УДК 517.946

Й.Г.Шипка

ВЛАСТИВОСТІ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РОЗВ"ЯЗКУ МЕТАГАРМОНІЙНОГО РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ В РІМАНОВОМУ ПРОСТОРІ

Фундаментальним розв"язком метагармонійного рівняння

$$A[u] = (\Delta - \lambda_1^2)(\Delta - \lambda_2^2)u = 0, \ \lambda_i = const, \ (i = 1,2) \qquad /1/$$

у рімановому просторі $\mathcal{R}$ з лінією галуження γ називається функція $K(P,Q)$, яка має такі властивості.

1. $K(P,Q)$ визначена у всьому просторі $\mathcal{R}$, включаючи лінію галуження γ і точку $P=Q$, в околі якої вона зображується у вигляді

$$K(P,Q) = \omega(P,Q) + \tilde{\omega}(P,Q), \qquad /2/$$

де $\omega(P,Q)$ – класичний фундаментальний розв"язок рівняння /1/; $\tilde{\omega}(P,Q)$ – регулярний розв"язок цього рівняння.

2. Як функція точки P вона є розв"язком рівняння /1/ всюди в $\mathcal{R}$ за винятком точки $P=Q$ і лінії галуження γ, причому її треті похідні при наближенні до лінії галуження ростуть не швидше, ніж $R_0^{-\alpha}$, де $0 \leq \alpha < 1$, R_0 – відстань точки P від лінії галуження γ.

3. Функція $K(P,Q)$ експоненціально спадає на нескінченності в кожному листку $\mathcal{R}_j$ $(j=1,\dots,n)$ рімановото простору $\mathcal{R}$.

У праці [2] доведено існування такого розв"язку і для прикладу побудовано фундаментальний розв"язок рівняння /1/ у дволистковому рімановому просторі з прямолінійною лінією галуження.

Доведем деякі властивості фундаментального розв"язку рівняння /1/ в n – листковому рімановому просторі $\mathcal{R}$.

Властивість 1. Фундаментальний розв"язок рівняння /1/–симетрична функція

$$K(P,Q) = K(Q,P), \quad P \in \gamma, \ Q \in \gamma. \qquad /3/$$

Доведення. Якщо D - область з границею S, $u, v \in C^4(D) \cup C^3(\bar{D})$, то справедлива формула

$$\iiint\limits_D (uA[v] - vA[u])d\tau = \iint\limits_S \Big[u\frac{\partial \Delta v}{\partial n} - v\frac{\partial \Delta u}{\partial n} +$$

$$+\Delta u\frac{\partial v}{\partial n} - \Delta v\frac{\partial u}{\partial n} - (\lambda_1^2+\lambda_2^2)\Big(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\Big)\Big]dS. \qquad /4/$$

Щоб скористатись формулою /4/, побудуємо область D наступним чином. На лінію галуження γ натягнемо достатньо гладку поверхню σ і розріжемо R вздовж цієї поверхні. Одержимо n екземплярів евклідових областей R_j $(j=1,\dots,n)$. Побудуємо навколо лінії галуження трубчасту поверхню T_ε як огинаючу сфер радіуса ε з центрами на лінії галуження. У кожному листі R_j проведемо сферу S_R настільки великого радіуса R, щоб трубчаста поверхня знаходилася всередині цієї сфери. Позначимо через D_j область, межею якої є сфера S_R, трубчаста поверхня T_ε і частина поверхні σ, яка лежить зовні T_ε, а через D - сукупність усіх областей D_j $(j=1,\dots,n)$. Нехай N_1 і N_2 - довільні точки простору R, що не лежать на лінії галуження, K_1, K_2 - кулі радіуса ε з центрами в точках N_1 і N_2, обмежені сферами Σ_1 і Σ_2. До області D $(K_1 \cup K_2)$ і функцій $u=K(N_1,Q)$, $v=K(N_2,Q)$ застосовуємо формулу /4/. За умовою 2 означення фундаментального розв"язку рівняння /I/ інтеграл у формулі /4/ по області $D\setminus(K_1\cup K_2)$ дорівнює нулеві. Перейдем до границі при $R\to\infty$, $\varepsilon\to 0$. Інтеграл по сфері S_R прямує до нуля за умовою 3. Інтеграл по T_ε також прямує до нуля. Це легко довести, якщо в цьому інтегралі перейти до координат (ρ,φ), де ρ - довжина дуги лінії γ, обчислювана від деякої фіксованої точки, а φ - кут, що змінюється від нуля до 2π, і врахувати поведінку функції $K(P,Q)$ та її похідних в околі лінії галуження. З умови I випливає рівність

$$\iint\limits_{\sigma^+} F(N_1,N_2,Q)\,d_Q S = \iint\limits_{\sigma^-} F(N_1,N_2,Q)\,d_Q S,$$

