$$y_2(x,x_0)=z_q^{\frac{1}{2}}(x)\exp\left[(\beta_0-a)\varphi(x,x_0)\right](1+o(1)),\ x\to\infty, \qquad /3/$$

$$y_3(x,x_0)=z_q^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left[\beta_0\varphi(x,x_0)\right](1+o(1)),\ x\to\infty, \qquad /4/$$

$$y_4(x,x_0)=z_q^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left[-3\beta_0\varphi(x,x_0)\right](1+o(1)),\ x\to\infty. \qquad /5/$$

За цих же умов головні частини асимптотичних формул для перших похідних фундаментальної системи розв"язків одержуємо формальним диференціюванням головних частин /2/ – /5/.

Те ж саме наявне для похідних другого порядку цих розв"язків, якщо

$$\lim_{x\to\infty}(A(x)-\rho_q(x))z_q^2(x)=0,$$

і третього порядку, коли

$$\lim_{x\to\infty}(\rho_1'(x)-r(x))z_q^3(x)=0,$$

додатково.

Список літератури: I. К о с т е н к о  Е.С. Интегрирование в замкнутой форме и асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. – Дифференциальные уравнения, 1974, т.10, № 10. 2. П а в л ю к  І.А. Асимптотичні властивості розв"язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. Вид-во Київ. ун-ту, 1970.

Стаття надійшла в редколегію 15.03.81

УДК 517.947

В.Г.Костенко, О.О.Веселовська

## АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗВ"ЯЗОК КВАЗІЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ З ПОВІЛЬНО ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

У монографії [1] і статті [2] наведена детальна схема побудови асимптотичних розв"язків у першому наближенні для еліптичних рівнянь другого порядку з постійними та змінними коефіцієнтами.

Мета цього дослідження – побудова асимптотичного розв"язку рівняння четвертого порядку з повільно змінними коефіцієнтами у вигляді деякої неплоскої хвилі.

Спочатку знайдемо умови, за яких існує розв"язок рівняння

$$\frac{1}{\omega_1^2}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}+\frac{2}{\omega_1\omega_2}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\frac{1}{\omega_2^2}\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}+$$
$$+\frac{2^5 tg(\ln(\omega_1 x_1^2+\omega_2 x_2^2))\varkappa(\tau)}{\omega_1^2\,\omega_2^2(\omega_1 x_1^2+\omega_2 x_2^2)^2}u=0 \qquad /1/$$

у формі

$$u_0=u_0(\ln(\omega_1 x_1^2+\omega_2 x_2^2),\tau)=u_0(\ln\xi,\tau). \qquad /2/$$

Підставляючи /2/ в /1/, одержуємо звичайне диференціальне рівняння

$$u_0^{IV}-2u_0'''+u_0''+\frac{2^5 tg(\ln\xi)\varkappa(\tau)}{a_{44}(\tau)\,\omega_1^2\cdot\omega_2^2}u=0,$$

з відомим $2\pi$ – періодичним по $\ln\xi$ розв"язком

$$u_0=A\cos(\ln(\omega_1 x_1^2+\omega_2 x_2^2)+h), \qquad /3/$$

якщо при цьому виконується умова

$$a_{44}(\tau)\,\omega_1^2(\tau)\,\omega_2^2(\tau)-\varkappa^2(\tau)=0, \qquad /4/$$

то "хвильовий" розв"язок квазілінійного рівняння

$$\frac{1}{\omega_1^2}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}+\frac{2}{\omega_1\omega_2}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\frac{1}{\omega_2^2}\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}+$$
$$+\frac{2^5 tg(\ln(\omega_1 x_1^2+\omega_2 x_2^2))\varkappa^2(\tau)}{\omega_1^2\omega_2^2(\omega_1 x_1^2+\omega_2 x_2^2)^2}u= \qquad /5/$$
$$=\varepsilon f\left(\tau,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial^4 u}{\partial x_i\partial x_j},\varepsilon\right),\ (i,j=1,2)$$

