УДК 517.537.6

М.М.Хом"як

# АНАЛОГИ ТЕОРЕМИ ВІМАНА ДЛЯ РЯДІВ ДІРІХЛЕ, ЯКІ ЗАДАЮТЬ ЦІЛІ ФУНКЦІЇ СКІНЧЕННОГО НИЖНЬОГО $R$ – ПОРЯДКУ

При дослідженні асимптотичних властивостей цілих функцій, заданих рядами Тейлора, часто використовують метод Вімана – Валірона, причому у випадку, коли ціла функція має скінченний порядок, дістають дещо інші оцінки, ніж у випадку всіх цілих функцій без обмежения на ріст. Фентон [3] показав, що в ряді тверджень, зв"язаних з методом Вімана – Валірона, умову скінченності порядку можна замінити умовою скінченності нижнього порядку.

Останнім часом ряд математиків зацікавились розвитком методу Вімана – Валірона для рядів Діріхле з невід"ємними показниками. Застосування цього методу до цілих функцій, заданих такими рядами, пов"язане з труднощами, викликаними нерегулярним розподілом показників. Якщо у випадку цілих функцій скінченного $R$ – порядку одержано більш-менш задовільні аналоги теореми Вімана, то для цілих функцій скінченного нижнього $R$ – порядку вони не розглядалися. Вкажемо аналоги теореми Вімана для рядів Діріхле з невід"ємними показниками, які задають цілі функції скінченного нижнього $R$ – порядку.

Нехай $f$ – ціла функція, задана абсолютно збіжним в $\mathbb{C}$ рядом Діріхле

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n},\ z=x+iy, \qquad /1/$$

де $a_0=1$ і $0=\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n\to\infty\ (n\to\infty)$, $M(x,f)=\sup\{|f(x+iy)|:y\in R\}$; $\mu(x,f)$ і $\nu=\nu(x,f)$ – відповідно максимальний член і центральний індекс ряду /1/; $n(t)=\sum\limits_{\lambda_n\le t} 1$ – рахуюча функція послідовності $(\lambda_n)$.

Розглянемо ряди /1/, для яких $\ln n(t)\le Bt\ \ (t\ge t_0)$, де $B$ – додатна стала. Отримані нижче оцінки виконуються зовні виняткових множин, для описання яких використовують поняття нижньої щільності. Нижньою щільністю $dE$ вимірної множини $E \in [0,\infty)$ називають величину

$$dE = \varliminf_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_{E\cap[0,x]} dt .$$

<u>Теорема I</u>. Нехай $f$ – ціла функція скінченного нижнього $R$-порядку $\lambda$, задана рядом /I/ $\ln n(t) < Bt\ (t \geq t_0)$, $0 < \delta < 1$. Тоді $\forall \varepsilon > 0$ і $\forall x \bar{\in} E$, $dE < \delta$, виконується нерівність

$$\ln M(x,f) \leq \exp\left\{\frac{(\lambda+\varepsilon)B}{\delta}\right\} \ln \mu(x,f). \qquad /2/$$

Приклад функції $f_1(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\ln n \ln\ln n}{\rho} + \ln n \sqrt{\ln\ln n}\right\} n^z$ вказує на точність оцінки /2/. Тоді $\lambda_n = \ln n$, $B = 1$, $\lambda = \rho$ і $\ln M(x,f_1) = (1+o(1))e^{\rho} \ln \mu(x,f_1)$, $x \to \infty$.

У випадку, коли нижній $R$ – порядок функції /I/ дорівнює $0$, оцінку /2/ можна уточнити. Неважко показати, що для того щоб функція $f$ мала нульовий нижній $R$ -порядок, необхідне і достатнє існування опуклої неспадної додатної на $(-\infty,\infty)$ функції $\Phi$, для якої існує послідовність $(x_k)$, $x_k \to \infty$ $(k \to \infty)$, така що
$$\ln M(x_k, f) \leq \Phi(x_k) \quad і \quad \Phi'(x) = o(\Phi(x)),\ x \to \infty.$$

<u>Теорема 2.</u> Нехай $f$ – ціла функція, задана рядом /I/, $\ln n(t) < Bt\ (t \geq t_0)$; $0 < \delta < 1$. Якщо існує функція $\Phi$ з вказаними вище властивостями, то $\forall \varepsilon > 0$ і $\forall x \bar{\in} E$, $dE < \delta$, виконуються нерівності

$$M(x,f) \leq \mu(x,f) \exp\{(B+\varepsilon)\lambda_\nu\} \leq$$
$$\leq \mu(x,f) \exp\left\{(B+\varepsilon)\Psi\left(\tfrac{1}{\delta} \ln \mu(x,f)\right)\right\}, \qquad /3/$$

де $\Psi$ – функція, обернена до $\psi(x) = \int_a^x t\varphi'(t)\,dt$ ; $\varphi$ – функція, обернена до $\Phi$, $a$ – додатна стала.

