уравнений с переменными коэффициентами. – В кн.: Аналитические методы исследования решений нелинейных дифференциальных уравнений. Киев, 1975.

Стаття надійшла в редколегію 10.03.81

УДК 517.946

В.М.Цимбал

КУТОВИЙ ПРИМЕЖОВИЙ ШАР У ЗМІШАНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Деякі труднощі в побудові асимптотики розв"язків сингулярно збурених задач для різного типу рівнянь, зв"язані з наявністю кутових точок області, як показано у працях [1, 2], можна подолати, ввівши в асимптотику функції кутового примежового шару. Зокрема, В.Ф.Бутузов [1, 2] побудував асимптотику розв"язку змішаних задач для деяких гіперболічних рівнянь.

Методом примежового шару [3, 4] з застосуванням функцій кутового примежового шару будуємо асимптотичний розклад розв"язку змішаної задачі для гіперболічного рівняння другого порядку.

В області $D_T=\{(x,t): 0\le x\le l, 0\le t\le T\}$ розглянемо змішану задачу

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t} - b(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + c(x,t)u = f(x,t), \quad /1/$$

$$u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0, \quad /2/$$

$$u(x,0)=0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0, \quad /3/$$

де $\varepsilon>0$ – малий параметр.

Нехай виконуються умови:

1/ $a(x,t)>0,\ b(x,t)>0,\ c(x,t)>0$ в D_T;

2/ функції $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$ – достатньо гладкі для проведення подальших викладок;

3/ $f(q,0)=f_t(q,0)=f_x(q,0)=0 \quad q=0,\ell.$

Розклад розв'язку задачі /1/-/3/ шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^{i}v_i(x,t)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^{i}\Pi_i(x,\tau)+\sum_{i=0}^{2N+1}\varepsilon^{i/2}Q_i(\xi,t)+$$
$$+\sum_{i=0}^{2N+1}\varepsilon^{i/2}\tilde{Q}_i(\eta,t)+\sum_{i=0}^{2N+1}\varepsilon^{i/2}P_i(\xi,\tau)+\sum_{i=0}^{2N+1}\varepsilon^{i/2}\tilde{P}_i(\eta,\tau)+R_N(x,t,\varepsilon), \qquad /4/$$

де $\tau=t/\varepsilon$, $\xi=x/\sqrt{\varepsilon}$, $\eta=(\ell-x)/\sqrt{\varepsilon}$; функції, що входять у /4/ визначимо далі. Для скорочення записів вважаємо $\varphi_i\equiv 0$ / $i<0$ або ж i не ціле/, де φ_i - функції будь-яких аргументів.

Регулярну частину асимптотики знаходимо за допомогою рівнянь

$$v_0(x,t)=\frac{f(x,t)}{c(x,t)},\quad v_i(x,t)=-\frac{1}{c(x,t)}\left[\frac{\partial v_{i-1}}{\partial t}-b(x,t)\frac{\partial^2 v_{i-1}}{\partial x^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 v_{i-2}}{\partial t^2}-a(x,t)\frac{\partial^2 v_{i-2}}{\partial x^2}\right]\quad (i=1,\dots,N). \qquad /5/$$

Функції $v_i(x,t)\,(i=0,\dots,N)$ визначаються рекурентно з /5/ і, взагалі кажучи, не задовольняють умовам /2/, /3/.

$\Pi(x,\tau)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^{i}\Pi_i(x,\tau)$ служить для того, щоб сумісно з регулярною частиною задовольнити /3/. $\Pi(x,\tau)$ шукаємо за допомогою рівняння

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial\tau^2}+\frac{\partial\Pi}{\partial\tau}+c(x,0)\Pi=[c(x,0)-c(x,\varepsilon\tau)]\Pi+\varepsilon b(x,\varepsilon\tau)\frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2}+$$
$$+\varepsilon^2 a(x,\varepsilon\tau)\frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2}.$$

Розкладаючи коефіцієнти у стрічки Тейлора в околі $t=0$ і зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε, одержуємо рівняння для визначення $\Pi_i(x,\tau)\ (i=0,\dots,N)$

$$\frac{\partial^2\Pi_i}{\partial\tau^2}+\frac{\partial\Pi_i}{\partial\tau}+c(x,0)\Pi_i=\varphi_i(x,\tau), \qquad /6/$$

де $\varphi_0(x,\tau)\equiv 0$, $\varphi_i(x,\tau)$ легко можна записати та лінійно виразити через $\Pi_j(x,\tau)$ $(j<i)$ і їх похідні.