шукаємо у вигляді

$$u=a(x_1,x_2,\varepsilon)\cos(\Psi(x_1,x_2,\varepsilon)), \qquad /6/$$

де $a$ і $\psi$ – нові невідомі функції. При $\varepsilon = 0$ цей розв"язок перетворюється в /3/, якщо $a(x_1, x_2, 0) = A$ і
$\psi(x_1, x_2, 0) = \ln(\omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2) + h.$
Коефіцієнти у рівнянь /1/ і /5/ залежать від усіх "повільних" координат $\tau = (\tau_1, \tau_2) = (\varepsilon x_1, \varepsilon x_2)$,
$\frac{d\tau_i}{dx_i} = \varepsilon \; (i = 1,2)$ ; $\varepsilon > 0$ — малий параметр.

Припустимо, що функції $f$ і $\varkappa$ достатньо гладкі в заданій області.

Розклад

$$\varepsilon f = \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 \ldots, \; f\nu\left(\tau, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j^2}, 0\right)$$

$(\nu = 1,2,3,\ldots)$ розуміємо як асимптотичний, тобто при малих $\varepsilon$

$$\left| f - \sum_{\nu=1}^{p} \varepsilon^{\nu-1} f\nu \right| < C_p \varepsilon^p, \qquad C_p = const.$$

Щоб однозначно визначити нові невідомі функції $a$ і $\psi$, задамо додаткові співвідношення

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = -\frac{\partial \ln \xi}{\partial x_j} a(x_1, x_2, \varepsilon) \sin(\ln \psi(x_1, x_2, \varepsilon)), \qquad /7/$$
$$(j = 1,2).$$

Нехай функції $a$ і $\ln\psi$ розкладаються по степенях $\varepsilon$

$$a = \bar{a}(\tau, \varepsilon) + \varepsilon u_1(\tau, \bar{a}, \ln\bar{\psi}) + \varepsilon^2 u_2(\tau, \bar{a}, \ln\bar{\psi}) + \ldots,$$
$$\ln\psi = \ln\bar{\psi}(\tau, \varepsilon) + \varepsilon v_1(\tau, \bar{a}, \ln\bar{\psi}) + \varepsilon^2 v_2(\tau, \bar{a}, \ln\bar{\psi}) + \ldots, \qquad /8/$$

де $\bar{a} = \bar{a}(\tau)$ і $\ln\bar{\psi}$ – "усереднені" амплітуда й фаза; $u_i$ та $v_i$ обмежені, гладкі $2\pi$ – періодичні по $\ln\bar{\psi}$ функції, що відповідають малим вібраціям величин $a$ і $\ln\psi$ близько їх перших наближень $\bar{a}$ і $\ln\bar{\psi}$.

Повна фаза „хвильового" розв"язку збуреного рівняння /5/ – нелінійна функція, градієнтно близька до повної фази $\ln\xi$ розв"язку рівняння /1/, тобто

$$\frac{\partial \ln\bar{\psi}}{\partial x_j} = \frac{\partial \ln\xi}{\partial x_j} + \varepsilon \frac{\partial h}{\partial \tau_j} \quad (j = 1,2), \qquad /9/$$

де $\bar{h}=\bar{h}(\tau)$ характеризує зміну повної фази по всіх координатах. Підставляючи /8/ в /6/ і /7/, у першому наближенні одержуємо

$$u=\bar{a}\cos(\ln\bar{\psi})+\varepsilon(u_1\cos(\ln\bar{\psi})-\bar{a}v_1\sin(\ln\bar{\psi})),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}=-\frac{\partial\ln\xi}{\partial x_j}\bar{a}\sin(\ln\bar{\psi})+\varepsilon(-u_1\sin(\ln\bar{\psi})- \qquad /10/$$

