УДК 517.53

М.В.Заболоцький

ДЕЯКІ СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ НЕВАНЛІННІВСЬКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ ПОРЯДКУ $\rho<1$

Дослідимо зв"язок між зростанням величин $T(r,f)$ і $N(r)=N(r,f^{-1})$ цілої функції f порядку $\rho<1$. Нехай $V(r)=r^{\rho(r)}$, де $\rho(r)$ - уточнений порядок функції f [1], $\rho(r)\to\rho$ при $r\to\infty$.

Розглянемо спочатку випадок $0<\rho<1$. Позначимо через $\tau=\tau(Q)$, $\sigma=\sigma(Q)$ відповідно невід"ємний і недодатний корені рівняння $Qe^x=x+1$, $0\le Q\le 1$, $x\in R$. При $Q=0$ приймаємо $\tau(0)=+\infty$, а при $Q=1$ відповідно $\tau=\sigma=0$. Нехай ρ - фіксоване число, $0<\rho<1$, $K_0(t,\varphi)=(1-t\cos\varphi)t^{-1}(t^2-2t\cos\varphi+1)^{-1}$; $0<t<+\infty$, $0<\varphi\le\pi$.

Проаналізуємо при $0<q<+\infty$ функцію

$$\omega(q,\varphi;Q)=\frac{\pi\cos\rho(\pi-\varphi)}{\sin\pi\rho}-\int\limits_{q\exp(-\tau/\rho)}^{q}(t^{\rho}-q^{\rho}e^{-\tau})K_0(t,\varphi)\,dt-\int\limits_{q}^{q\exp(-\sigma/\rho)}(t^{\rho}-q^{\rho}e^{-\sigma})K_0(t,\varphi)\,dt. \qquad /1/$$

З /1/ одержуємо, що $\omega(q,\varphi;1)=\pi\cos\rho(\pi-\varphi)\operatorname{cosec}\pi\rho$, $\omega(q,\varphi;0)\to 0$ при $q\to+\infty$.

<u>Теорема 1.</u> Нехай f - ціла функція порядку ρ, $0<\rho<1$, $\varlimsup\limits_{r\to\infty} N(r)/V(r)=K$, $0<K<+\infty$, $\varliminf\limits_{r\to\infty} N(r)/V(r)=L$. Має місце нерівність

$$\varliminf_{r\to\infty} T(r,f)/V(r)\le K\rho\pi^{-1}\inf_{0<q<+\infty}\int\limits_0^{\pi}\omega^{+}(q,\varphi;L/K)\,d\varphi, \qquad /2/$$

де ω визначається за /1/, і існує ціла функція f порядку ρ, $0<\rho<1$, для якої в /2/ має місце знак рівності.

Доведення. Розглянемо допоміжну функцію. Нехай r_k - довільне число, $0 < r_k < \infty$, а $u_k(z)$ - субгармонічна в C функція порядку ρ, $0 < \rho < 1$, у якої ріссівська маса μ зосереджена на додатній півосі і

$$n(r,u_k)=\mu(\{z:|z|<r\})=\begin{cases}K\rho r^{\rho}, & 0 \le r < r_k e^{-\tau/\rho},\\ K\rho e^{-\tau} r_k^{\rho}, & r_k e^{-\tau/\rho} \le r < r_k,\\ K\rho e^{-\phi} r_k^{\rho}, & r_k \le r \le r_k e^{-\phi/\rho},\\ K\rho r^{\rho}, & r_k e^{-\phi/\rho} \le r < \infty,\end{cases}$$

де $\tau=\tau(L/K)$; $\phi=\phi(L/K)$; $0<L\le K<+\infty$.

Маємо

$$u_k(re^{i\varphi})=\int_0^{\infty} n(rt,u_k)K_0(t,\varphi)\,dt=K\rho\Big\{\int_0^{\infty} r^{\rho}t^{\rho}K_0(t,\varphi)\,dt-$$

$$-\int_{(r_k/r)\exp(-\tau/\rho)}^{(r_k/r)}(t^{\rho}r^{\rho}-r_k^{\rho}e^{-\tau})K_0(t,\varphi)\,dt-\int_{(r_k/r)}^{(r_k/r)\exp(-\phi/\rho)}(t^{\rho}r^{\rho}-r_k^{\rho}e^{-\phi})K_0(t,\varphi)\,dt\Big\}=$$

$$=K\rho r^{\rho}\omega(r_k/r,\varphi;L/K). \qquad /3/$$

Нехай спочатку $\rho(r)\equiv\rho$, $L<K$. Позначимо $K_1=K+\varepsilon$, $L_1=L+\varepsilon<K$, $\varepsilon>0$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що нулі f додатні [1] $f(0)=1$, $N(r)\le K_1 V(r)$ для всіх $r>0$. Нехай послідовність $r_k\to\infty$ така, що $N(r_k)=L_1V(r_k)$, $r=r_k/q$, $0<q<+\infty$. Враховуючи /3/, одержуємо

$$\varliminf_{r\to\infty} T(r,u_k)/V(r)=K\rho\pi^{-1}\inf_{0<q<\infty}\int_0^{\pi}\omega^{+}(q,\varphi;L/K)\,d\varphi.$$

