_{n=N+1}^{n_0(r)} |a_n| r^n + \sum_{n=n_0(r)+1}^{\infty} |a_n| r^n \leq \\ &\leq B + n_0(r) \cdot \max_{N+1 < n < n_0(r)} |a_n| + \frac{2}{1-r}, \end{aligned}$$

де B — стала величина. Оцінимо

$$\begin{aligned} \max_{N+1 < n < n_0(r)} |a_n| &\leq \max_{N+1 < n < n_0(r)} \left\{ \exp \left[\frac{n}{F\left(n; \frac{1}{\rho}\right)} \right] \right\} \leq \exp \left\{ \frac{n_0(r)}{F\left(n_0(r); \frac{1}{\rho}\right)} \right\} \leq \\ &\leq \exp \left\{ \alpha^{-1} \left[\rho \beta \left(\frac{2(1+o(1))}{1-r} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

З умови а) маємо при $x > x_0$, що $F(x; c) < x$, звідки $x < \alpha^{-1} \left(\frac{1}{c} \beta(x) \right)$ і це виконується для всіх c , $0 < c < \infty$. Отже, $\frac{2}{1-r} < \alpha^{-1} \left[\rho \beta \left(\frac{1}{1-r} \right) \right]$ і справедлива нерівність

$$\begin{aligned} M(r) &\leq B + \exp \left\{ \alpha^{-1} \left[\rho \beta \left(\frac{2(1+o(1))}{1-r} \right) \right] \right\} \alpha^{-1} \left[\rho \beta \left(\frac{2(1+o(1))}{1-r} \right) \right] + \\ &+ \frac{2}{1-r} \leq \exp \left\{ (1+o(1)) \alpha^{-1} \left[\rho \beta \left(\frac{2(1+o(1))}{1-r} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Використовуючи означення повільно зростаючої функції і спрямовуючи $r \rightarrow 1$, а потім $\varepsilon \rightarrow 0$, з нерівності (10) одержуємо

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 1} \frac{\alpha(\ln M(r))}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)} \leq c = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(n)}{\beta\left(\frac{n}{\ln^+ |a_n|}\right)}. \quad (11)$$

Для $c = \infty$ нерівність (11) тривіальна. Порівнюючи (5) і (11), одержуємо рівність (2).

2. Нехай тепер $\alpha(x) \in \Lambda$ і для всіх σ , $0 < \sigma < 1$, виконується

$$a) \quad \alpha \left[\frac{x}{\Phi(x; \sigma)} \right] = \alpha(x) (1 + o(1)) \text{ при } x \rightarrow \infty;$$

$$b) \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{d \ln \Phi(x; \sigma)}{d \ln x} < 1;$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\ln x)}{\alpha(x)} = 0,$$

де $\Phi(x; \sigma) = \alpha^{-1}(\sigma \alpha(x))$.

Позначимо далі

$$p = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1} \frac{\alpha(\ln M(r))}{\alpha\left(\frac{1}{1-r}\right)}; \quad q = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(n)}{\alpha\left(\frac{n}{\ln^+ |a_n|}\right)}. \quad (12)$$

Легко перевірити, що умови а), в), с) задовольняє $\alpha(x) = \ln_k^+ x$, $k \geq 2$.

Теорема 2. Якщо $q < 1$, то $p = 0$.

Для всіх $n \geq N_2$ виконується $\alpha(n) \leq \alpha\left(\frac{n}{\ln^+ |a_n|}\right)$ і $|a_n| \leq e$. Очевидно, що

$$\begin{aligned} M(r) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n = \sum_{n=0}^{N_2} |a_n| r^n + \sum_{n=N_2+1}^{\infty} |a_n| r^n \leq \\ &\leq B + e \sum_{n=N_2+1}^{\infty} r^n = O(1) + \frac{e}{1-r} \end{aligned}$$

і

$$p \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow 1} \frac{\alpha \left[\ln \left(O(1) + \frac{e}{1-r} \right) \right]}{\alpha\left(\frac{1}{1-r}\right)} = 0.$$

Теорема 3. Якщо $p \geq 1$, то $q = p$.

