УДК 517.946

Г.М.Березовська, О.Я.Ковалів, Г.П.Лопушанська

ЗОВНІШНЯ УЗАГАЛЬНЕНА ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ $(\Delta^2 - K^4)u = 0$

Одержимо теореми про представлення єдиного розв"язку зовнішньої задачі Діріхле для рівняння

$$(\Delta^2 - K^4)u = 0 \qquad /1/$$

$(K \geq 0)$, коли на границі області задані уз гальнені функції. Розв"язок задачі розуміємо в сенсі праці [1]. Використовуємо той самий метод, що й для узагальнених граничних задач для еліптичних рівнянь і систем 2-го порядку. Іншим методом отримано розв"язок задачі Діріхле для бігармонійного рівняння всередині круга з заданою на границі узагальненою функцією у праці [2].

Нехай Ω - область в R^3, розташована зовні нескінченно диференційованої замкненої поверхні S; S_ε - паралельна до S поверхня, віддалена від неї на $\varepsilon > 0$, $S_\varepsilon \subset \Omega$; $D(S)$ - простір нескінченно диференційованих на S /основних/ функцій; $D'(S)$ - простір лінійних неперервних функціоналів над $D(S)$ /простір узагальнених функцій/; (φ, F) - дія узагальненої функції $F \in D'(S)$ на основну функцію $\varphi \in D(S)$. Вважаємо, що $\varphi(x_\varepsilon) = \varphi(y)$, коли $x_\varepsilon \in S_\varepsilon, y \in S, x_\varepsilon = y + \varepsilon\nu(y)$, $\nu(y)$ - орт зовнішньої нормалі $n(y)$ до S у точці y.

<u>Постановка задачі</u>. Нехай F_1, $F_2 \in D'(S)$. Знайти в області Ω розв"язок $u(x)$ рівняння /1/, що задовольняє граничні умови

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) u(x_\varepsilon) dS_\varepsilon = (\varphi, F_1),$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) \frac{\partial u(x_\varepsilon)}{\partial n_{x_\varepsilon}} dS_\varepsilon = (\varphi, F_2) \quad \forall \varphi \in D(S) \qquad /2/$$

і умови на безмежності

$$\int_{|x|>R>0} |u_1|^2 dx < \infty, \quad \int_{|x|>R>0} \left|\left(\frac{\partial}{\partial |x|} - ik\right) u_2\right|^2 dx < \infty, \qquad /3/$$

де $u_1 = (\Delta + k^2)u, \quad u_2 = (\Delta - k^2)u; \quad k > 0,$

або

$$D^p u(x) = O(|x|^{-p}); \ \forall p: |p| \le 3; \quad k = 0. \qquad /4/$$

Граничні умови /2/ еквівалентні одній умові

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \left[\varphi_1(x_\varepsilon) u(x_\varepsilon) + \varphi_2(x_\varepsilon) \frac{\partial u(x_\varepsilon)}{\partial n_{x_\varepsilon}}\right] dS_\varepsilon = (\varphi_1, F_1) + (\varphi_2, F_2), \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in D(S) \qquad /5/$$

або

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) U(x_\varepsilon) dS_\varepsilon = \langle \varphi, F \rangle \qquad /5/$$

для кожної основної вектор-функції $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in [D(S)]^2$ і заданої узагальненої вектор-функції $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \in [D'(S)]^2$. Тут $U(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n_x} \end{pmatrix}$, $\langle \varphi, F \rangle = (\varphi_1, F_1) + (\varphi_2, F_2)$.

Мають місце такі леми.

Лема 1. Оператори $(A\varphi)(x) = \int_S \varphi(x) \omega(x,y) dS_x$, де $\omega(x,y)$ – будь-яка з функцій $\frac{e^{\alpha k|x-y|}}{|x-y|}, \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{e^{\alpha k|x-y|}}{|x-y|}, \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{e^{\alpha k|x-y|}}{|x-y|}, \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{e^{\alpha k|x-y|}}{|x-y|}$ / $\alpha = -1, \pm i$ /, діють у просторі $D(S)$.

