УДК 513.88

В.Е.Лянце, О.Г.Сторож

УМОВИ ЗБІГАННЯ ДВОХ ОПЕРАТОРІВ

Приймемо такі позначення: $B(X,Y)$ – простір лінійних обмежених операторів $X\to Y$, де X, Y – нормовані простори; $B(X)=B(X,X)$; $D(T), R(T), Z(T)$ – область визначення, область значень і ядро оператора T; 1_X – одиничний оператор простору X; $T/_R$ – звуження оператора T на множину R; $\bar{R}$ – замикання множини R. Далі, нехай H – фіксований комплексний гільбертів простір, L, L_0 – замкнуті, щільно визначені лінійні оператори в H, причому $L_0\subset L$. Замість $D(L)$ пишемо $D[L]$, коли множина розглядається як гільбертів простір зі скалярним добутком графіка оператора L. Крім того, заданими вважаємо оператори $\Phi_i\in B(H,U_i)$, $i=1,2$, де U_1, U_2 – гільбертові простори такі, що їх ортогональна сума $U=U_1\oplus U_2$ крайовий простір для (L, L_0). Тобто існує $\Gamma\in B(D[L],U)$ таке, що (U,Γ) – крайова пара для (L,L_0); означення крайової пари наведено у праці [3].

Розглянемо оператори W_i, $\hat{W}_i\in B(D[L],U_i)$, $i=1,2$, такі що

$$R(W_1-\Phi_1)=R(\hat{W}_1-\Phi_1)=U_1, \tag{1}$$

$$R(W_2)=R(\hat{W}_2)=\overline{R(\Phi_2)}, \tag{2}$$

$$Z(W)\supset D(L_0),\ Z(\hat{W})\supset D(L_0), \tag{3}$$

де $W, \hat{W}\in B(D[L],U)$ визначаються співвідношеннями $W_y=(W_1y, W_2y)$, $\hat{W}_y=(\hat{W}_1y,\hat{W}_2y)$.

Встановлено умови збігання операторів S_W, $S_{\hat{W}}:H\to H$, де

$$D(S_W)=\{y\in D(L): W_1y=\Phi_1y\}, \tag{4}$$

$$S_W y = Ly + \Phi_2^* W_2 y, \quad y \in D(S_W); \qquad /5/$$

$S_{\hat W}$ визначаєтьоя співвідношеннями типу /4/–/5/ з заміною W_i на $\hat W_i$; $\Phi_2^* \in B(U_2, H)$ – оператор, спряжений до Φ_2.

Відзначимо, що питання про рівність операторів, породжених співвідношеннями вказаного типу, постає при дослідженні умов взаємної спряженості деяких диференціально-граничних операторів у просторі вектор-функцій. Крім того, воно зв"язане з задачею про самоспряжені розширення деяких нещільно визначених операторів.

Теорема. $S_W = S_{\hat W}$ тоді і тільки тоді, коли існує $\Omega \in B(U_1 \oplus \overline{R(\Phi_2)})$ такий, що $\Omega^{-1} \in B(U_1 \oplus \overline{R(\Phi_2)})$, $\Omega|_{\overline{R(\Phi_1)}} = 1_{\overline{R(\Phi_1)}}$, $\Omega|_{\overline{R(\Phi_2)}} = 1_{\overline{R(\Phi_2)}}$, $W = \Omega \hat W$.

Доведення. Нехай оператор Ω з потрібними властивостями існує. Розглядаючи його як відображення з $\overline{R(\Phi_1)} \oplus [U_1 \ominus \overline{R(\Phi_1)}] \oplus \overline{R(\Phi_2)}$ в себе / $\ominus$ – знак ортогонального доповнення/, бачимо, що він має вигляд

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1_{\overline{R(\Phi_1)}} & \Omega_{12} & 0 \\ 0 & \Omega_{22} & 0 \\ 0 & \Omega_{32} & 1_{\overline{R(\Phi_2)}} \end{pmatrix}. \qquad /6/$$

Звідси випливає, що $W_1 = C_1 \hat W_1$, де $C_1 = \begin{pmatrix} 1_{\overline{R(\Phi_1)}} & \Omega_{12} \\ 0 & \Omega_{22} \end{pmatrix}$.

Крім того, зрозуміло, що $\Phi_1 = C_1 \Phi_1$, а тому $(W_1 - \Phi_1) = C_1(\hat W_1 - \Phi_1)$. Зі зворотності Ω випливає зворотність C_1 ([4], задача 56/, так що $Z(W_1 - \Phi_1) = Z(\hat W_1 - \Phi_1)$, тобто $D(S_W) = D(S_{\hat W})$.

Далі, для всіх $y \in D(S_W)$,

$$W_2 y = \Omega_{32}(\hat W_1 y - P_1 \hat W_1 y) + \hat W_2 y = \Omega_{32}(\hat W_1 y - P_1 \hat W_1 y) + \hat W_2 y = \hat W_2 y,$$

де P_1 – ортопроектор $U_1 \to \overline{R(\Phi_1)}$. Тепер вже видно, що $S_W = S_{\hat W}$.