Для довільного $\varepsilon > 0$ з (12), починаючи з деякого $r = r_0(\varepsilon)$, виконується

$$\frac{\alpha(\ln M(r))}{\alpha\left(\frac{1}{1-r}\right)} \leq p + \varepsilon = \rho, \quad \rho > 1 \quad \text{і} \quad M(r) \leq \exp \left[\Phi \left(\frac{1}{1-r}; \rho \right) \right].$$

Використовуючи нерівність Коші, одержуємо

$$|a_n| \leq r^{-n} M(r) \leq r^{-n} \exp \left[\Phi \left(\frac{1}{1-r}; \rho \right) \right].$$

Обираємо $r = r(n)$, так, щоб

$$\frac{1}{1-r} = \Phi \left[\frac{n}{\Phi\left(n; \frac{1}{\rho}\right)}; \frac{1}{\rho} \right].$$

За умовою а) при $0 < \frac{1}{\rho} < 1$ при $n \geq n_0(\epsilon)$ виконується $r \geq r_0(\epsilon)$. Підставимо $r = r(n)$ в останню нерівність:

$$|a_n| \leq \left\{ 1 - \frac{1}{\Phi \left[\frac{n}{\Phi \left(n; \frac{1}{\rho} \right)}; \frac{1}{\rho} \right]} \right\}^{-n} \exp \left\{ \frac{n}{\Phi \left(n; \frac{1}{\rho} \right)} \right\}.$$

В силу умови а) з останньої нерівності маємо, як і при доведенні теореми 1, нерівність:

$$|a_n| \leq \exp \left\{ \frac{2n \ln 3}{\Phi \left(n; \frac{1+o(1)}{\rho} \right)} \right\} \quad (13)$$

для всіх n , починаючи з деякого $n \geq N_0 \geq n_0(\epsilon)$. З нерівності (13) одержуємо так само, як раніше одержали нерівність (5), нерівність

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(n)}{\alpha \left(\frac{n}{\ln^+ |a_n|} \right)} \leq \rho. \quad (14)$$

Перш ніж доводити обернену нерівність, зауважимо, що за теоремою 2 маємо, що якщо $\rho \geq 1$, то $q \geq 1$. З рівності (12) для довільного $\epsilon > 0$ маємо $\alpha(n) \leq \rho \alpha \left(\frac{n}{\ln^+ |a_n|} \right)$, де $\rho = q + \epsilon$, для всіх n , починаючи з деякого $n = N_0(\epsilon)$, і $|a_n| \leq \exp \left\{ \frac{n}{\Phi \left(n; \frac{1}{\rho} \right)} \right\}$. Нерівність

$$\sqrt[n]{|a_n| r^n} \leq r \exp \left\{ \frac{1}{\Phi \left(n; \frac{1}{\rho} \right)} \right\} \leq r^{1/2} \quad (15)$$

виконується для всіх $n \geq n_0(r) \geq N_0(\epsilon)$. Тоді виконується нерівність (7). Як і при виводі формули (9), одержуємо, що за $n_0(r)$ можна взяти при $r \geq r_0$

$$n_0(r) = E \left[\Phi \left(\frac{2(1+o(1))}{1-r}; \rho \right) \right]. \quad (16)$$

Далі, як і при виводі нерівності (10), одержуємо

$$\begin{aligned} M(r) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \leq B + \exp \left\{ \Phi \left[\frac{2(1+o(1))}{1-r}; \rho \right] \right\} \times \\ &\times \Phi \left[\frac{2(1+o(1))}{1-r}; \rho \right] \leq \exp \left\{ (1+o(1)) \Phi \left[\frac{2(1+o(1))}{1-r}; \rho \right] \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

З (17) знаходимо

$$\rho = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\alpha(\ln M(r))}{\alpha \left(\frac{1}{1-r} \right)} \leq q. \quad (18)$$

Порівнюючи нерівності (14) і (18), приходимо до рівності $\rho = q$.

