Список літератури: І. Костенко В.Г., Коркуна М.Д. Фундаментальна матриця розв"язків однієї лінійної еліптичної системи рівнянь у частинних похідних. - Вісн. Львів. ун-ту, сер.мех.-мат., вип. 20, 1982. 2. Лопатинський Я.Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. - Укр. мат. журнал, 1953, т.5, № 2.

Стаття надійшла в редколегію 12.03.81

УДК 517.944

В.Г.Костенко, М.Д.Коркуна

ФУНДАМЕНТАЛЬНА МАТРИЦЯ РОЗВ"ЯЗКІВ ОДНІЄЇ ЛІНІЙНОЇ ЕЛІПТИЧНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

При зварюванні металічних пластин за допомогою рухомого локального джерела тепла в зоні зварного шва виникають залишкові напруження, які негативно впливають на якість зварювання. Їх можна зменшити, провівши додатково належний вибірковий підігрів зварених пластин. Таким чином, для успішного розв"язання цієї проблеми необхідно спочатку визначити напруження, які залишаються у зварених металічних пластинах, що дасть змогу знайти оптимальний додатковий підігрів, який би максимально зменшив залишкові напруження.

У найбільше математично спрощеному варіанті [2] перша задача полягає в знаходженні розв"язку системи рівнянь

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u \equiv \sum_{k,l=1}^{2} A_{kl}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\,\partial x_l} = \mathcal{F}(x_1, x_2) \qquad /1/$$

в області $H\setminus D$, неперервно диференційованого, включаючи і границю $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ області $H\setminus D$, причому на $\mathcal{T}$

$$B\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u \equiv \sum_{k=1}^{2} B_k(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_k} = f(x_1, x_2), \qquad /2/$$

де

$$A_{11} = \begin{pmatrix} \frac{2}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 1-4A \end{pmatrix}; \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1+\nu}{2(1-\nu)} \\ \frac{1+\nu}{2(1-\nu)} & 0 \end{pmatrix} = A_{21};$$

$$A_{22}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{2}{1-\nu}\end{pmatrix};\quad B_1(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}\frac{1}{1-\nu}(\sin^2\gamma+\nu\cos^2\gamma) & \sin\gamma\cos\gamma\\ \sin\gamma\cos\gamma & \frac{1}{2}(\cos^2\gamma-\sin^2\gamma)\end{pmatrix};$$

$$B_2(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}\sin\gamma\cos\gamma & \frac{1}{1-\nu}(\nu\sin^2\gamma+\cos^2\gamma)\\ \frac{1}{2}(\cos^2\gamma-\sin^2\gamma) & -\sin\gamma\cos\gamma\end{pmatrix};\quad u=\begin{pmatrix}u_1(x_1,x_2)\\ u_2(x_1,x_2)\end{pmatrix};$$

$$\mathcal{F}(x_1,x_2)=2\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\begin{pmatrix}\frac{\partial T}{\partial x_1}\\ \frac{\partial T}{\partial x_2}\end{pmatrix};\quad f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha T\\ 0\end{pmatrix};$$

$u_1(x_1,x_2), u_2(x_1,x_2)$ – компоненти зміщень точок пластин; $A=\frac{\rho v_0^2}{2E}(1+\nu)\geq 0$; ν – коефіцієнт Пуассона / $0\leq\nu<1$ /; E – модуль пружності; ρ – густина речовини пластин; v_0 – швидкість рухомого джерела тепла в напрямку осі Ox_1; $T(x_1,x_2)$ – відоме температурне поле точкового джерела тепла для усталеного режиму в пластинці; α – коефіцієнт лінійного розширення; γ – кут між дотичною до $\mathcal{T}$ і віссю Ox_1; $\mathcal{T}_1$ – деяка фіксована ізотерма теплового поля $T(x_1,x_2)=const$; $\mathcal{T}_2$ – частина границі пластин, яка не підлягає зварюванню.

Компоненти напружень і зміщень зв"язані залежностями

$$\sigma_{x_1,x_1}=\frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\nu\frac{\partial u_2}{\partial x_2}-(1+\nu)\alpha T\right],$$

$$\sigma_{x_2,x_2}=\frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\nu\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-(1+\nu)\alpha T\right],$$

$$\sigma_{x_1,x_2}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right).$$

Легко переконатись, що /I/ – система рівнянь еліптичного типу, якщо $0\leq A<\frac{1}{4}$.

