Список літератури: 1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1976. 2. Лянце В.Е., Сторож О.Г. Про збурення крайового оператора. - Вісн. Львів. ун-ту, сер.мех.-мат., вип.14, 1979. 3. Лянце В.Е., Сторож О.Г. Умови взаємної спряженості деяких замкнутих операторів в термінах абстрактних граничних операторів. - ДАН УРСР, сер. А, 1980, № 6. 4. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. - М.: Мир, 1970.

Стаття надійшла в редколегію 16.03.81

УДК 517.535.4

О.В.Веселовська

ПРО НИЖНІЙ ПОРЯДОК ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ

Нехай f - ціла функція. Через $\rho(f)$, $\lambda(f)$ позначимо відповідно порядок і нижній порядок функції f, через $q(f)$ - її рід. При нескінченному $\rho(f)$ вважатимемо $q(f)$ також нескінченним.

Відомо, що ріст цілої функції тісно пов'язаний з розподілом її нулів. У цій статті досліджуємо властивості нижнього порядку $\lambda(f)$ залежно від розподілу нулів функції f та її роду. Наведені нижче теореми узагальнюють відповідні результати з праць [1, 3, 4].

Позначимо через $n(t,0)$ кількість нулів функції f в крузі $\{z : |z| \le t\}$.

Теорема 1. Нехай $f(z)$, $f(0)=1, Re f'(0) \ge 0$ - ціла функція роду $q(f) \ge 1$, нулі $\{a_k\}$ якої лежать в області $\{z : Re z > 0\}$. Тоді $\lambda(f) \ge 1$.

Теорема 2. Нехай f - ціла функція роду $q(f) \ge 1$, $f(0)=1$ і $Re f'(0) < 0$, а нулі $\{a_k\}$ функції f лежать в області $\{z = r\cdot e^{i\theta} : \cos\theta \ge \psi(r)\}$, причому функція $\psi \equiv 0$, коли $\int\limits_0^\infty \frac{n(t,0)}{t^2} dt < \infty$,

і задовольняє умови

1/ $0<\psi(r)\le 1$, ψ – незростаюча,

2/ $\psi(r)\int_0^r \frac{n(t,0)}{t^2}dt \to \infty$ при $r\to\infty$,

коли $\int_0^\infty \frac{n(t,0)}{t^2}dt = \infty$.

Тоді $\lambda(f)\ge 1$.

Для доведення цих теорем потрібні наступні леми. Через $T(r,f)$ позначимо характеристику Неванлінни функції f.

<u>Лема I</u> [I]. Якщо ω – ціла функція роду q, то

$$T(r,\omega) = o(r^{q+1}).$$

<u>Лема 2</u> [2]. Нехай u, v – цілі трансцендентні функції і $w(z) = u(v(z))$. Тоді

$$3T(r,w) \ge T(r^{n+1}, u)$$

для довільного фіксованого натурального n і достатньо великих r.

Перейдемо до доведення теореми I. Розглянемо спочатку випадок, коли нулі функції f задовольняють умову

$$\sum_k \frac{1}{|a_k|} < \infty.$$

Тоді

$$f(z) = h(z)\prod_k\left(1-\frac{z}{a_k}\right),$$

де h – ціла функція, що не має нулів і не є тотожньо сталою, оскільки $q(f)\ge 1$. Крім того, $h(z) = e^{g(z)}$, де g – відмінна від сталої ціла функція, тому справедлива рівність

$$f(z) = e^{g(z)}\prod_k\left(1-\frac{z}{a_k}\right).$$

Використовуючи відомі співвідношення між характеристиками [I] та лему I, отримуємо

$$T(r,f) = T(r,e^{g(z)}) + o(r). \qquad /I/$$

Припустимо, що g – ціла трансцендентна функція. Тоді на основі леми 2

$$T(r,f) \ge \frac{1}{3}T(r^{n+1}, e^z) + o(r),$$

де n – довільне фіксоване натуральне число; r – досить велике.

Таким чином, бачимо, що

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r,f)}{r} = \infty,$$

а це й означає, що $\lambda(f) \geq 1$.

Нехай тепер g – многочлен. Відомо, що

$$T(r, e^{g(z)}) \sim \frac{|b|}{\pi} r^{p}, \quad r\to\infty,$$

де b – коефіцієнт при найстаршому степені многочлена g; p – степінь цього многочлена. Це разом з /I/ знову дає $\lambda(f) \geq 1$.

Розглянемо тепер випадок, коли

$$\sum_k \frac{1}{|a_k|} = \infty.$$

Запишемо для функції f формулу Шварца-Йенсена [I]

$$\ln f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{i\varphi})| \frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\,d\varphi -$$

$$-\sum_{|a_k|<R} \ln \frac{R^2-\bar{a}_k z}{R(z-a_k)} + iC,$$

де C – дійсна стала; $|z|<R$. Продиференціювавши її та прийнявши $z=0$, одержимо

$$f'(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{i\varphi})| \frac{d\varphi}{Re^{i\varphi}} + \sum_{|a_k|<R} \frac{|a_k|^2-R^2}{a_k\cdot R^2}.$$

Відокремивши дійсну частину, матимемо

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{i\varphi})|\cos\varphi\, d\varphi = A\cdot R + \sum_{|a_k|<R}\left(\frac{R}{|a_k|} - \frac{|a_k|}{R}\right)\cos\beta_k,$$

де $A = \operatorname{Re} f'(0)$, $\beta_k = \arg a_k$.