Приклад функції $f_2(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \exp\{-\ln n (\ln\ln n)^2\} n^z$ вказує [I] на точність оцінки /3/.

Важливим є клас цілих функцій /I/, для яких

$$\ln M(x_k, f) \leq A x_k^{\rho},\ A>0,\ \rho>1, \qquad /4/$$

де $(x_k)$ – деяка послідовність; $x_k \to +\infty\ (k \to \infty)$.

<u>Теорема 3.</u> Нехай $f$ – ціла функція, задана рядом /I/, $\ln n(t) \leq bt\ (t \geq t_0)$ і $0<\delta<1$. Якщо виконується умова /4/, то $\forall \varepsilon>0$ і $\forall x \bar{\in} E$, $dE \leq \delta$, має місце нерівність

$$\frac{M(x,f)}{\mu(x,f)} \leq \exp\left\{(b+\varepsilon)\left(A\rho^{2\rho-1}(\rho-1)^{1-\rho}\delta^{1-\rho}\right)^{1/\rho}\left(\ln\mu(x,f)\right)^{\frac{\rho-1}{\rho}}\right\}. \qquad /5/$$

Приклад функції

$$\xi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{b}\ln n\left(\ln^{\frac{1}{\rho-1}} n - B\right)\right\} n^{z},\ \rho>1,\ B=\frac{1}{\rho-1}(A\rho)^{\frac{1}{\rho-1}},\ A>0,$$

вказує [2] на точність оцінки /5/.

Розглянемо випадок, коли $\lambda_n = \frac{1}{b}\ln n,\ b\in(0,+\infty)$, а

$$\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\ln M(x,f)}{x\ln x} = A < \infty. \qquad /6/$$

<u>Теорема 4</u>. Нехай $f$ – ціла функція, задана рядом /I/, $\lambda_n=\frac{1}{b}\ln n,\ b\in(0,+\infty)$ і виконується умова /6/. Тоді $\forall\varepsilon>0$ $\forall x \bar{\in} E$, $dE=0$, має місце нерівність

$$M(x,f) \leq \begin{cases} \mu(x,f)\left(\ln\mu(x,f)\right)^{Ab-\frac{1}{2}+\varepsilon}, & A \geq \frac{1}{2b}, \\ (1+\varepsilon)\,\mu(x,f), & A<\frac{1}{2b}. \end{cases} \qquad /7/$$

Приклад функції

$$f_4(z)=1+\sum_{n=2}^{\infty}\exp\left\{-\frac{n^{\rho}}{(\ln n)^{k}}\right\} n^{z},\ \rho>0,\ k>0,$$

вказує на точність оцінки /7/. У цьому випадку $A=\frac{1}{\rho}$

$$M(x,f_4) \geq (1+o(1))\begin{cases} K\mu(x,f_4)\left(\ln\mu(x,f_4)\right)^{A-\frac{1}{2}}\left(\ln\ln\mu(x,f_4)\right)^{\frac{k-1}{\rho}+\frac{1}{2}}, & A\geq\frac{1}{2}, \\ \mu(x,f_4), & A<\frac{1}{2} \end{cases}$$

при $x\to\infty$, де $K$ – додатна стала.

Автор висловлює глибоку вдячність М.М.Шереметі за керівництво роботою.

Список літератури: 1. Х о м ' я к  М.М. Теорема типу Вімана для цілих функцій нульового порядку за Ріттом, заданих рядами Діріхле. – Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат, вип. 18, 1981. 2. Х о м ' я к М. М. Асимптотичні властивості цілих функцій, заданих рядами Діріхле. – Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 14, 1979. 3. Fenton P.C. Some results of Wiman-Valiron type for integral functions of finite lower order – Ann of Math., 1976, v. 103, №2.