Навпаки, нехай $S_W = S_{\hat{W}}$. Тоді $Z(W_1 - \Phi_1) = Z(\hat{W}_1 - \Phi_1)$. Використовуючи (1) і "лему про трійку" [I], робимо висновок про існування $C_1 \in B(U_1)$ такого, що $C_1^{-1} \in B(U_1)$, $(W_1 - \Phi_1) = C_1(\hat{W}_1 - \Phi_1)$. Беручи до уваги /3/, переконуємось, що $\Phi_1 /_{D(L_0)} = C_1 \Phi_1 /_{D(L_0)}$. Продовжуючи це співвідношення по неперервності, бачимо, що

$$\Phi_1 = C_1 \Phi_1, \qquad /7/$$

а отже

$$W_1 = C_1 \hat{W}_1. \qquad /8/$$

Відзначимо, що, беручи до уваги /7/, $C_1 /_{\overline{R(\Phi_1)}} = 1_{\overline{R(\Phi_1)}}$, а тому C_1, розглядуваний як відображення $\overline{R(\Phi_1)} \oplus [U_1 \ominus \overline{R(\Phi_1)}]$ в себе, визначається матрицею

$$\begin{pmatrix} 1_{\overline{R(\Phi_1)}} & \Omega_{21} \\ 0 & \Omega_{22} \end{pmatrix}. \qquad /9/$$

Далі, у розглядуваній ситуації для всіх $y \in D(S_W)$ $\Phi_2^* W_2 y = \Phi \hat{W}_2 y$, тобто $Z(\Phi_2^*(W_2 - \hat{W}_2)) \supset Z(\hat{W}_1 - \Phi_1)$. Але $R(W_2 - \hat{W}_2) \subset \overline{R(\Phi_2)} = U_2 \ominus Z(\Phi_2^*)$, тому $Z(\Phi_2^*(W_2 - \hat{W}_2)) = Z(W_2 - \hat{W}_2)$. Таким чином, $Z(W_2 - \hat{W}_2) \supset Z(\hat{W}_1 - \Phi_1)$. Застосовуючи ще раз "лему про трійку", бачимо, що $W_2 - \hat{W}_2 = C_2(\hat{W}_1 - \Phi_1)$, де $C_2 \in B(U_1, \overline{R(\Phi_2)})$. Міркуючи так само, як при виведенні співвідношень /7/ – /8/, отримуємо

$$C_2 /_{\overline{R(\Phi_1)}} = 0, \qquad W_2 = C_2 \hat{W}_1 + W_2. \qquad /II/$$

Враховуючи /8/, /II/, приходимо до висновку, що

$$W = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ C_2 & 1_{\overline{R(\Phi_2)}} \end{pmatrix} \hat{W}.$$

Безпосередня перевірка показує, що оператор, який визначається матрицею у правій частині останнього співвідношення, задовольняє потрібні вимоги.

Список літератури: I. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1976. 2. Лянце В.Е., Сторож О.Г. Про збурення крайового оператора. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вып. 14, 1979. 3. Лянце В.Е., Сторож О.Г. Умови взаємної спряженості деяких замкнутих операторів в термінах абстрактних граничних операторів. - ДАН УРСР, сер. А, 1980, № 6. 4. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. - М.: Мир, 1970.

Стаття надійшла в редколегію 16.03.81

УДК 517.535.4

О.В.Веселовська

ПРО НИЖНІЙ ПОРЯДОК ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ

Нехай f - ціла функція. Через $\rho(f)$, $\lambda(f)$ позначимо відповідно порядок і нижній порядок функції f, через $q(f)$ - її рід. При нескінченному $\rho(f)$ вважатимемо $q(f)$ також нескінченним.

Відомо, що ріст цілої функції тісно пов"язаний з розподілом її нулів. У цій статті досліджуємо властивості нижнього порядку $\lambda(f)$ залежно від розподілу нулів функції f та її роду. Наведені нижче теореми узагальнюють відповідні результати з праць [1, 3, 4].

Позначимо через $n(t,0)$ кількість нулів функції f в крузі $\{z : |z| < t\}$.

Теорема 1. Нехай $f(z)$, $f(0)=1, Re f'(0)\geq 0$ - ціла функція роду $q(f)\geq 1$, нулі $\{a_k\}$ якої лежать в області $\{z: Re z>0\}$. Тоді $\lambda(f)\geq 1$.

Теорема 2. Нехай f - ціла функція роду $q(f)\geq 1$, $f(0)=1$ і $Re f'(0)<0$, а нулі $\{a_k\}$ функції f лежать в області $\{z=r\cdot e^{i\theta} : \cos\theta \geq \psi(r)\}$, причому функція $\psi\equiv 0$, коли $\int_0^{\infty} \frac{n(t,0)}{t^2}dt < \infty$, і задовольняє умови