$$-\bar{a}v_1\cos(\ln\bar{\psi}))\cdot\frac{\partial\ln\xi}{\partial x_j}.$$

Далі, застосовуючи методику, викладену в праці [I], дістаємо систему рівнянь для визначення $u_1$ і $v_1$

$$\frac{\partial^3 u_1}{\partial(\ln\psi)^3}+2(1-ctg(\ln\bar{\psi}))\frac{\partial^2 u_1}{\partial(\ln\bar{\psi})^2}+(2ctg^2(\ln\bar{\psi})-$$

$$-2ctg(\ln\bar{\psi})+1)\frac{\partial u_1}{\partial(\ln\bar{\psi})}=\varphi_1(\tau,\bar{a},\ln\bar{\psi},f_1)=\varphi_1; \qquad /11/$$

$$\frac{\partial^3 v_1}{\partial(\ln\bar{\psi})^3}+2(1-tg(\ln\bar{\psi}))\frac{\partial^2 v_1}{\partial(\ln\bar{\psi})^2}+(2tg^2(\ln\bar{\psi})-$$

$$-2tg(\ln\bar{\psi})+1)\frac{\partial v_1}{\partial\ln\bar{\psi}}=\varphi_2(\tau,\bar{a},\ln\bar{\psi},f_1)=\varphi_2.$$

Усереднюючи ліві та праві частини системи /10/ з врахуванням залежності /9/ та умови /3/, одержуємо систему амплітудно-фазових рівнянь у частинних похідних

$$\bar{a}\left(6-\frac{9\xi}{2\omega_1x_1^2}+\frac{3\xi}{\omega_1x_1}-\frac{x_1}{4}-\frac{3\omega_1x_1^3}{2\xi}-\frac{\xi^2}{2\omega_1^2x_1^3}\right)\times$$

$$\times\frac{\partial\ln\bar{\Psi}}{\partial x_1}-\bar{a}\left(\frac{5x_2}{4}-\frac{3\omega_1x_1^2x_2}{2\xi}\right)\frac{\partial\ln\bar{\Psi}}{\partial x_2}+\left(-\frac{5\xi}{2\omega_1x_1}+\frac{5x_1}{4}+\right.$$

$$\left.+\frac{\omega_2x_1x_2^2}{2\xi}-\frac{3\xi^3}{8x_1^5\omega_1^3}\right)\frac{\partial\bar{a}}{\partial x_1}+\left(\frac{5x_2}{4}+\frac{\omega_2x_2^3}{2\xi}\right)\frac{\partial\bar{a}}{\partial x_2}=$$

$$=\varepsilon\cdot\frac{\xi^2}{2^3}\langle f_1\sin(\ln\bar{\psi})\rangle;$$

$$\left(-\frac{5\xi}{2\omega_1x_1}+\frac{5x_1}{4}+\frac{x_1\omega_2x_2^2}{2\xi}-\frac{3\xi^3}{8\omega_1^3x_1^5}\right)\frac{\partial\ln\bar{\Psi}}{\partial x_1}+\left(\frac{5x_2}{4}+\frac{\omega_2x_2^3}{2\xi}\right)\frac{\partial\ln\bar{\Psi}}{\partial x_2}+$$

$$+\frac{1}{\bar{a}}\left(-6+\frac{9}{2\omega_1 x_1^2}-\frac{5\xi}{2\omega_1 x_1}-\frac{x_1}{4}+\frac{3\omega_1 x_1^3}{\xi}+\frac{\xi^2}{4\omega_1^2 x_1^3}\right)\frac{\partial\bar{a}}{\partial x_1}+$$

$$+\left(\frac{5x_2}{4}+\frac{3\omega_1 x_1^2 x_2}{2\xi}\right)\frac{\partial\bar{a}}{\partial x_2}=\varepsilon\,\frac{\xi^2}{2^3}\left\langle f_1\cos(\ln\bar{\psi})\right\rangle. \quad /12/$$