Теорема 4. Нехай функція $\alpha(x)$ задовольняє додаткову умову
 d) $\frac{\alpha(x)}{\alpha(x^\sigma)} \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$ для всіх σ , $0 < \sigma < \frac{1}{2}$. Тоді, якщо $0 \leq p < 1$,
 то $q \leq 1$.

Дійсно, з (12) маємо при $r \geq r_0$, що $\alpha(\ln M(r)) \leq \alpha\left(\frac{1}{1-r}\right)$ і $M(r) \leq \exp\left(\frac{1}{1-r}\right)$. Тоді

$$\rho_2 = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1} \frac{\ln \ln M(r)}{-\ln(1-r)} \leq 1.$$

В цьому випадку має місце формула [2]

$$\frac{\rho_2}{\rho_2 + 1} = \alpha_2 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^+ \ln^+ |a_n|}{\ln \ln}. \quad (19)$$

Очевидно, що $\alpha_2 \leq \frac{1}{2}$, бо $\rho_2 \leq 1$. Отже, для $\varepsilon = \frac{1}{2} - \sigma$ при $n \geq n_0(\varepsilon)$ маємо

$$|a_n| \leq \exp\{n^{1/2+\varepsilon}\} = \exp\{n^{1-\sigma}\}.$$

Тоді в силу умови а) одержуємо

$$q \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(n)}{\alpha(n^\sigma)} = 1. \quad (20)$$

Теорема доведена. Нерівність $q \leq 1$ в загальному випадку покращити не можна, на що вказує:

Приклад 1. Нехай $f(z) = \left(\frac{1}{1-z}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n$; $\alpha(x) = \ln_k^+ x$, $k \geq 2$.

Тоді $M(r) = \left(\frac{1}{1-r}\right)^2$; $|a_n| = n+1$. Легко бачити, що $p=0$, а $q=1$.

Теорема 5. Нехай $\alpha(x) \in \Lambda$, $\Phi(x; \sigma) = \alpha^{-1}(\sigma \alpha(x))$, а функція $\varphi(x) = x[\Phi(\ln x; \sigma)]^{-1}$ монотонно прямує до ∞ при $x \rightarrow \infty$ для всіх σ , $1 < \sigma < \infty$. Тоді, якщо $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\ln^+ |a_n|)}{\alpha(\ln n)} \geq 1$, то справедлива рівність

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 1} \frac{\alpha(\ln M(r))}{\alpha\left(\ln \frac{1}{1-r}\right)} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\ln^+ |a_n|)}{\alpha(\ln n)}.$$

Передусім зауважимо, що умови теореми задовольняє функція $\alpha(x) = \ln_k^+ x$, $k \geq 1$. Нехай тепер

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 1} \frac{\alpha(\ln M(r))}{\alpha\left(\ln \frac{1}{1-r}\right)} = c.$$

Припустимо, що $c < \infty$. Для довільного $\varepsilon > 0$ і при $r \geq r_0(\varepsilon)$ маємо

$$\frac{\alpha(\ln M(r))}{\alpha\left(\ln \frac{1}{1-r}\right)} \leq c + \varepsilon = \rho \quad \text{і} \quad M(r) \leq \exp\left[\Phi\left(\ln \frac{1}{1-r}; \rho\right)\right].$$

Використовуючи нерівність Коші, одержуємо

$$|a_n| \leq r^{-n} \exp\left[\Phi\left(\ln \frac{1}{1-r}; \rho\right)\right].$$

Обираємо $r=r(n)$ так, щоб $(1-r)^{-1}=n$ і підставляємо в останню нерівність:

$$|a_n| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} \exp[\Phi(\ln n; \rho)] \leq 3 \exp[\Phi(\ln n; \rho)]$$

для всіх $n \geq N_0(\varepsilon)$. Звідси $\alpha(\ln^+ |a_n| - \ln 3) \leq \rho \alpha(\ln n)$.