Стаття надійшла в редколегію 20.02.81

УДК 517.535.4

М.М.Шеремета

## ПРО ЗРОСТАННЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – аналітична в крузі $\{z: |z|<R\}$, $0<R\leq\infty$, функція, причому, якщо $0<R<\infty$, то $f$ має на $\{z: |z|=R\}$ принаймні одну особливу точку, а коли $R=\infty$, то $f$ – трансцендентна ціла функція. Порядок $\rho$ і тип $\tau$ зростання функції $f$ можна виразити за допомогою формул

$$\rho=\varlimsup_{r\to R} \ln\ln M(r)/\ln\frac{Rr}{R-r},\ \tau=\varlimsup_{r\to R}\left(\frac{Rr}{R-r}\right)^{-\rho}\ln M(r)\ (0<\rho<\infty),$$

де $M(r)=\max\{|f(z)|: |z|=r<R\}$, а $\frac{Rr}{R-r}$ при $R=\infty$ розуміємо як $r$. Приймемо $\alpha_n=\left(\sqrt[n]{|a_n|}-1/R\right)^+$. Згідно з формулою Коші-Адамара $\alpha_n\to 0$ $(n\to\infty)$. Позначимо

$$\varkappa=\varlimsup_{n\to\infty}\ln n/\ln\frac{1}{\alpha_n},\ b=\varlimsup_{n\to\infty} n\alpha_n^{\varkappa}\ (0<\varkappa<\infty).$$

За формулами Адамара для знаходження порядку і типу цілої функції [2] маємо $\rho=\varkappa$ і $b=\tau\rho e$, так що ріст цілої функції $f$ прямо залежить від швидкості прямування $\sqrt[n]{|a_n|}$ до нуля, тобто до $1/R$. Існують також формули для знаходження порядку й типу через коефіцієнти у випадку, коли $0<R<\infty$ [I, 3]. Проте вони не вказують безпосередньо на зв"язок між зростанням $f$ і прямуванням $\sqrt[n]{|a_n|}$ до $1/R$, точніше, швидкістю прямування $\alpha_n$ до $0$. Такий зв"язок розглянемо у цій замітці.

Теорема I. Якщо $0<R<\infty$, то $\rho=(\varkappa-1)^+$. Нехай $\rho<\infty$. Оскільки при $0<R<\infty$ виконується співвідношення $(R-r)/r\sim \ln\frac{R}{r}$, $r\to R$, то $\ln\frac{Rr}{R-r}\sim-\ln\ln\frac{R}{r}$, $r\to R$, і $(\forall\rho_1<\rho)(\forall r\in[r_0(\rho_1),R))$ $\left\{M(r)\le\exp\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{-\rho_1}\right\}$. Тому за нерівністю Коші $(\forall n\ge0)(\forall r\ge r_0(\rho_1))\left\{|a_n|R^n\le\left(\frac{R}{r}\right)^n M(r)\le\exp\left(\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{-\rho_1}+n\ln\frac{R}{r}\right)\right\}$. Вибравши $r$ так, щоб $\ln\frac{R}{r}=(n/\rho_1)^{-1/(\rho_1+1)}$, одержуємо $(\forall n\ge n_0(\rho_1))$ $\left\{|a_n|R^n\le\exp\left(K(\rho_1)\,n^{\rho_1/(\rho_1+1)}\right)\right\}$, де $K(\rho)=(1+\rho_1)\rho_1^{-\rho_1/(\rho_1+1)}$. Звідси випливає, що $\sqrt[n]{|a_n|}\le\frac{1}{R}\exp(K(\rho)n^{-1/(\rho_1+1)})=\frac{1}{R}+\frac{K(\rho_1)}{R}(1+o(1))n^{-1/(\rho_1+1)}$ при $n\to\infty$ і, таким чином, $\alpha_n\le(1+o(1))\frac{K(\rho_1)}{R}\,n^{-1/(\rho_1+1)}$ при $n\to\infty$, а отже, внаслідок довільності $\rho_1$ одержуємо нерівність $(\varkappa-1)^+\le\rho$, яка є очевидною при $\rho=\infty$.

Щоб завершити доведення, треба показати, що $\rho\le(\varkappa-1)^+$. При $\varkappa=\infty$ ця нерівність очевидна; якщо ж $\varkappa<\infty$, то $(\forall\varkappa_1>\max\{1,\varkappa\})$ $(\forall n\ge n_0(\varkappa_1))\left\{\alpha_n\le n^{-1/\varkappa_1}\right\}$, тобто $|a_n|R^n\le(1+Rn^{-1/\varkappa_1})^n\le\exp\{Rn^{(\varkappa_1-1)/\varkappa_1}\}$. Тому $\forall r\in[0,R)$ виконується

