УДК 517.946

С.П.Лавренюк

СТІЙКІСТЬ ЗА ЛЯПУНОВИМ ОДНІЄЇ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

У працях [2, 3, 4] розглядається стійкість за Ляпуновим тривіального розв"язку однієї змішаної задачі для рівняння коливання пластинки відносно певної метрики, яка дає змогу поширити відомі результати для класичних розв"язків на узагальнені по просторових змінних розв"язки.

Нехай маємо задачу

$$\Delta^2 u + \operatorname{div}(b(x)\nabla u) + c(x)u + u_{tt} = f(x,t,u,u_t), \qquad /1/$$

$$u\Big|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big|_\Gamma = 0, \qquad /2/$$

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad /3/$$

в області $\Omega = D\times J$, де $J=\{0<t<+\infty\}$;

$D=\{x\in R^n:\ 0<x_i<1,\ i=1,\dots,n\}$,

Γ – бічна поверхня Ω.

Позначимо через ∂D межу області D і через D_0 множину $\{x\in D,\ t=0\}$. Нехай функція $u(x,t)$, яка належить простору

$$Y = C^{4,2}_{x,t}(\Omega)\cap C^{2,2}_{x,t}(\Omega\cup\Gamma\cup\bar D_0),$$

є розв"язком задачі /1/ – /3/. Позначимо через $\tilde C^2(\bar D)$ множину функцій $v(x)\in C^2(\bar D)$, що задовольняють умову $v\big|_{\partial D}=0$. Нехай $\tilde H^2(D)$ замикання $\tilde C^2(\bar D)$ у просторі $H^2(D)$ [1]. Тоді для довільної функції $v(x)\in \tilde H^2(D)$ справедлива тотожність

$$\int_D \Big[\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j} - b(x)\nabla u\,\nabla v + c(x)uv + u_{tt}v - fv\Big]dx \equiv 0. \qquad /4/$$

Розглянемо тепер функцію $u(x,t)$ як функцію, визначену на J зі значеннями в деякому гільбертовому просторі H. Позначимо через

$C^k(J; H^l(D))$ множину k раз неперервно диференційованих на J функцій зі значеннями у гільбертовому просторі $H^l(D)$, а через B усі функції $u(x,t)$, які належать множині

$$C^2(J; L^2(D)) \cap C^1(J; \tilde{H}^2(D)).$$

Означення I. Функцію $u \in B$ називаємо узагальненим по просторових змінних розв"язком задачі /I/ – /3/ в області Ω, якщо вона задовольняє тотожність /4/ для будь-якої функції $v(x) \in \tilde{H}^2(D)$.

Отже, класичний розв"язок задачі /I/ – /3/ буде і узагальненим по просторових змінних розв"язком цієї задачі. Навпаки, якщо $u(x,t) \in Y$ узагальнений по просторових змінних розв"язок задачі /I/ – /3/, то аналогічно, як і в праці [I], можна показати, що $u(x,t)$ класичний розв"язок цієї задачі.

Введемо на множині B метрику за формулою

$$\rho(u,v) = \left\{ \int_D \left[\sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 (u-v)}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial (u-v)}{\partial x_i} \right)^2 + (u-v)^2 + \left(\frac{\partial (u-v)}{\partial t} \right)^2 \right] dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

і припустимо, що $u \equiv 0$ – розв"язок рівняння /I/.

Означення 2. Нульовий розв"язок $u \equiv 0$ задачі /I/ – /3/ називається стійким за Ляпуновим на множині B відносно метрики ρ, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що при виконанні нерівності $\rho(u,0)\big|_{t=0} < \delta$ нерівність $\rho(u,0) < \varepsilon$ справедлива для всіх $t > 0$.

Теорема. Нехай $f(x,t,u,u_t) = p_0(t) f_0(x,u) + p_1(t) f_1(x,u_t)$. Якщо виконуються умови: I/ функція $p_0(t)$ диференційована, $p_0(t) \le 0$, $p_0'(t) \ge 0$, $t \in J$; $\sup_{t \in J} |p_0(t)| < +\infty$; 2/ функція $p_1(t)$ неперервна і $p_1(t) \le 0$, $t \in J$; 3/ функції $x \to f_i(x,\xi)$ вимірні для всіх $\xi \in R^1$; $i = 0,1$; 4/ функції $\xi \to f_i(x,\xi)$ неперервні майже для всіх $x \in D$, $i = 0,1$; 5/ справедлива оцінка $|f_i(x,\xi)| \le K|\xi|$ майже для всіх $x \in D$ і для всіх $\xi \in R^1$, $i = 0,1$; 6/ $f_i(x,\xi)\,\xi \ge 0$ для всіх $\xi \in R^1$, $i = 0,1$; 7/ $b(x), c(x) \in C(\bar{D})$, $b(x) \le b_0$, $b_0 \ge 0$, $c(x) \ge -c_0$, $c_0 \ge 0$,

$$\frac{n\pi^2}{3} - b_0 > 0, \quad \frac{n^2\pi^4}{3} - c_0 > 0,$$

то нульовий розв"язок задачі /I/ – /3/ стійкий за Ляпуновим на множині B відносно метрики ρ.