Нехай $t=\ln r$, $t_k=\ln r_k$. Рівняння дотичних до графіка $y=K_1e^{\rho t}$, проведених в точки $(t_k, L_1e^{\rho t_k})$, мають вигляд $y_1(t)=K_1\exp(\rho t_k-\tau)\rho(t-t_k)+L_1\exp(\rho t_k)$, $y_2(t)=K_1\exp(\rho t_k-\phi)\rho(t-t_k)+$
$+L_1\exp(\rho t_k)$.

Враховуючи, що функція $N(e^t,0,f)$ опукла відносно t, одержуємо $N(r,f^{-1})\le N(r,u_k)$. Тоді $T(r,f)\le T(r,u_k)$ [3]. Маємо оцінку /2/ у випадку $\rho(r)\equiv\rho$. Перехід до $\rho(r)\not\equiv\rho$ робиться, так само, як і в праці [2].

У випадку $L=\mathcal{K}$ для цілої функції f з додатними нулями насправді виконується [I]

$$\lim_{r\to\infty} T(r,f)/V(r)=\varkappa(\rho)\lim_{r\to\infty} N(r)/V(r), \qquad /4/$$

де $\varkappa(\rho)=1$ при $0.5\geq\rho>0$ і $\varkappa(\rho)=\operatorname{cosec}\pi\rho$ при $1>\rho>0.5$. Звідси випливає справедливість /2/, причому в лівій стороні /2/ нижню границю можна замінити на верхню.

Зауваження. Для $L=0$ з /2/ одержуємо

$$\underline{\lim}_{r\to\infty} T(r,f)/V(r)=0.$$

Покажемо, що оцінку /2/ уточнити не можна. При $L=0$ це очевидно, а при $L=\mathcal{K}$ випливає з /4/. Нехай $0<L<\mathcal{K}<+\infty$, $\rho(r)\equiv\rho$, $0<\rho<1$, (r_n) – послідовність чисел таких, що $r_n/r_{n-1}\to\infty$ при $n\to\infty$. Візьмемо цілу функцію f з додатними нулями такими, що

$$N(r)\sim\begin{cases}\mathcal{K}V(r), & r_{n-1}e^{-\sigma/\rho}\leq r\leq r_n e^{-\tau/\rho},\\ (\mathcal{K}\rho e^{-\tau}\ln(r/r_n)+L)V(r_n), & r_n e^{-\tau/\rho}\leq r<r_n,\\ (\mathcal{K}\rho e^{-\sigma}\ln(r/r_n)+L)V(r_n), & r_n\leq r\leq r_n e^{-\sigma/\rho},\end{cases}$$

де $\tau=\tau(L/\mathcal{K})$, $\sigma=\sigma(L/\mathcal{K})$ – визначені вище.

Нехай $\sqrt{r_{n-1}r_n}\leq r\leq\sqrt{r_n r_{n+1}}$. Легко показати, що

$$\ln|f(re^{i\varphi})|=\mathcal{K}\rho V(r)\,\omega(r_n/r,\varphi;L/\mathcal{K})+o(V(r)),\ r\to\infty. \qquad /5/$$

Враховуючи формулу /7.15/ з праці [I] і /5/, одержуємо

$$T(r,f)=\mathcal{K}\rho\pi^{-1}V(r)\int_0^{\pi}\omega^{+}(r_n/r,\varphi;L/\mathcal{K})\,d\varphi+o(V(r)),\ r\to\infty,$$

звідки бачимо, що в /2/ для функції f має місце знак рівності.

Теорема 2. Якщо f – ціла функція порядку ρ, $0<\rho<1$, то

$$\overline{\lim}_{r\to\infty} T(r,f)/V(r)\geq\overline{\lim}_{r\to\infty} N(r)/V(r). \qquad /6/$$

Коли, крім того, нулі функції f додатні, то

$$\underline{\lim}_{r\to\infty} T(r,f)/V(r)\geq\varkappa(\rho)\underline{\lim}_{r\to\infty} N(r)/V(r). \qquad /7/$$

Існують функції, що задовольняють умови теореми, для яких в /6/ і /7/ мають місце знаки рівності.

Доведення. Нехай $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} N(r)/V(r)=K, \underline{\lim\limits_{r\to\infty}} N(r)/V(r)=L$.

