УДК 517.944

В.Г.Костенко, М.Д.Коркуна

ЗВЕДЕННЯ ОДНІЄЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДО СИСТЕМИ РЕГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У позначеннях праці [1] при $A=0$ розглянемо крайову задачу про знаходження розв"язку системи рівнянь

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)v \equiv \sum_{k,\ell=1}^{2} A_{k\ell}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_\ell} = 0 \qquad /1/$$

в області $H \setminus D$, який би в точках $y(y_1, y_2)$ її границі $\mathcal{T}$ задовольняв умову

$$\lim_{x \to y \in \mathcal{T}} B\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right)v = \lim_{x \to y \in \mathcal{T}} \sum_{k=1}^{2} B_k(y_1, y_2)\frac{\partial v}{\partial x_k} = \psi(y_1, y_2). \qquad /2/$$

Розв"язок цієї задачі шукаємо у вигляді [2].

$$v(x) = \int_{\mathcal{T}} J_0(x-z, \nu(z))\,\mu(z)\,d_z\mathcal{T}, \qquad /3/$$

де $\mu(z) = \begin{pmatrix}\mu_1(z)\\ \mu_2(z)\end{pmatrix}$ – стовпець невідомих неперервних функцій;

$$J_0(x-z,\nu(z)) = \int_{Z^+} \Phi(x-z, \beta\nu(z)+\tau)\,A^{-1}(\beta\nu(z)+\tau)(E, \beta E)\,R(\tau,\nu(z))\Big|_{\tau=(1,0)} d\beta +$$

$$+ \int_{Z^+} \Phi(x-z, \beta\nu(z)+\tau)\,A^{-1}(\beta\nu(z)+\tau)(E, \beta E)\,R(\tau,\nu(z))\Big|_{\tau=(-1,0)} d\beta \qquad /4/$$

$$\Phi(x-z, \beta\nu(z)+\tau) = -\frac{1}{4\pi i}\,\lg\left[-\frac{(x-z, \beta\nu(z)+\tau)^2}{(\beta\nu_1(z)+\tau)^2}\right].$$

Інтегрування в /4/ ведемо за додатно орієнтованим контуром Z^+, який лежить у верхній β – комплексній півплощині та охоплює всі комплексні корені рівняння $\det(\beta\nu(z)+\tau)=0$ при довільних дійсних $\tau(\tau_1, \tau_2) \neq 0$; $\nu(z)$ – внутрішня нормаль до $\mathcal{T}$ у точці $z(z_1, z_2)$, $(\nu(z), \tau) = 0$, $(\tau, \tau) = 1$.

Для довільної точки $x(x_1,x_2)\in H\setminus D$ і $y^0(y_1^0,y_2^0)\in\mathcal{T}$ маємо

$$B\left(y^0,\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x)=\int_{\mathcal{T}}B\left(y^0,\frac{\partial}{\partial x}\right)J_0(x-z,\nu(z))\mu(z)d_z\mathcal{T}=$$
$$=\int_{\mathcal{T}}J_1(x-z,\nu(z),y^0)\mu(z)d_z\mathcal{T}, \qquad /5/$$

де

$$J_1(x-z,\nu(z),y^0)=\int_{Z^+}\Phi'(x-z,\beta\nu(z)+\tau)B(y^0,\beta\nu(z)+\tau)A^{-1}(\beta\nu(z)+\tau)\times$$
$$\times(E,\beta E)R(\tau,\nu(z))\Big|_{\tau=(1,0)}d\beta+\int_{Z^+}\Phi'(x-z,\beta\nu(z)+\tau)B(y^0,\beta\nu(z)+\tau)\times \qquad /6/$$
$$\times A^{-1}(\beta\nu(z)+\tau)(E,\beta E)R(\tau,\nu(z))\Big|_{\tau=(-1,0)}d\beta;$$

$\Phi'(x-z,\beta\nu(z)+\tau)$ – похідна функції $\Phi(x-z,\beta\nu(z)+\tau)$ за скалярним добутком $(x-z,\beta\nu(z)+\tau)$.

Якщо виконується умова Лопатинського [2]

$$\operatorname{rang}\int_{Z^+}B(y^0,\beta\nu(y^0)+\tau)A^{-1}(\beta\nu(y^0)+\tau)(E,\beta E)d\beta=2 \qquad /7/$$

для довільної точки $y^0\in\mathcal{T}$, довільного дійсного вектора $\tau(\tau_1,\tau_2)\neq 0$ і такого, що $(\tau,\nu(y^0))=0$, то для кожної точки y^0 з рівняння

$$\int_{Z^+}B(y^0,\beta\nu(z)+\tau)A^{-1}(\beta\nu(z)+\tau)(E,\beta E)d\beta\, R(\tau,\nu(z),y^0)=E \qquad /8/$$

можна знайти $R(\tau,\nu(z),y^0)$. При цьому вважаємо $(\tau,\nu(z))=0$ і $|\nu(z)-\nu(y^0)|$ достатньо малим.