Лема 2. Рівномірно відносно $y \in S$ для довільної $\varphi \in D(S)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{e^{\alpha k|x_\varepsilon - y|}}{|x_\varepsilon - y|} dS_\varepsilon = 2\pi \varphi(y) + \int_S \varphi(x) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{e^{\alpha k|x-y|}}{|x-y|} dS,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) \frac{e^{\alpha k|x_\varepsilon - y|}}{|x_\varepsilon - y|} dS_\varepsilon = \int_S \varphi(x) \frac{e^{\alpha k|x-y|}}{|x-y|} dS,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) \frac{\partial}{\partial n_{x_\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{e^{\alpha k|x_\varepsilon - y|}}{|x_\varepsilon - y|} dS_\varepsilon = \left(\int_S \varphi(x) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{e^{\alpha k|x-y|}}{|x-y|} dS\right)_S,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\varphi(x_\varepsilon)\frac{\partial}{\partial n_{x_\varepsilon}}\frac{e^{\alpha k|x_\varepsilon-y|}}{|x_\varepsilon-y|}dS_\varepsilon=-2\pi\varphi(y)+\int_S\varphi(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{e^{\alpha k|x-y|}}{|x-y|}dS,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\varphi(x_\varepsilon)\frac{\partial}{\partial n_y}|x_\varepsilon-y|dS_\varepsilon=\int_S\varphi(x)\frac{\partial}{\partial n_y}|x-y|dS,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\varphi(x_\varepsilon)\frac{\partial}{\partial n_{x_\varepsilon}}\frac{\partial}{\partial n_y}|x_\varepsilon-y|dS_\varepsilon=\int_S\varphi(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{\partial}{\partial n_y}|x-y|dS,$$

коли $\alpha=\pm i,-1,0,\ \ k>0$.

Теорема I. Нехай $k>0$, узагальнена вектор-функція $A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}$ визначається з умови

$$\langle g,A\rangle=\langle\varphi_g,F\rangle, \qquad /6/$$

де $g=(g_1,g_2)$ – довільна основна вектор-функція; $\varphi_g=(\varphi_{g1},\varphi_{g2})$ – розв"язок системи інтегральних рівнянь

$$\varphi_1(y)+i\varphi_2(y)+\frac{1}{2\pi}\int_S\varphi_1(x)\left(\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|}-i\frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|}\right)dS_x-$$

$$-\frac{i}{2\pi}\int_S\varphi_2(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|}dS_x+\frac{1}{2\pi}\left(\int_S\varphi_2(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|}dS_x\right)_S=g_1(y), \qquad /7/$$

$$\varphi_2(y)-\frac{1}{2\pi}\int_S\varphi_1(x)\frac{e^{-k|x-y|}}{|x-y|}dS_x-\frac{1}{2\pi}\int_S\varphi_2(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{e^{-k|x-y|}}{|x-y|}dS_x=g_2(y).$$

Тоді функція

$$u(x)=\frac{1}{2\pi}\left\langle\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|}-i\frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|},A_1\right\rangle-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\left\langle\frac{e^{-k|x-y|}}{|x-y|},A_2\right\rangle \qquad x\in\Omega \qquad /8/$$

єдиний розв"язок поставленої задачі для рівняння /I/.

Теорема 2. Нехай узагальнена вектор-функція $B=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}$ визначається з умови

$$\langle g,B\rangle=\langle\varphi_g,F\rangle, \qquad /9/$$

де g – довільна основна вектор-функція; φ_g – розв"язок системи інтегральних рівнянь

$$\varphi_1(y)+\frac{1}{2\pi}\int_S \varphi_1(x)\left(\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}+\frac{\partial}{\partial n_y}|x-y|+1\right)dS_x+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_S \varphi_2(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{1}{|x-y|}+|x-y|\right)dS_x=g_1(y) \qquad /10/$$
$$\varphi_2(y)-\frac{1}{2\pi}\int_S \varphi_1(x)\frac{1}{|x-y|}dS_x-\frac{1}{2\pi}\int_S \varphi_2(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{|x-y|}dS_x=g_2(y).$$

Тоді функція

$$u(x)=\frac{1}{2\pi}\left\langle\frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{1}{|x-y|}+|x-y|\right)+1,\ B_1\right\rangle-\frac{1}{2\pi}\left\langle\frac{1}{|x-y|},\ B_2\right\rangle,\ x\in\Omega\ -$$

єдиний розв"язок зовнішньої узагальненої задачі Діріхле для рівняння /I/ при $K=0$.

Системи інтегральних рівнянь /7/ і /10/ є спряженими до відповідних систем інтегральних рівнянь [3], а тому з праці [3] і леми I випливає, що вони однозначно розв"язані у просторі $D(S)$. Отже, рівностями /6/ і /9/ узагальнені вектор-функції A і B визначаються однозначно. Теореми доводяться безпосередньою перевіркою на основі леми I [I], лем I, 2 і відомих властивостей функцій $\frac{e^{\alpha K|x-y|}}{|x-y|}$ $/\alpha=\pm i,-1$ / [3].

Список літератури: I. Гупало Г.С. Про узагальнену задачу Діріхле. – Доп. АН УРСР, 1966, № 7. 2. Данко С.П. Некоторые краевые задачи для аналитических и бианалитических функций в пространстве обобщенных функций. – Изв. АН Аз.ССР, сер. физ.-тех. и мат. наук, 1971, № 5-6. 3. Wolfrahm wickel. Zur Theorie der Dirichletschen Randwertaufgabe zum Operator Δ^2-K^4 im Innen- und Außenraum mit der Integralgleichungs-methode.–Bonn. Math. Schr. 1973, N68.

Стаття надійшла в редколегію 11.03.81.