Проводячи ті ж самі міркування, що й раніше, одержуємо

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\ln^+ |a_n|)}{\alpha(\ln n)} \leq c = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\alpha(\ln M(r))}{\alpha\left(\ln \frac{1}{1-r}\right)}. \quad (21)$$

При $c = \infty$ нерівність (21) тривіальна. Нехай тепер

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\ln^+ |a_n|)}{\alpha(\ln n)} = d \geq 1. \quad (22)$$

Припустимо, що $d < \infty$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ і для всіх $n \geq N(\varepsilon)$ одержуємо $\alpha(\ln^+(a_n)) \leq q \alpha(\ln n)$, де $q = d + \varepsilon > 1$, $|a_n| \leq \exp[\Phi(\ln n; q)]$. Нерівність

$$\sqrt[n]{|a_n| r^n} \leq r \exp\left[\frac{\Phi(\ln n; q)}{n}\right] \leq r^{1/2} \quad (23)$$

виконується для всіх n , починаючи з $n = n_0(r)$, бо за умовою теореми $x[\Phi(\ln x; \sigma)]^{-1}$ при $x \rightarrow \infty$ прямує до ∞ . Тоді виконується (7).

Виразимо $n_0(r)$ через r . З нерівності (23) одержимо $2\Phi(\ln n; q) \geq -n \ln r$. Використовуючи співвідношення (8), маємо

$$n[\Phi(\ln n; q)]^{-1} \geq \frac{2(1+o(1))}{1-r}.$$

Оскільки $n[\Phi(\ln n; q)]^{-1}$ монотонно прямує до ∞ при $n \rightarrow \infty$, то, як легко перевірити, остання нерівність виконується при

$$n \geq \Phi\left[\ln \frac{2(1+o(1))}{1-r}; 2q\right] \frac{2(1+o(1))}{1-r}$$

і при r досить близьких до 1, тобто за $n_0(r)$ можна взяти

$$n_0(r) = E\left\{\frac{2(1+o(1))}{1-r} \Phi\left[\ln \frac{2(1+o(1))}{1-r}; 2q\right]\right\}.$$

Тепер

$$M(r) \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \leq B + n_0(r) \max_{N(\varepsilon)+1 \leq n \leq n_0(r)} |a_n| + \frac{2}{1-r}.$$

Далі, як і раніше, знаходимо, що

$$\max_{N(\varepsilon)+1 \leq n \leq n_0(r)} |a_n| \leq \exp\left\{\Phi\left[(1+o(1)) \ln \frac{1}{1-r}; q\right]\right\}.$$

Отже, враховуючи, що $q > 1$, одержуємо

$$M(r) \leq [1+o(1)] \exp\left[\Phi\left((1+o(1)) \ln \frac{1}{1-r}; q\right)\right]. \quad (24)$$

Звідси, як і раніше, маємо

$$c = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\alpha(\ln M(r))}{\alpha\left(\ln \frac{1}{1-r}\right)} \leq d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\ln^+ |a_n|)}{\alpha(\ln n)}. \quad (25)$$

При $d = \infty$ нерівність (25) тривіальна. Порівнюючи (21) і (25), приходимо до рівності $c = d$. Теорема доведена.

Зауважимо, що нерівність (21) передусім виконується для довільних c і d . Якщо $d < 1$, то для $n \geq N$ маємо: $|a_n| \leq n$. Тоді

$$M(r) \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n = \sum_{n=0}^N |a_n| r^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| r^n \leq O(1) + \left(\frac{1}{1-r}\right)^2$$

і

$$c \leq \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\alpha\left(\ln \left[O(1) + \left(\frac{1}{1-r}\right)^2\right]\right)}{\alpha\left(\ln \frac{1}{1-r}\right)} = 1. \quad (26)$$

В силу (21) одержуємо, що при $d < 1$ виконується $d \leq c \leq 1$. В нерівності (26) оцінки для випадку $\alpha(x) = \ln^+ x$ не можуть бути кращими, як показують наступні приклади.