$$M(r)\le\sum_{n=n_0(\varkappa_1)}^{\infty}|a_n|r^n+\sum_{n=0}^{n_0(\varkappa_1)-1}|a_n|r^n=\sum_{n=n_0(\varkappa_1)}^{\infty}|a_n|R^n\left(\frac{R+r}{2R}\right)^n\left(\frac{2r}{R+r}\right)^n+O(1)\le$$

$$\le\frac{R+r}{R-r}\max\left\{\exp\left(Rn^{(\varkappa_1-1)/\varkappa_1}+n\ln\frac{R+r}{2R}\right):n\ge0\right\}+O(1)\le$$

$$\le\frac{R+r}{R-r}\exp\left(\max\left\{Rt^{(\varkappa_1-1)/\varkappa_1}+t\ln\frac{R+r}{2R}:t\ge0\right\}\right)+O(1)=$$

$$=\frac{R+r}{R-r}\exp\left(\frac{\varkappa_1}{R(\varkappa_1-1)}\ln\frac{2R}{R+r}\right)^{1-\varkappa_1}+O(1),\quad r\to R.$$

Оскільки $\frac{1}{R}\ln\frac{2R}{R+r}\sim\frac{R-r}{2r}$ при $r\to R$, то одержуємо

$$M(r)\le\frac{2R}{R-r}\exp\left((1+o(1))\frac{\varkappa_1-1}{\varkappa_1}\,\frac{2r}{R-r}\right)^{\varkappa_1-1}+O(1)=$$

$$= \exp\left\{(1+o(1))\left(\frac{2}{R}\,\frac{\varkappa_1-1}{\varkappa_1}\,\frac{R_2}{R-r}\right)^{\varkappa_1-1}\right\},\ r\to R,$$

тобто $\rho\le\varkappa_1-1$, і внаслідок довільності $\varkappa_1$, $\rho\le\max\{1,\varkappa\}-1=(\varkappa-1)^+$, що і завершує доведення теореми I.

Наслідок I [3]. Якщо $R=1$, то $\rho=\frac{\gamma}{1-\gamma}$, $\gamma=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{\ln^+\ln^+|a_n|}{\ln n}$.

Дійсно, коли $\varkappa<\infty$, то $(\forall\varkappa_1>\max\{1,\varkappa\})(\forall n\ge n_0(\varkappa_1))\{\alpha_n\le n^{-1/\varkappa_1}\}$ і $|a_n|\le(1+n^{-1/\varkappa_1})^n\le\exp n^{(\varkappa_1-1)/\varkappa_1}$, тобто $\gamma\le\frac{\varkappa_1-1}{\varkappa_1}$. З останньої нерівності випливає, що $\gamma\le1$ і $\gamma/(1-\gamma)\le\varkappa_1-1$. Тому внаслідок довільності $\gamma_1$ одержуємо нерівність $\gamma/(1-\gamma)\le\max\{1,\varkappa\}-1=(\varkappa-1)^+$, яка очевидна при $\varkappa=\infty$. З іншого боку, коли $\gamma<1$, то $(\forall\gamma_1\in(\gamma,1))(\forall n\ge n_0(\gamma_1))\{|a_n|\le\exp n^{\gamma_1}\}$, звідки випливає $\alpha_n\le(1+o(1))n^{-(1-\gamma_1)}$ при $n\to\infty$ і внаслідок довільності $\gamma_1$ одержуємо нерівність $\varkappa\le1/(1-\gamma)$, або $(\varkappa-1)^+\le\gamma/(1-\gamma)$, яка очевидна при $\gamma=1$. Таким чином, за теоремою I $\gamma/(1-\gamma)=(\varkappa-1)^+=\rho$.

Теорема 2. Якщо $0<R<\infty$, то $\tau=\frac{R\sigma}{\rho}\left(\frac{\rho}{\rho+1}\right)^{\rho+1}$.

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми I. З теореми 2 випливає наступне твердження.

Наслідок 2 [3]. Якщо $R=1$, то $\tau=\frac{\beta}{\rho}\left(\frac{\rho}{\rho+1}\right)^{\rho+1}$, $\beta=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,n^{-\rho}(\ln^+|a_n|)^{\rho+1}$.

Список літератури: I. Говоров Н.В. О связи между ростом функции, аналитической в круге, и коэффициентами ее степенного разложения. – Тр. Новочерк. политехн. ин-та, 1959, т.100. 2. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956. 3. Мак-Лейн Г. Асимптотические значения голоморфных функций. – М.: Мир, 1966.

Стаття надійшла в редколегію 12.02.81