Перевірка показує, що для задачі /1/, /2/ умова /7/ виконується у спрощеному вигляді

$$\det\int_{Z^+}B(y^0,\beta\nu(y^0)+\tau)A^{-1}(\beta\nu(y^0)+\tau)d\beta\neq 0 \qquad /7_1/$$

для довільної точки $y^0\in\mathcal{T}$ і довільного дійсного $\tau\neq 0$, $(\tau,\nu(y^0))=0$, тому в формулах /4/ – /8/ замість прямокутного матричного множника $(E,\beta E)$ можна взяти лише матрицю E.

Тоді з відповідного рівняння /8/

$$\int_{Z^+} B(y^\circ, \beta\nu(z)+\tau) A^{-1}(\beta\nu(z)+\tau)\, d\beta\, R(\tau, \nu(z), y^\circ) = E \qquad /8_I/$$

знаходимо

$$R(\tau, \nu(z), y^\circ) = \frac{4i}{\pi(\nu+1)(\nu-3)} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix},$$

де

$$R_{11} = 2\nu_1(z) - i(\nu-1)\nu_2(z); \quad R_{12} = 2\nu_2(z) + i(\nu-1)\nu_1(z);$$

$$R_{21} = 2\left[(\nu+1)\sin\gamma\cos\gamma\, \nu_1(z) + (\cos^2\gamma - \nu\sin^2\gamma)\nu_2(z)\right] +$$

$$+ i\left[2(\nu+1)\sin\gamma\cos\gamma\, \nu_2(z) - ((\nu+3)\cos^2\gamma + (1-\nu)\sin^2\gamma)\nu_1(z)\right];$$

$$R_{22} = 2\left[(\nu\cos^2\gamma - \sin^2\gamma)\nu_1(z) - (\nu+1)\sin\gamma\cos\gamma\, \nu_2(z)\right] +$$

$$+ i\left[((\nu-1)\cos^2\gamma - (\nu+3)\sin^2\gamma)\nu_2(z) + 2(\nu+1)\sin\gamma\cos\gamma\, \nu_1(z)\right];$$

γ – кут між дотичною в точці $y^\circ(y_1^\circ, y_2^\circ)$ до $\mathcal{T}$ з віссю Ox_1.

Легко переконатись тепер, що при $y^\circ = z$

$$R(\tau, \nu(z) z) = \frac{4i}{\pi(\nu+1)(\nu-3)} \begin{pmatrix} 2\nu_1(z) - i(\nu-1)\nu_2(z) & 2\nu_2(z) + i(\nu-1)\nu_1(z) \\ 2\nu_2(z) + i(\nu-1)\nu_1(z) & -2\nu_1(z) + i(\nu-1)\nu_2(z) \end{pmatrix}; \qquad /9/$$

Підставляючи /9/ в /4/, знаходимо остаточний вигляд ядра інтеграла /3/

$$\mathcal{J}_0(x-z, \nu(z)) = \frac{1}{\pi\nu_2(z)(\nu+1)} \begin{pmatrix} \mathcal{J}_0^{(11)}(x-z, \nu(z)) & \mathcal{J}_0^{(12)}(x-z, \nu(z)) \\ \mathcal{J}_0^{(21)}(x-z, \nu(z)) & \mathcal{J}_0^{(22)}(x-z, \nu(z)) \end{pmatrix},$$

де

$$\mathcal{J}_0^{(11)}(x-z, \nu(z)) = 2\nu_1(z)\lg r(x,z) - (\nu-1)\nu_2(z)\,\mathrm{arctg}\frac{x_1-z_1}{x_2-z_2} + \frac{(\nu+1)(x_2-z_2)\left[(x_2-z_2)\nu_1(z) - (x_1-z_1)\nu_2(z)\right]}{r^2(x,z)},$$

$$\mathcal{J}_0^{(12)}(x-z, \nu(z)) = 2\nu_2(z)\lg r(x,z) + (\nu-1)\nu_1(z)\,\mathrm{arctg}\frac{x_1-z_1}{x_2-z_2} + \frac{(\nu+1)(x_2-z_2)\left[(x_1-z_1)\nu_1(z) + (x_2-z_2)\nu_2(z)\right]}{r^2(x,z)},$$

$$\mathcal{J}_0^{(21)}(x-z,\nu(z))=2\nu_2(z)\lg r(x,z)+(\nu-1)\nu_1(z)\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_1-z_1}{x_2-z_2}-\frac{(\nu+1)(x_2-z_2)\left[(x_1-z_1)\nu_1(z)+(x_2-z_2)\nu_2(z)\right]}{r^2(x,z)};$$

$$\mathcal{J}_0^{(22)}(x-z,\nu(z))=-2\nu_1(z)\lg r(x,z)+(\nu-1)\nu_2(z)\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_1-z_1}{x_2-z_2}+\frac{(\nu+1)(x_2-z_2)\left[(x_2-z_2)\nu_1(z)-(x_1-z_1)\nu_2(z)\right]}{r^2(x,z)};$$