Приклад 2. Нехай $f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $\alpha(x) = \ln^+ x$. Тоді $M(r) = \frac{1}{1-r}$; $a_n = 1$. Легко бачити, що $d = 0$, а $c = 1$.

Приклад 3. Нехай $f(z) = \ln \frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $\alpha(x) = \ln^+ x$. Тоді $M(r) = \ln \frac{1}{1-r}$, $a_n = \frac{1}{n}$. Легко бачити, що $d = c = 0$.

Автор висловлює щирі подяки А. А. Гольдбергу за уважне керівництво і Г. А. Фридману за повідомлення про результати своєї дисертації.

ЛІТЕРАТУРА

1. J. Hadamard. Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. J. math. pures et appl., 8 (1892).
2. G. Valiron. Sur la croissance du module maximum des séries entières. Bull. Soc. math. France, 44 (1916).
3. F. Beuermann. Wachstumsordnung, Koeffizientenwachstum und Nullstellendichte bei Potenzreihen mit endlichem Konvergenzkreis. Math. Zeitschr., 33 (1931).
4. M. Fujiwara. On the relation between $M(r)$ and the coefficients of a power series. Proc. Imp. Acad. Japan, 8 (1932).
5. Hiong King—Lai. Sur la croissance des fonctions entières d'ordre infini définies par un développement de Taylor. C. r. Acad. sci., 198 (1934).
6. Г. А. Фридман. Зависимость роста модуля аналитической функции от роста модуля коэффициентов ее степенного разложения. Канд. диссертация, М., 1951.
7. Н. В. Говоров. О связи между ростом функции, аналитической в круге, и коэффициентами ее степенного разложения. Тр. Новочерк. политехн. ин-та, 100, 1959.
8. G. R. MacLane. Asymptotic values of holomorphic functions. Rice university studies, 49, № 1 (1963).
9. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. Гостехиздат, М., 1956.

М. М. ШЕРЕМЕТА

**О СВЯЗИ МЕЖДУ РОСТОМ ФУНКЦИИ, АНАЛИТИЧЕСКОЙ В КРУГЕ,
И МОДУЛЯМИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЕЕ РЯДА ТЕЙЛОРА**

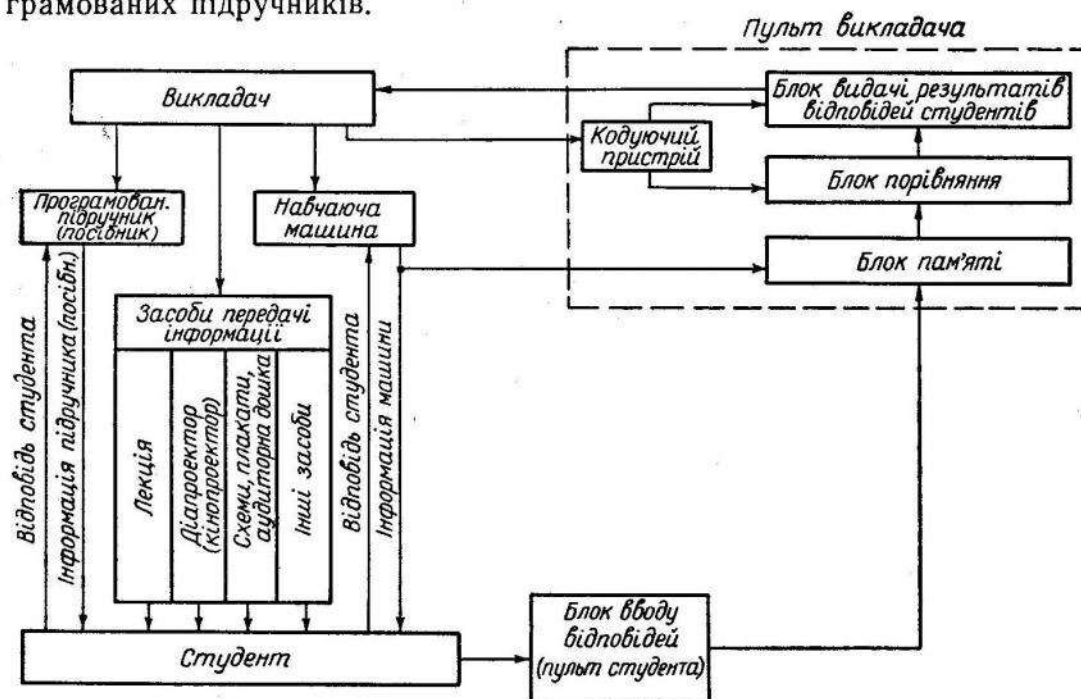
(резюме)