Рівняння для визначення усіх інших функцій з /4/ дістаємо аналогічно з використанням відповідного регуляризуючого перетворення і стандартної процедури асимптотичних збурень. Маємо

$$-b(0,t)\frac{\partial^2 Q_i}{\partial \xi^2}+c(0,t)Q_i=\psi_i(\xi,t)\ \ (i=0,\dots,2N+1), \qquad /7/$$

$$-b(l,t)\frac{\partial^2 \tilde{Q}_i}{\partial \eta^2}+c(l,t)\tilde{Q}_i=q_i(\eta,t)\ \ (i=0,\dots,2N+1), \qquad /8/$$

$$\frac{\partial^2 P_i}{\partial \tau^2}-b(0,0)\frac{\partial^2 P_i}{\partial \xi^2}+\frac{\partial P_i}{\partial \tau}+c(0,0)P_i=z_i(\xi,\tau)\ (i=0,\dots,2N+1), \qquad /9/$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{P}_i}{\partial \tau^2}-b(l,0)\frac{\partial^2 \tilde{P}_i}{\partial \eta^2}+\frac{\partial \tilde{P}_i}{\partial \tau}+c(l,0)\tilde{P}_i=S_i(\eta,\tau)\ (i=0,\dots,2N+1), \qquad /10/$$

де усі функції $\psi(\xi,t)$, $q_i(\eta,t)$, $z_i(\xi,\tau)$, $S_i(\eta,\tau)$ легко записати в явному вигляді.

Додаткові умови одержуємо за допомогою /2/, /3/ і /4/

$$\Pi_i(x,0)=-v_i(x,0),\ \frac{\partial \Pi_i(x,0)}{\partial \tau}=-\frac{\partial v_{i-1}(x,0)}{\partial t}\ \ (i=0,\dots,N), \qquad /11/$$

$$Q_i(0,t)=-v_{i/2}(0,t),\ Q_i(\xi,t)\xrightarrow[\xi\to\infty]{}0\ \ (i=0,\dots,2N+1), \qquad /12/$$

$$\tilde{Q}_i(\eta,t)=-v_{i/2}(l,t),\ \tilde{Q}_i(\eta,t)\xrightarrow[\eta\to\infty]{}0\ \ (i=0,\dots,2N+1), \qquad /13/$$

$$P_i(0,\tau)=-\Pi_{i/2}(0,\tau),\ P_i(\xi,0)=-Q_i(\xi,0),\ \frac{\partial P_i(\xi,0)}{\partial \tau}=-\frac{\partial Q_{i-2}(\xi,0)}{\partial t}\ \ (i=0,\dots,2N+1). \qquad /14/$$

$$\tilde{P}_i(0,\tau)=-\Pi_{i/2}(l,\tau),\ \tilde{P}_i(\eta,0)=-\tilde{Q}_i(\eta,0),\ \frac{\partial \tilde{P}_i(\eta,0)}{\partial \tau}=-\frac{\partial Q_{i-2}(\eta,0)}{\partial t}\ \ (i=0,\dots,2N+1). \qquad /15/$$