Для цілої функції f_1 з додатними нулями такими, що $N(r,f_1^{-1})=LV(r) + o(V(r))$, маємо $T(r,f_1)=L\varkappa(\rho)V(r)+o(V(r)), r\to\infty$. Оскільки $T(r,f)\geq(1+o(1))T(r,f_1)$ [3], одержуємо оцінку /7/. Оцінка /6/ очевидна. Покажемо, що вона точна. Нехай $0\leq L<K<+\infty, 0<\rho<1$; (r_k) - послідовність чисел таких, що $r_k/r_{k-1}\to\infty, k\to\infty$.

Для функції

$$\varphi(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-(z/n^{3/\rho})^{m_n}\right\},$$

де $m_n=[3K\rho n^2]$ при $r_{2k}\leq n^{3/\rho}<r_{2k+1}$ і $m_n=[3L\rho n^2]$ при $r_{2k+1}\leq n^{3/\rho}<r_{2k+2}$, в /6/ має місце знак рівності. Справді, добре видно, що $L\rho(1+o(1))r^\rho\leq n(r,0,\varphi)\leq K\rho(1+o(1))r^\rho, r\to\infty$, $N(\rho_{2k},0,\varphi)=K(1+o(1))\rho_{2k}^\rho, N(\rho_{2k+1},0,\varphi)=L(1+o(1))\rho_{2k+1}^\rho$, $k\to\infty$, де $\rho_k=\sqrt{r_k r_{k+1}}$. Далі маємо [I]

$$T(r,\varphi)\leq\ln M(r,\varphi)\leq N(r,0,\varphi)+\sum_{n^{3/\rho}\leq r}(n^{3/\rho}/r)^{m_n}+$$

$$+\sum_{n^{3/\rho}>r}(r/n^{3/\rho})^{m_n}\leq N(r,0,\varphi)+\sum_{k=1}^{n-1}(k/n)^{3m_k/\rho}+1+$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}(n/k)^{3m_k/\rho}\leq N(r,0,\varphi)+\sum_{k=1}^{\infty}(k/(k+1))^{3m_k/\rho}+2=N(r,0,\varphi)+O(1),$$

що доводить точність оцінки /6/.

Нехай $\varphi_1(z)$ - канонічний добуток з додатними нулями такими, що $N(r,0,\varphi_1)\sim V_1(r)+o(V_1(r)), \quad r\to\infty$, де

$$\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} V_1(r)/V(r)=K, \quad \underline{\lim\limits_{r\to\infty}} V_1(r)/V(r)=L.$$

Тоді $T(r,\varphi_1)=\varkappa(\rho)V_1(r)+o(V_1(r)), r\to\infty$.

Звідси

$$\underline{\lim\limits_{r\to\infty}} T(r,\varphi_1)/V(r)\leq\varkappa(\rho)L,$$

що підтверджує точність оцінки /7/.

Теорема 3. Нехай f – ціла функція нульового порядку. Тоді

$$\varliminf_{r\to\infty} T(r,f)/V(r) = \varliminf_{r\to\infty} N(r)/V(r). \qquad /8/$$

Доведення. Нехай $L, \mathcal{K}, L_1, \mathcal{K}_1$ і послідовність (r_k) такі, як при доведенні теореми I. При $L=\mathcal{K}$ рівність /8/ добре відома. З рівності /4.I6/ праці [I] одержуємо у випадку $L<\mathcal{K}$ $(0<\delta<1,\ f(0)=1)$

$$T(\delta r_k, f) = \delta r_k \int_{\delta r_k}^{\infty} N(t)t^{-2}dt \le \delta r_k \left\{ \int_{\delta r_k}^{r_k} \frac{N(t)}{t^2}dt + \int_{r_k}^{\infty} \frac{\mathcal{K}_1 V(t)}{t^2}dt \right\} \le$$

$$\le \left(L_1(1-\delta) + \delta \mathcal{K}_1 \right) V(\delta r_k)(1+o(1)),\ k\to\infty.$$

Звідси

$$\varliminf_{r\to\infty} T(r,f)/V(r) \le L_1(1-\delta) + \delta \mathcal{K}_1 .$$

Спрямувавши ε і δ до нуля, дістаємо твердження теореми.

Автор висловлює вдячність А.А.Гольдбергу за керівництво роботою.

Список літератури: I. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, I970. 2. Кондратюк А.А. Экстремальный индикатор для целых функций с положительными нулями. – Литовский математический сборник, I967, т.7, № I. 3. Hellerstein S., Shea D.F. An extremal problem concerning entire functions with radially distributed zeros. Symposium on Complex Analysis Canterbury, 1973; Cambridge, 1974.

Стаття надійшла в редколегію I6.03.8I