Пусть $f(z)$ аналитическая в круге $|z| < 1$ функция и имеет на $|z| = 1$ хотя бы одну особую точку. В настоящей работе дается зависимость между ростом $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ и модулями коэффициентов a_n разложения функции $f(z)$ в ряд Тейлора.

К. О. КВАСНЕВСЬКИЙ

АВТОМАТИЗОВАНИЙ КЛАС АК-ЛДУ—65

Останні роки в багатьох учбових закладах країни ведеться велика робота по впровадженню в учбовий процес елементів програмованого навчання. Розширився парк малих навчаючих та контролюючих машин. У стадії широкого експерименту перебувають роботи по створенню програмованих підручників.



Перші результати, хоч ще не дуже численні, дозволяють говорити про значну ефективність нового методу навчання. Для того, щоб зробити більш серйозні висновки про ступінь ефективності і межі застосування нового методу в учбовому процесі, необхідно накопичити достатню кількість експериментальних даних. Проведення таких експериментів неможливе без технічних засобів автоматизації процесу навчання.

Вузами республіки розроблено ряд так званих автоматизованих класів, які в тій чи іншій мірі вирішують питання введення елементів програмованого навчання.

На рисунку зображена блок-схема автоматизованого класу, розробленого лабораторією програмованого навчання механіко-математичного факультету Львівського університету. Клас розрахований на одну академічну групу. На кожне робоче місце припадає машина Альфа-2

і пульт студента. Всі машини і пульти студентів об'єднані єдиним пультом викладача. Такий комплекс дозволяє проводити заняття в трьох режимах:

- 1) в екзаменаційному,
- 2) у самоконтролю (самопідготовки),
- 3) навчання.

В екзаменаційному режимі джерелом інформації є сама екзаменаційна машина, в яку попередньо закладається програма, яка складається з десяти контрольних питань. Студент, одержавши питання від машини і вивчивши його, вводить відповідь за вибірковим методом. Машина порівнює відповідь і, запам'ятавши результат, передає його на пульт викладачеві, а потім видає студентові наступне питання. Після вводу відповіді на останнє питання машина повідомляє студентові сумарну оцінку, яка дублюється на світловому табло пульта викладача. Викладач, маючи розгорнуті зведення по всіх відповідях студентів, може, якщо це необхідне, проаналізувати знання студента і вказати питання для повторного вивчення.

В режимі самоконтролю клас може бути використаний кожною машиною окремо. Машині або групі машин задається програма по окремих предметах або темах предмету, і студенти самостійно можуть перевірити свої знання по питаннях, які їх цікавлять. У цьому випадку машина безпосередньо повідомляє студенту результати відповіді по кожному питанню і дає можливість повторної перевірки знань.

У вивчаючому режимі джерелами інформації може бути навчаюча машина, програмований підручник (посібник) або викладач. В останньому випадку інформація студентам передається за допомогою будь-якого засобу на розгляд викладача.

Після викладу деякої дози інформації викладач за допомогою тих же засобів має можливість ставити контрольні питання одночасно всім студентам, контролюючи правильність відповіді на своєму пульті.

Відповідаючи на поставлені питання, студенти вводять свої відповіді за допомогою пульта, які знаходяться на їх місцях (блок вводу відповідей). З пульта студентів інформація потрапляє в блок пам'яті, а потім в блок зрівнювання пульта викладача. Результати відповідей висвітлюються на світловому табло.