Отже, функції $\Pi_i(x,\tau)$, $Q_i(\xi,t)$, $\tilde{Q}_i(\eta,t)$ визначаємо як розв"язки відповідно задач /6/, /11/; /7/, /12/; /8/, /13/ для звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Функції $P_i(\xi,\tau)$, $\tilde{P}_i(\eta,\tau)$ знаходимо як розв"язки змішаних задач для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами відповідно /9/, /I4/ і /I0/, /I5/. Добре видно, що усі функції з /4/ знаходяться рекурентно, якщо їх шукати у послідовності $V_0(x,t)$, $\Pi_0(x,\tau)$, $Q_0(\xi,t)$, $\tilde{Q}_0(\eta,t)$, $P_0(\xi,\tau)$, $\tilde{P}_0(\eta,\tau)$ і так далі. Аналогічними міркуваннями [4] легко показати, що всі функції $\Pi_i(x,\tau)$, $Q_i(\xi,t)$, $\tilde{Q}_i(\eta,t)$ є функціями звичайного примежового шару. Розв"язки задач /9/, /I4/, і /I0/, /I5/ оцінюємо у явному вигляді за допомогою функції Рімана [5]. Використовуючи оцінки, аналогічні оцінкам з праці [I], переконуємося, що функції $P_i(\xi,\tau)$ і $\tilde{P}_i(\eta,\tau)$ є функціями кутового примежового шару в околі відповідно точок $(0,0)$ і $(\ell,0)$.

Методом інтегралів енергії [5] одержана оцінка

$$\| R_N(x,t,\varepsilon) \|_{L_2(D_T)} = O(\varepsilon^{N+1/2}),$$

яка має місце для досить малих ε. Її наявність доводить асимптотичну коректність розкладу /4/.

Одержаний результат сформулюємо у вигляді теореми.

<u>Теорема.</u> При виконанні умов I/ – 3/ розв"язок задачі /I/–/3/ допускає асимптотичне представлення /4/, де $V_i(x,t)$ – регулярна частина асимптотики; $\Pi_i(x,\tau)$, $Q_i(\xi,t)$, $\tilde{Q}_i(\eta,t)$ – функції звичайного примежового шару в околі відповідних сторін прямокутника D_T; $P_i(\xi,\tau)$, $\tilde{P}_i(\eta,\tau)$ – функції кутового примежового шару в околі точок $(0,0)$ і $(\ell,0)$.

<u>Список літератури:</u> I. Б у т у з о в В.Ф. Угловой погранслой в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений. – Математический сборник, 1977, № 3. 2. Б у т у з о в В.Ф. Угловой погранслой в сингулярно возмущенных задачах с частными производными.– Дифференциальные уравнения, 1979, т.I5, № I0. 3. В а с и л ь е в а А.Б., Б у т у з о в В.Ф. Асимптоти-

ческие разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. - М.: Наука, 1973. 4. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. - Успехи матем. наук, 1957, № 5. 5. Курант Р. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, 1964.

Стаття надійшла в редколегію 20.09.80

УДК 517.946

В.М.Цимбал

СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНЕ РІВНЯННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

В області $D_T=\{0\le x\le l, 0\le t\le T\}$ розглянемо таку задачу:

$$L_\varepsilon u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,t)u = f(x,t), \qquad /1/$$

$$u(0,t,\varepsilon)=0,\ \frac{\partial u(0,t,\varepsilon)}{\partial x}=0,\ u(l,t,\varepsilon)=0,\ u(x,0,\varepsilon)=0, \qquad /2/$$

де $\varepsilon > 0$ - малий параметр.

Умови однозначної розв"язності задачі /1/, /2/ без параметра встановлені у праці [ ].

Якщо в /1/ формально прийняти $\varepsilon=0$, то одержимо гіперболічне рівняння. Виродження параболічного рівняння другого порядку в гіперболічне першого порядку, а також узагальнення на параболічне рівняння будь-якого парного порядку вже досліджено.

Побудуємо асимптотичний розклад до деякого порядку N по степенях малого параметра ε розв"язку задачі /1/, /2/. При цьому використовуємо метод примежового шару [1].

Припускаємо, що виконуються умови:

1/ $a(x,t)>0$ в D_T;

2/ функції $a(x,t)$, $b(x,t)$, $f(x,t)$ достатньо гладкі в D_T для проведення подальших викладок;

3/ $\dfrac{\partial^{i+j} f(0,0)}{\partial x^i \partial t^j} = \dfrac{\partial^{i+j} f(l,0)}{\partial x^i \partial t^j}$ $(i=0,\dots,N+1;\ i+j=0,\dots,N+1)$.