Якщо в /6/ y^0 ототожнити з z і підставити туди $R(\tau,\nu(z),z)$ з /9/, одержуємо можливість застосувати формулу "стрибка" [2] при $x \to y \in \mathcal{T}$ і одночасно задовольнити умову /2/, що й приводить до системи регулярних інтегральних рівнянь

$$\mu(y)+\int_{\mathcal{T}}\mathcal{J}_1(y-z,\nu(z),z)\,\mu(z)\,d_z\mathcal{T}=\Psi(y).$$

Обчислення формули /6/ за правилом лишків при цьому дає

$$\mathcal{J}_1(y-z,\nu(z),z)=\frac{2}{\pi\nu_2(z)}\begin{pmatrix}\mathcal{J}_1^{(11)}(y-z,\nu(z),z) & \mathcal{J}_1^{(12)}(y-z,\nu(z),z)\\ \mathcal{J}_1^{(21)}(y-z,\nu(z),z) & \mathcal{J}_1^{(22)}(y-z,\nu(z),z)\end{pmatrix},$$

де

$$\mathcal{J}_1^{(11)}(y-z,\nu(z),z)=\frac{\left[(y_1-z_1)\sin\gamma+(y_2-z_2)\cos\gamma\right]^2(y-z,\nu(z))}{r^4(y,z)};$$

$$\mathcal{J}_1^{(12)}(y-z,\nu(z),z)=\frac{\left[(y_1-z_1)\sin\gamma+(y_2-z_2)\cos\gamma\right]^2\left[(y_1-z_1)\nu_2(z)-(y_2-z_2)\nu_1(z)\right]}{r^4(y,z)};$$

$$\mathcal{J}_1^{(21)}(y-z,\nu(z),z)=\frac{\left[\left[(y_1-z_1)^2-(y_2-z_2)^2\right]\sin\gamma\cos\gamma+(y_1-z_1)(y_2-z_2)(\cos^2\gamma-\sin^2\gamma)\right](y-z,\nu(z))}{r^4(y,z)};$$

$$\mathcal{J}_1^{(22)}(y-z,\nu(z),z)=\frac{\left[\left[(y_1-z_1)^2-(y_2-z_2)^2\right]\sin\gamma\cos\gamma-(y_1-z_1)(y_2-z_2)(\sin^2\gamma-\cos^2\gamma)\right]\left[(y_1-z_1)\nu_2(z)-(y_2-z_2)\nu_1(z)\right]}{r^4(y,z)};$$

γ – кут між дотичною в точці $y(y_1,y_2)$ до $\mathcal{T}$ з віссю Ox_1. Зауважимо, що $\sin\gamma=-\cos(\nu(y),x_1)=-\nu_1(y)$, $\cos\gamma=-\cos(\nu(y),x_2)=-\nu_2(y)$ / $\nu(y)$ – внутрішня нормаль у точці $y\in\mathcal{T}$ /.

Список літератури: 1. Костенко В.Г., Коркуна М.Д. Фундаментальна матриця розв"язків однієї лінійної еліптичної системи рівнянь у частинних похідних. - Вісн. Львів. ун-ту, сер.мех.-мат., вип. 20, 1982. 2. Лопатинський Я.Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. - Укр. мат. журнал, 1953, т.5, № 2.

Стаття надійшла в редколегію 12.03.81

УДК 517.944

В.Г.Костенко, М.Д.Коркуна

ФУНДАМЕНТАЛЬНА МАТРИЦЯ РОЗВ"ЯЗКІВ ОДНІЄЇ ЛІНІЙНОЇ ЕЛІПТИЧНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

При зварюванні металічних пластин за допомогою рухомого локального джерела тепла в зоні зварного шва виникають залишкові напруження, які негативно впливають на якість зварювання. Їх можна зменшити, провівши додатково належний вибірковий підігрів зварених пластин. Таким чином, для успішного розв"язання цієї проблеми необхідно спочатку визначити напруження, які залишаються у зварених металічних пластинах, що дасть змогу знайти оптимальний додатковий підігрів, який би максимально зменшив залишкові напруження.

У найбільше математично спрощеному варіанті [2] перша задача полягає в знаходженні розв"язку системи рівнянь

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u \equiv \sum_{k,\ell=1}^{2} A_{k\ell}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_\ell} = \mathcal{F}(x_1, x_2) \qquad /1/$$

в області $H\setminus D$, неперервно диференційованого, включаючи і границю $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ області $H\setminus D$, причому на $\mathcal{T}$

$$B\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u \equiv \sum_{k=1}^{2} B_k(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_k} = f(x_1, x_2), \qquad /2/$$

де

$$A_{11} = \begin{pmatrix} \frac{2}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 1-4A \end{pmatrix}; \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1+\nu}{2(1-\nu)} \\ \frac{1+\nu}{2(1-\nu)} & 0 \end{pmatrix} = A_{21};$$