Знайдемо в явній формі фундаментальну матрицю розв"язків, яка дає змогу визначити частинний розв"язок системи /I/ і тим самим звести задачу /І/, /2/ до аналогічної задачі для однорідної системи рівнянь /І/.

Дещо модифікуючи відповідні формули Я.Б.Лопатинського [2], виражаємо фундаментальну матрицю розв"язків з особливістю в нулі відповідної однорідної системи /І/ у вигляді

$$\varphi(x_1,x_2;0,0)=\frac{|y|}{8\pi^2}\left\{\int_{-\infty+\varepsilon i}^{\infty+\varepsilon i} lg\left[-\frac{(x,\bar{\eta})^2}{(\eta',\bar{\eta}')}\right]A^{-1}(\beta y+\tau)\,d\beta\Big|_{\tau=\left(\frac{-y_2}{|y|},\frac{y_1}{|y|}\right)}+\right.$$

$$\left.+\int_{-\infty+\varepsilon i}^{\infty+\varepsilon i} lg\left[-\frac{(x,\bar{\eta})^2}{(\eta',\bar{\eta}')}\right]A^{-1}(\beta y+\tau)\,d\beta\Big|_{\tau=\left(\frac{y_2}{|y|},\frac{-y_1}{|y|}\right)}\right\},$$

$$A^{-1}(\beta y+\tau)=\frac{\begin{pmatrix}(1-4A)(\beta y_1+\tau_1)^2+\frac{2}{1-\nu}(\beta y_2+\tau_2)^2 & \frac{\nu+1}{\nu-1}(\beta y_1+\tau_1)(\beta y_2+\tau_2)\\ \frac{\nu+1}{\nu-1}(\beta y_1+\tau_1)(\beta y_2+\tau_2) & \left(\frac{2}{1-\nu}-4A\right)(\beta y_1+\tau_1)^2+(\beta y_2+\tau_2)^2\end{pmatrix}}{\frac{2}{1-\nu}Q_1Q_2(\beta-\beta_1)(\beta-\bar{\beta}_1)(\beta-\beta_2)(\beta-\bar{\beta}_2)};$$

$$\eta_j=\beta y_j+\tau_j,\ (j=1,2),\ \eta'=\eta_1,\ (y,\tau)=y_1\tau_1+y_2\tau_2=0,\quad(\tau,\tau)=1;$$

$$Q_1=y_2^2-i\sqrt{2}y_1y_2\sqrt{1-A(3-\nu)-B^2}+y_1^2B^2;\ Q_2=y_2^2+i\sqrt{2}y_1y_2\sqrt{1-A(3-\nu)-B^2}+y_1^2B^2,$$

$$B^4=8A^2(1-\nu)-2A(3-\nu)+1;$$

β_1, β_2 і β_1^*, β_2^* – корені рівняння

$$(\eta_2^2-i\sqrt{2}\eta_1\eta_2\sqrt{1-A(3-\nu)-B^2}+\eta_1^2B^2)(\eta_2^2+i\sqrt{2}y_1y_2\sqrt{1-A(3-\nu)-B^2}+\eta_1^2B^2)=0,$$

що лежать у верхній β – комплексній півплощині при $\tau=\left(\frac{-y_2}{|y|},\frac{y_1}{|y|}\right)$ і $\tau=\left(\frac{y_2}{|y|},\frac{-y}{|y|}\right)$ відповідно.

У результаті проведених обчислень знаходимо фундаментальну матрицю

$$\varphi(x_1,x_2;0,0)=\begin{pmatrix}U_1^{(1)}(x_1,x_2;0,0) & U_1^{(2)}(x_1,x_2;0,0)\\ U_2^{(1)}(x_1,x_2;0,0) & U_2^{(2)}(x_1,x_2;0,0)\end{pmatrix}, \qquad /3/$$

де

$$U_1^{(1)}=\frac{1-\nu}{16\sqrt{2}\,\pi(1+\nu)AB^2}\Big\{\Big[\Big(1-4A+\frac{2}{1-\nu}B^2\Big)\sqrt{1-A(3-\nu)-B^2}+\Big(1-4A-\frac{2}{1-\nu}B^2\Big)\sqrt{1-A(3-\nu)+B^2}\Big]\times$$
$$\times\lg\big[x_1^2+(1-4A)x_2^2\big]+\Big[\Big(1-4A+\frac{2}{1-\nu}B^2\Big)\sqrt{1-A(3-\nu)-B^2}-\Big(1-4A-\frac{2}{1-\nu}B^2\Big)\times$$
$$\times\sqrt{1-A(3-\nu)+B^2}\Big]\lg\big[x_1^2+(1-2A(1-\nu))x_2^2\big]\Big\};$$