Легко перевірити, що

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{i\varphi})|\cos\varphi\, d\varphi \leq 4T(R,f).$$

Тому

$$4T(R,f) \geq A\cdot R + \sum_{|a_k|<R}\left(\frac{R}{|a_k|} - \frac{|a_k|}{R}\right)\cos\beta_k. \qquad /2/$$

Оскільки для всіх k $\cos\beta_k > 0$, $A \geq 0$, то

$$4T(R,f) \geq \left(\frac{R}{|a_1|} - \frac{|a_1|}{R}\right)\cos\beta_1,$$

звідки випливає, що

$$\varliminf_{R\to\infty} \frac{T(R,f)}{R} \neq 0$$

і, отже, $\lambda(f) \geq 1$. Теорема I доведена.

Зауваження I. Побудовано приклад цілої функції $f(z), f(0)=1$, $Re f'(0)=0$ роду $q(f)=1$ з нулями на уявній осі та нульового нижнього порядку.

Доведення теореми 2 розбивається на два випадки:

$$I) \quad \sum_k \frac{1}{|a_k|} < \infty;$$

$$II) \quad \sum \frac{1}{|a_k|} = \infty.$$

Доведення випадку I аналогічне доведенню цього випадку в теоремі I.

Випадок II. Виходимо з формули /2/. То. . на основі умови I/ виконується

$$4T(R,f) \geq A\cdot R + \psi(R) \sum_{|a_k|<R} \left(\frac{R}{|a_k|} - \frac{|a_k|}{R} \right).$$

Перетворимо суму $\sum_{|a_k|<R} \left(\frac{R}{|a_k|} - \frac{|a_k|}{R} \right)$ таким чином

$$\sum_{|a_k|<R} \left(\frac{R}{|a_k|} - \frac{|a_k|}{R} \right) = R \int_0^R \frac{n(t,0)}{t^2} dt + \frac{1}{R} \int_0^R n(t,0) dt.$$

З останньої рівності та умови I/ випливає, що

$$4T(R,f) \geq AR + R\psi(R) \int_0^R \frac{n(t,0)}{t^2} dt.$$

Оскільки ряд $\sum_k \frac{1}{|a_k|}$ – розбіжний, то розбіжний також інтеграл [I]

$$\int_0^\infty \frac{n(t,0)}{t^2} dt.$$

Тоді, використовуючи умову $2)$, маємо

$$\lim_{R\to\infty} \frac{T(R,f)}{R} = \infty,$$

що завершує доведення теореми.

Зауваження 2. Побудовано також приклад цілої функції $f(z)$, $f(0)=1$, $Re f'(0) < 0$ роду $q(f)=1$ і нульового нижнього порядку, нулі якої розтановані на кривій $\{z = r\cdot e^{i\theta} : \cos\theta = \psi(r)\}$, де ψ – функція, що задовольняє умову I/ і не задовольняє умову $2)$

Наведемо тепер без доведення дві теореми, які узагальнюють доведені вище теореми у випадку окінченного роду.

Теорема 3. Нехай f - ціла функція скінченного роду $q = q(f) \geq 1, f(0) \neq 0$, нулі якої лежать в області $\{z : \operatorname{Re} z^q > 0\}$

$$\operatorname{Re} \frac{d^q}{dz^q} \ln f(z) \Big|_{z=0} \geq 0.$$

Тоді $q \leq \lambda(f) \leq \rho(f) \leq q+1$.

Теорема 4. Нехай f - ціла функція скінченного роду $q = q(f) \geq 1$, $f(0) \neq 0$. Якщо

$$\operatorname{Re} \frac{d^q}{dz^q} \ln f(z) \Big|_{z=0} < 0$$

і нулі функції f лежать в області $\{z = r e^{i\theta} : \cos q\theta \geq \psi(r)\}$, причому функція $\psi \equiv 0$, коли

$$\int_0^\infty \frac{n(t,0)}{t^{q+1}} dt < \infty$$

і задовольняє умови

$$0 < \psi(r) \leq 1, \quad \psi \text{ - незростаюча},$$

$$\psi(r) \int_0^r \frac{n(t,0)}{t^{q+1}} dt \to \infty \quad \text{при } r \to \infty,$$

коли $\int_0^\infty \frac{n(t,0)}{t^{q+1}} dt = \infty$,

то $q \leq \lambda(f) \leq \rho(f) \leq q+1$.

Автор висловлює вдячність А.А.Кондратюку за керівництво роботою.

Список літератури: I. Г о л ь д б е р г А.А., О с т р о в с к и й И.В. Распределение значений мероморфных функций. - М.: Наука, 1970. 2. Х е й м а н У о л т е р К. Мероморфные функции. - М.: Мир, 1966. 3. Edrei A. and W. H. J. Fuchs. On the growth of meromorphic functions with several deficient values. Trans. Amer. Math. Soc., 1959, N93. 4. Kobayashi T. On the lower order an entire function. - Kodai Math. Sem. Rep., 1976, N27.

Стаття надійшла в редколегію 05.03.81