Доведення: Розглянемо на множині B функціонал

$$V(u) = \int_D \Big[\sum_{i,j=1}^{n} \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \Big)^2 - b(x) \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i} \Big)^2 + c(x) u^2 +$$

$$+ u_t^2 - 2\rho_0(t) \int_0^u f_0(x, \xi)\, d\xi \Big]\, dx.$$

Перш за все зазначимо, що, завдяки умовам /3/ – 5/, теореми функції $f_0(x,u), f_1(x,u_t) \in L^2(D)$ для будь-якої $u(x,t) \in B$ при кожному $t \in J$. З умови 6/ випливає нерівність

$$\int_0^u f_0(x, \xi)\, d\xi \geq 0 \qquad /5/$$

майже для всіх $x \in D$ і для всіх $t \in J$. Крім того,

$$\Big| \int_0^u f_0(x, \xi)\, d\xi \Big| \leq K_1 u^2. \qquad /6/$$

Для функцій $u(x,t) \in B$ легко довести нерівності

$$\int_D u_{x_i x_j}^2 (x,t)\, dx \geq \pi^2 \int_D u_{x_i}^2 (x,t)\, dx, \qquad /7/$$
$$i,j = 1, \dots, n,$$

$$\int_D u_{x_i}^2 (x,t)\, dx \geq \pi^2 \int_D u^2 (x,t)\, dx \qquad /8/$$
$$i = 1, \dots, n,$$

справедливі при $t \in J$.

Враховуючи умови I/, 7/ теореми та нерівності /5/, /7/, /8/, одержуємо нерівність

$$V(u) \geq \gamma_0 \rho^2 (u, 0), \qquad /9/$$

де $\gamma_0 = \min \Big\{ \frac{1}{3};\ \frac{n\pi^2}{3} - b_0;\ \frac{n^2\pi^4}{3} - c_0 \Big\}$.

На основі умов I/, 7/ і нерівності /6/ записуємо нерівність

$$V(u) \leq \gamma_1 \rho^2 (u, 0), \qquad /10/$$

де $\gamma_1 = \max \Big\{ 1;\ \max_{x \in \bar{D}} |b(x)|;\ 2K_1 \sup_{t \in J} |\rho_0(t)| + \max_{x \in \bar{D}} |c(x)| \Big\}$.

Обчислимо тепер dV/dt уздовж довільного узагальненого за просторовими змінними розв"язку задачі /I/ - /3/. Маємо

$$\frac{dV}{dt}=2\int_D\Big[\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial^2 u_t}{\partial x_i\partial x_j}-b(x)\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u_t}{\partial x_i}+c(x)uu_t+$$
$$+u_{tt}\,u_t-p_0(t)f_0(x,u)u_t\Big]dx-2p_0'(t)\int_D\Big[\int_0 f_0(x,\xi)d\xi\Big]dx.$$

Враховуючи, що $u(x,t)$ задовольняє /4/ для довільної $V(x)\in\tilde{H}^2(D)$ маємо

$$\frac{\partial V}{\partial t}=-2p_0'(t)\int_D\Big[\int_0^u f_0(x,\xi)d\xi\Big]dx+2p_1(t)\int_D f_1(x,u_t)u_t\,dx,$$

прийнявши $V=u_t$.

На основі умов 2/, 6/, і нерівності 5/ одержуємо нерівність

$$\frac{dV(u)}{dt}\le 0$$

для довільного узагальненого за просторовими змінними розв"язку задачі /I/ - /3/. Таким чином, функціонал $V(u)$ задовольняє всі умови теореми стійкості, сформульованої у праці [4], звідки і випливає стійкість за Ляпуновим нульового розв"язку задачі /I/ - /3/.

<u>Зауваження.</u> Якщо виконуються умови теореми та $\varphi\in H^2(\tilde{D})$, $\psi\in L^2(D)$, то для довільного узагальненого за просторовими змінними розв"язку $u(x,t)$ задачі /I/ - /3/

$$\sup_{t\in J}\left(\|u\|_{H^2(D)}+\|u_t\|_{L^2(D)}\right)<\infty.$$

<u>Список літератури</u>: I. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. - М.: Наука, I976. 2. Мовчан А.А. О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем. - Прикладная математика и механика, I959, т.23. 3. Мовчан А.А. Обоснование некоторых критериев устойчивости равновесия пластин. - Инженерный журнал, I979, вып. 4. 4. Plaut R.H. Asymptotic Stability and Instability Criteria for some Elastic Systems by Liapunov's Direct Method.- Q. Appl. Math, 1972, 29, N4.

Стаття надійшла в редколегію I2.02.8I