/4/

$$U_2^{(1)}=-\frac{1}{8\pi A}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\,x_1x_2\sqrt{1-A(3-\nu)-B^2}}{x_1^2+x_2^2B^2}=U_1^{(2)};$$

$$U_2^{(2)}=\frac{1-\nu}{16\sqrt{2}\,\pi(1+\nu)AB^2}\Big\{\Big[\Big(\frac{2}{1-\nu}-4A+B^2\Big)\sqrt{1-A(3-\nu)-B^2}+\Big(\frac{2}{1-\nu}-4A-B^2\Big)\times$$
$$\times\sqrt{1-A(3-\nu)+B^2}\Big]\lg\big[x_1^2+(1-4A)x_2^2\big]+\Big[\Big(\frac{2}{1-\nu}-4A+B^2\Big)\sqrt{1-A(3-\nu)-B^2}-$$
$$-\Big(\frac{2}{1-\nu}-4A-B^2\Big)\sqrt{1-A(3-\nu)+B^2}\Big]\lg\big[x_1^2+(1-2A(1-\nu))x_2^2\big]\Big\}.$$

Зокрема, якщо $V_0=0$, тоді $A=0$, $B=1$ і, розкриваючи невизначеність в /4/ за правилом Лопіталя, знаходимо фундаментальну матрицю однорідної системи /I/ при $A=0$ у вигляді

$$U_1^{(1)}=\frac{1}{8\pi}\Big\{\frac{(\nu+1)x_2^2}{x_1^2+x_2^2}+\frac{3-\nu}{2}\lg(x_1^2+x_2^2)\Big\},$$

$$U_2^{(1)}=-\frac{\nu+1}{8\pi}\,\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}=U_1^{(2)},$$

$$U_2^{(2)}=\frac{1}{8\pi}\Big\{\frac{-(\nu+1)x_2^2}{x_1^2+x_2^2}+\frac{3-\nu}{2}\lg(x_1^2+x_2^2)\Big\}.$$

Фундаментальну матрицю з особливістю в точці $y(y_1,y_2)$ визначаємо за допомогою /4/ з залежності $\varphi(x_1,x_2;y_1,y_2)=\varphi(x_1-y_1,x_2-y_2;0,0)$.

Частинний розв"язок системи /I/ дає формула

$$\tilde{U}(x_1,x_2)=\iint\limits_{H\setminus D}\varphi(x_1,x_2;y_1,y_2)\mathcal{F}(y_1,y_2)\,dy_1\,dy_2,$$

якщо $\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial x_1}$ і $\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial x_2}$ притаманні властивості, що забезпечують рівномірну збіжність останнього інтеграла та його частинних похідних до другого порядку включно.

Шукаючи тепер розв"язок задачі /1/, /2/ у вигляді $u(x_1,x_2)=$ $=v(x_1,x_2)+\tilde{u}(x_1,x_2)$, зводимо її до визначення $v(x_1,x_2)$ як розв"язку однорідної системи рівнянь

$$\sum_{k,l=1}^{2} A_{kl}\frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l}=0$$

в області $H\setminus D$, який би на Γ задовольняв умови

$$\lim_{x\to y\in\Gamma} B\left(y,\frac{\partial}{\partial x}\right)v=\lim_{x\to y\in\Gamma}\sum_{k=1}^{2} B_k(y_1,y_2)\frac{\partial v}{\partial x_k}=\Psi(y_1,y_2),$$

де

$$\Psi(y_1,y_2)=f(y_1,y_2)-B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)\tilde{u}(y_1,y_2).$$

Список літератури: 1. Лопатинський Я.Б. Фундаментальная система решений эллиптической системы линейных дифференциальных уравнений. - Укр. мат. журн., 1951, т.3, № 1. 2. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. - К.: Наукова думка, 1972.

Стаття надійшла в редколегію 12.03.81

УДК 517.913

К.С.Костенко

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ"ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Для рівняння

$$y^{(IV)}+p_1(x)y''+(p_2(x)+r(x))y'+p_3(x)y=0 \qquad /1/$$

доведена така теорема.

Теорема. Нехай у рівнянні /1/ $p_3(x)$ неперервна, а $r(x)$, $p_1(x)$ і $p_2(x)-\lambda\xi^{-2}(x)\neq 0$ неперервно диференційовані функції відповідно один,