Індикація пульта дозволяє викладачеві одержати від студентів інформацію про їх відповіді трьох категорій: «Вірно», «Невірно», «Відповідь не дана».

Викладач, одержавши результати про ступінь засвоєння даної ним дози інформації, приймає рішення відносно своїх дальших дій. При цьому, як видно, комплекс технічних засобів, не сковуючи дій викладача і не накладаючи певних обмежень на саму програму, що вводиться, забезпечує оперативний контроль і гнучке управління процесом навчання.

Блок вводу відповідей (пульт студента) являє собою десятикнопочне поле і дозволяє зовсім без шуму вводити відповіді вибірковим, чисельним і чисельно-кодованим методом.

При вибіркового методі вводу відповіді такий блок дозволяє давати відповіді на декілька питань одночасно. Можливість угадування при цьому визначається формулою

$$P_n = \frac{1}{C_m^n},$$

де m — число елементів опитування; n — число елементів опитування даної категорії; P_n — можливість угадування правильної відповіді.

При різних значеннях m і n можливість угадування можна зобразити у вигляді таблиці.

Ймовірність вибору n елементів означених категорій, які беруться з m елементів

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	0,3	1								
3	0,3	0,03	1							
4	0,25	0,17	0,25	1						
5	0,2	0,1	0,1	0,2	1					
6	0,17	0,065	0,050	0,065	0,170	1				
7	0,143	0,048	0,028	0,028	0,048	0,143	1			
8	0,125	0,036	0,015	0,014	0,015	0,036	0,125	1		
9	0,111	0,028	0,012	0,008	0,008	0,012	0,028	0,111	1	
10	0,1	0,022	0,008	0,005	0,004	0,005	0,008	0,022	0,1	1

Для того щоб можливість угадування не підготовленим студентом була досить мала, можна обмежитися умовами таблиці, що не перевищують трьох процентів. Додержання цих умов достатнє для поточного контролю. Для підсумкового контролю (залік, екзамен та ін.) потрібні, мабуть, більш суворі обмеження. Тоді можна користуватися даними таблиці, ймовірність угадування яких не більше одного процента.

Найбільш доцільним буде блок вводу, який має 10 кнопок. Десятикнопочний пульт студента дозволяє, крім вибіркового методу, вводити відповіді чисельним методом в межах чисел від 1 до 1023.

К. А. КВАСНЕВСКИЙ

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ КЛАСС АК-ЛГУ—65

(резюме)

В статье дается описание автоматизированного класса, позволяющего, не сковывая действий преподавателя и не накладывая жестких ограничений на вводимую программу, проводить оперативный контроль и гибкое управление учебным процессом.

ЗМІСТ

О. С. Кованько, Л. М. Лісевич. Майже періодичність розв'язків деяких диференціальних рівнянь з S^p -майже періодичними правими частинами	3
О. М. Костовський. Узагальнення теореми Островського про локалізацію по модулям нулів рядів Лорана	9
Є. С. Дорожовський, Г. І. Коник, О. М. Костовський. Визначення додатного кореня основного рівняння локалізації за модулем нулів рядів Лорана	13
Б. В. Ковальчук, Г. П. Губанов. Наближення функцій двох змінних зрізаними середніми сумами від поліномів, найкращих в заданій системі точок	16
Т. О. Мельник. Про «склеювання» розв'язків параболічних і гіперболічних рівнянь	19
О. М. Введенський. Проалгебраїчні групи з висотою два редукції	24
Є. С. Дорожовський, В. Г. Костенко. Поле потенціалу електронної лінзи з порушеною осью симетрії	30
Б. В. Валько, І. О. Прусов, Л. О. Романів. Осесиметричний потенціал системи електродів малої товщини	41
О. О. Іванова. n -параметрична півгрупа лінійних обмежених операцій і зв'язок з теорією апроксимацій	44
О. О. Іванова. Наближення сумовних функцій кратними сингулярними інтегралами	53
Т. Л. Мартинович, Б. М. Кордуба. Один спосіб розв'язку просторової задачі Діріхле з осью симетрії	59
Г. Л. Буймола. Деякі питання геометрографії n -вимірного евклідового простору	63
Т. Л. Мартинович. До питання про підкріплення анізотропної пластинки пружним стержнем	69
В. О. Ліхачов. Деякі числові розрахунки напруженого стану циліндра	77
Д. Г. Хлебніков. Деякі задачі згину пластинок у формі смуги з підкріпленнями краями	81
С. П. Гавеля, В. Н. Косарчин. Розв'язування на електронно-обчислювальній цифровій машині деяких задач теорії оболонок обертання	92
А. І. Пилипович. Про геометричні побудови в просторі	96
М. М. Шеремета. Про зв'язок між ростом функції, аналітичної в крузі, і модулями коефіцієнтів її ряду Тейлора	101
К. О. Квасневський. Автоматизований клас АК—ЛДУ—65	111