де

$$F(N_1,N_2,Q)=K(N_1,Q)\frac{\partial\Delta K(N_2,Q)}{\partial n}-K(N_2,Q)\frac{\partial\Delta K(N_1,Q)}{\partial n}+$$
$$+\Delta K(N_1,Q)\frac{\partial K(N_2,Q)}{\partial n}-\Delta K(N_2,Q)\frac{\partial K(N_1,Q)}{\partial n}-$$
$$-(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\left[K(N_1,Q)\frac{\partial K(N_2,Q)}{\partial n}-K(N_2,Q)\frac{\partial K(N_1,Q)}{\partial n}\right],$$

σ^+ і σ^- – сторони поверхні σ, що відповідають додатному та від"ємному напрямку нормалі до поверхні σ. Одержуємо

$$\lim_{\varepsilon\to\infty}\iint_{\Sigma_1\cup\Sigma_2}F(N_1,N_2,Q)\,d_QS=0.$$

Використавши зображення функції $K(P,Q)$ в околі точки $P=Q$, яке дається умовою I, дістанемо

$$-K(N_1,N_2)\frac{\lambda_2^3-\lambda_1^3}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}+K(N_2,N_1)\frac{\lambda_2^3-\lambda_1^3}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}=0,$$

або $K(N_1,N_2)=K(N_2,N_1)$, що і доводить /3/.

Властивість 2. Нехай $\omega(P,Q)$ – класичний фундаментальний розв"язок рівняння /I/, P_i – різні точки n – листкового простору $R,(i=1,\dots,n)$, які мають своїм прообразом одну і ту ж точку евклідового простору E^3. Тоді справедлива формула

$$\sum_{i=1}^{n}K(P_i,Q)=\omega(P,Q). \qquad /5/$$

Доведення. Оскільки класичний фундаментальний розв"язок $\omega(P,Q)$ однозначний у просторі E^3, то в n – листковому рімановому просторі R він n – значний, оскільки всі його вітки на n листках простору R рівні між собою. Тому він має n особливостей у точках $P_i\in R_i$, $(i=1,\dots,n)$, що збігаються з особливостями $K(P,Q)$. Звідси випливає, що

$$u=\omega(P,Q)-\sum_{i=1}^{n}K(P_i,Q)$$

обмежена в R функція і за узагальненою теоремою Ліувілля вона тотожно дорівнює нулеві. А це доводить рівність /5/.

Властивість 3. В околі лінії галуження фундаментальний розв"язок рівняння /I/ $K(P,Q)$ може поводити себе як $R_0^{\frac{k}{n}}$, де k набуває значення $2n+1,\ 2n+2,\dots$

Доведення. Нехай точка Q – фіксована точка простору R зовні γ, точка P прямує до точки $P_0 \in \gamma$. Можемо припустити, що точка P знаходиться всередині циліндричного околу точки P_0, який внаслідок гладкості γ можемо вважати циліндром досить малих розмірів. Приймаємо, що точка Q знаходиться зовні цього циліндра. Скористаємося локальним зображенням розв"язку U_i рівняння

$$\Delta u - \lambda_i^2 u = 0, \ (i=1,2),$$

у циліндрі U_0

$$U_i(P,Q) = \sum_{k,m} Z_m(\mu_m z) I_{\frac{k}{n}}\left(\rho\sqrt{\lambda_i^2+\mu_m^2}\right)\left(a_{km}(Q)\cos\frac{k}{n}\varphi + b_{km}(Q)\sin\frac{k}{n}\varphi\right),$$

де (ρ, φ_0, z) – циліндричні координати.

Функцію $\tilde{\omega}(P,Q)$ з формули /2/, згідно статті [I], можна зобразити у циліндрі U_0 як

$$\tilde{\omega}(P,Q) = u_1(P,Q) + u_2(P,Q).$$

У цьому випадку $\rho = R_0$, отже, функція $\tilde{\omega}(P,Q)$ поводить себе в околі лінії галуження аналогічно, як і модифікована функція Бесселя $I_{\frac{k}{n}}(\rho)$, тобто $\rho^{\frac{k}{n}}$, де k – довільне натуральне число. За умовою 2, коли $\alpha > 0$, то $k = 2n+1, 2n+2, \dots$

Зокрема, якщо $n=2$, то $\alpha = \frac{1}{2}$. Таке значення й отримане при побудові фундаментального розв"язку рівняння /I/ у дволистковому рімановому просторі з прямолінійною лінією галуження [2].

Список літератури: I. В е к у а И.В. О метагармонических функциях. – Тр. Тбил. матем. ин-та, 1943, т.I2. 2. М а р т ы н е н к о М.Д., Ш и п к а И.Г. Фундаментальные решения метагармонических уравнений в конечнолистном римановом пространстве. – Изв. АН БССР, сер. физ.-мат. наук, 1979, № 3.

Стаття надійшла в редколегію I0.02.8I