Інтегруванням системи /II/ знаходимо

$$u_1(\tau,\bar{a},\ln\bar{\psi})=u_{10}(\tau,\bar{a})+\frac{1}{5}\int(2ctg(\ln\bar{\psi})-1)\varphi_1\,d(\ln\bar{\psi})-$$

$$-\cos(\ln\bar{\psi})\left(u_{20}(\tau,\bar{a})+\frac{1}{2}\int\frac{\varphi_1\,d(\ln\bar{\psi})}{\sin(\ln\bar{\psi})}\right)-\frac{1}{5}e^{-2\ln\bar{\psi}}\times$$

$$\times(2\sin(\ln\bar{\psi})+\cos(\ln\bar{\psi}))\left(\int\frac{\varphi_1\cdot e^{2\ln\bar{\psi}}d(\ln\bar{\psi})}{\sin(\ln\bar{\psi})}+u_0(\tau,\bar{a})\right);$$

$$v_1(\tau,\bar{a},\ln\bar{\psi})=\frac{1}{5}\int\varphi_2\cdot(2tg(\ln\bar{\psi})-1)\,d(\ln\bar{\psi})+$$

$$+v_{10}(\tau,\bar{a})-\sin(\ln\bar{\psi})\left(v_{20}(\tau,\bar{a})-\frac{1}{2}\int\frac{\varphi_2\cdot d(\ln\bar{\psi})}{\cos(\ln\bar{\psi})}\right)+$$

$$+\frac{1}{5}e^{2\ln\bar{\psi}}(\sin(\ln\bar{\psi})+2\cos(\ln\bar{\psi}))\left(\frac{1}{2}\int\frac{\varphi_2\cdot d(\ln\bar{\psi})}{e^{2\ln\bar{\psi}}\cos(\ln\bar{\psi})}+\right.$$

$$\left.+v_{30}(\tau,\bar{a})\right), \quad /13/$$

де $u_{10}, u_{20}, u_{30}, v_{10}, v_{20}, v_{30}$ – довільні функції. Отже, асимптотичний розв"язок квазілінійного рівняння /5/ у першому наближенні має вигляд /10/, де функції $u_1$ і $v_1$ зображаються виразами /13/, амплітуду $\bar{a}$ та повну фазу $\ln\bar{\psi}$ знаходимо з системи рівнянь першого наближення у частинних похідних /12/.

Список літератури: I. М и т р о п о л ь с ь к и й Ю.А., М о с е е н к о в Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – Киев: Вища школа, Головное издательство, 1976.
2. М о с е е н к о в В.Б. Асимптотика волновых решений эллиптических

уравнений с переменными коэффициентами. - В кн.: Аналитические методы исследования решений нелинейных дифференциальных уравнений. Киев, 1975.

Стаття надійшла в редколегію 10.03.81

УДК 517.946

В.М.Цимбал

# КУТОВИЙ ПРИМЕЖОВИЙ ШАР У ЗМІШАНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Деякі труднощі в побудові асимптотики розв"язків сингулярно збурених задач для різного типу рівнянь, зв"язані з наявністю кутових точок області, як показано у працях [1, 2], можна подолати, ввівши в асимптотику функції кутового примежового шару. Зокрема, В.Ф.Бутузов [1, 2] побудував асимптотику розв"язку змішаних задач для деяких гіперболічних рівнянь.

Методом примежового шару [3, 4] з застосуванням функцій кутового примежового шару будуємо асимптотичний розклад розв"язку змішаної задачі для гіперболічного рівняння другого порядку.

В області $D_T=\{(x,t): 0\le x\le l, 0\le t\le T\}$ розглянемо змішану задачу

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t}-b(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+c(x,t)u=f(x,t), \quad /1/$$

$$u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0, \quad /2/$$

$$u(x,0)=0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0, \quad /3/$$

де $\varepsilon>0$ - малий параметр.

Нехай виконуються умови:

1/ $a(x,t)>0, b(x,t)>0, c(x,t)>0$ в $D_T$;

2/ функції $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$ - достатньо