CONTENTS

<i>O. S. Kovanko, L. M. Lisevich.</i> Almost Periodicity of solutions Some Differential Equations with Almost Periodical Right Members	3
<i>O. M. Kostovsky.</i> Generalization of Ostrovsky's Theorem on Localization of Zero Moduls in Loran's Series	9
<i>E. S. Dorozhkovsky, H. J. Konyk, O. M. Kostovsky.</i> Definition of the Greatest with Root Model of the principal equation in localization on modul of zeroes in Loran's series	13
<i>B. V. Kovalchuk, H. P. Gubanov.</i> The approximation function of two variables reduced by average sums from polynomials, best in the given system of points	16
<i>T. O. Melnik.</i> On sticking the solutions of parabolic and hyperbolic equations	19
<i>O. M. Vvedensky.</i> Proalgebraic groups with height two of reduction	24
<i>E. S. Dorozhkovsky, V. H. Kostenko.</i> Potential field of electronic lens with infringed axial symetry	30
<i>B. V. Valko, I. O. Proosov, L. O. Romaniv.</i> Axiosymetrical potential of electrood system with small thickness	41
<i>O. O. Ivanova.</i> n -parametrical halfgroup of linear limited operations and the truss with the theory of approximation	44
<i>O. O. Ivanova.</i> Approximation of sum function with (by means of) divisible singular integrals	53
<i>T. L. Martinovich, B. M. Kordooba.</i> A way of solving Dirichle space problem with axial symetry	59
<i>H. L. Booymola.</i> Some problems of « n » measure Euclidian space	63
<i>T. L. Martinovich.</i> On the problem of strengthening the anizotropic plate with elastic rod	69
<i>V. O. Likhachov.</i> Some numerical calculations of strained cylinder state	77
<i>D. H. Khlebnikov.</i> Some problems of plate bents in the form of halfplates and stripes with strenthened edges	81
<i>S. P. Havela, V. N. Kosarchyn.</i> Solution the problems of shells rotation theory by means of a computer	92
<i>A. I. Pylypovich.</i> On geometrical structures in space	96
<i>M. M. Sheremeta.</i> On connection between the growth of function analytical in circle and coefficients moduls of Taylor series	101
<i>K. O. Kvasnevsky.</i> Automatized class AK of Lviv University—65	111

Редактор Ф. О. Гриншпон
Технічний редактор Т. В. Саранюк
Коректор С. Я. Михайленко

*Вестник Львовского ордена Ленина государствен-
ного университета им. Ивана Франко*

Серия механико-математическая
Выпуск 2.

(На украинском языке)

БГ 09503. Здано до набору 10.V 1965 р. Підписано
до друку 20.X 1965 р. Формат паперу $70 \times 108^{1/16}$.
Папер. арк. 3,625. Умовн. друк. арк. 9,93. Обл.-
видавн. арк. 9,2. Тираж 550. Ціна 50 коп.
Зам. 1202.

Обласна книжкова друкарня Львівського облас-
ного управління по пресі,
Львів, Стефаника, 11.

Ціна 50 коп.